

$$S^3 = [2 \ B^{1^*}]$$

GENVRIN Hugues

Janvier 2026

La sphère unitaire de dimension trois S^3 est d'équation $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$. C'est bien entendu la frontière de la boule B^2 représentée par l'inéquation $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \leq 1$. Toutefois on peut montrer que $S^3 \equiv B^1$.

Démonstration. Pour cela reprenons l'équation légèrement modifiée $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 - x_4^2$, où $-1 \leq x_4 \leq 1$ est pris comme paramètre dans le terme de droite. Alors il en découle que les solutions de l'équation de S^3 sont aussi des solutions de l'inéquation $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1$ qui est l'inéquation décrivant la boule B^1 . Pour être plus précis, on a $S^3 \equiv 2 \ B^1$, il existe une symétrie pour x_4 entre $[-1; 0[$ et $]0; 1[$, qui renvoient le même x_4^2 . La frontière de B^1 étant S^2 recouvert une seule fois (au lieu de deux pour les autres éléments). D'où $S^3 = [2 \ B^{1^*}]$, soit un grain B^1 de densité interne deux. $\square$