Numérosité des rationnels strictement positifs

Densité et rareté

Hugues Genvrin

Novembre 2026

Résumé

On prolonge aux rationnels strictement positifs la numérosité au grain des entiers, définie dans un modèle non standard de l'arithmétique de Peano. Les rationnels, écrits p/q avec p, q dans la fenêtre $[1, \nu]$, ont pour numérosité ν^2. Les rationnels irréductibles ont une numérosité infiniment proche de $\frac{6}{\pi^2}\nu^2$: ils forment une proportion standard des fractions, et sont plus nombreux que les fractions réductibles. Leur grain moyen, infiniment proche de $\pi^2/6$, est standard, comme celui des nombres pairs. Enfin, au grain du continu de base, les rationnels de la fenêtre n'occupent qu'une proportion infinitésimale des grains, au plus $2\nu^2/2^\nu$, alors qu'ils sont denses à l'échelle standard : la densité, comme l'infini, est relative au grain.

1 Rappels du cadre

On reprend le cadre de [1]. On note $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ les entiers de Peano, et l'on fixe un modèle non standard M de l'arithmétique, au sens de Skolem [5], qui contient $\mathbb{N}$ comme segment initial.

Lemme 1 (Transfert)**.** *Tout énoncé de l'arithmétique vrai dans* $\mathbb{N}$ *est vrai dans* M*, et réciproquement, y compris lorsqu'il mentionne des entiers standard particuliers.*

On fixe un entier infini $\nu \in M$, divisible par tout entier standard, par exemple $\nu = H!$ avec H infini.

Parties définissables de $\mathbb{N}^2$. Une fraction p/q, avec $p, q \in \mathbb{N}$, est représentée par le couple (p, q). On appelle *partie définissable* de $\mathbb{N}^2$ une partie $F = \{(p, q) \in \mathbb{N}^2 : \varphi(p, q)\}$, où φ est une formule de l'arithmétique à deux variables libres, et l'on note ${}^*F$ l'ensemble que la même formule définit dans M^2. Par exemple :

- l'ensemble $\mathbb{Q}_+^* = \mathbb{N}^2$ de toutes les fractions ;
- l'ensemble $\mathbb{Q}_+^{\mathrm{irr}}$ des fractions irréductibles, défini par $p \wedge q = 1$, où le pgcd est définissable dans l'arithmétique ;
- l'ensemble $\mathbb{Q}_+^{\mathrm{red}} = \mathbb{Q}_+^* \setminus \mathbb{Q}_+^{\mathrm{irr}}$ des fractions réductibles.

Définition 2 (Numérosité dans $\mathbb{N}^2$)**.** La *fenêtre* de $\mathbb{N}^2$ est le carré $[1, \nu]^2$ de M^2. On appelle numérosité d'une partie définissable $F \subset \mathbb{N}^2$ le nombre, calculé dans M,

$$\#F = \left| {}^*F \cap [1, \nu]^2 \right|,$$

et *grain moyen* de F le quotient $\nu^2/\#F$: c'est l'aire moyenne qu'il faut donner à chaque élément de F pour paver la fenêtre, selon la relation $L = |L| \cdot \varepsilon$ de la théorie du grain [2].

Comme dans [1], le nombre d'éléments de F dans le carré $[1, n]^2$ est une fonction définissable de n, dont la valeur en ν est $\#F$: le comptage a lieu dans M, avec les seules ressources de l'arithmétique.

Constantes réelles. Les nombres réels ne sont pas des objets de l'arithmétique. Pour un réel standard $c > 0$ et un élément x de M, on écrit

$$x \simeq c\,\nu^2$$

lorsque, pour tous rationnels standard $a < c < b$, on a $a\nu^2 < x < b\nu^2$. Avec $a = r/s$, l'inégalité $a\nu^2 < x$ s'écrit $r\nu^2 < sx$: elle est arithmétique. Le rapport x/ν^2 est alors infiniment proche de c, au sens de [1].

2 Toutes les fractions

Chaque numérateur p de la fenêtre porte les ν dénominateurs $q \in [1, \nu]$. Ainsi

$$\#\mathbb{Q}_+^* = \nu^2,$$

et le grain moyen de $\mathbb{Q}_+^*$ vaut 1 : $\mathbb{Q}_+^*$ est le tout, et la fenêtre $[1, \nu]^2$ joue pour lui le rôle que joue $[1, \nu]$ pour $\mathbb{N}$.

3 Les fractions irréductibles

3.1 Le compte par numérateur

Lemme 3. *Soit $p \in M$ un numérateur qui divise ν ; c'est le cas de tout p standard, et plus généralement de tout $p \leq H$. Le nombre de dénominateurs $q \in [1, \nu]$ premiers avec p vaut exactement*

$$\nu\,\frac{\phi(p)}{p},$$

où ϕ est l'indicatrice d'Euler, définissable dans l'arithmétique.

Démonstration. Dans $\mathbb{N}$, pour tous p et n tels que p divise n, l'intervalle $[1, n]$ se découpe en n/p blocs de p entiers consécutifs. Chaque bloc parcourt une fois tous les restes modulo p, et le fait que q soit premier avec p ne dépend que du reste de q modulo p : chaque bloc contient exactement $\phi(p)$ entiers premiers avec p. L'énoncé

$$\forall p\ \forall n \quad (p \mid n \ \Rightarrow\ p \cdot |\{q \leq n : p \wedge q = 1\}| = n\,\phi(p))$$

est arithmétique et vrai dans $\mathbb{N}$; il est donc vrai dans M (lemme 1), et on l'applique à $n = \nu$. □

Le nombre de dénominateurs admissibles dépend du numérateur : il vaut ν pour $p = 1$ et $\nu - \nu/p$ pour p premier standard. Ce n'est pas le nombre ${}^*\pi(\nu) \simeq \nu/\ln\nu$ des nombres premiers de la fenêtre : être premier avec p ne signifie pas être soi-même premier.

Remarque (Sans la divisibilité de ν). Si l'on s'interdit d'utiliser la divisibilité de ν, conformément à la lecture « à une unité près » de [1], le même argument donne un compte égal à $\nu\,\phi(p)/p$ à moins de p près : seul le dernier bloc, incomplet, échappe au découpage. Pour p standard, l'erreur est standard, donc négligeable devant ν.

3.2 Le compte total

Proposition 4.

$$\#\mathbb{Q}_+^{\mathrm{irr}} = \sum_{d=1}^{\nu} \mu(d) \left\lfloor \frac{\nu}{d} \right\rfloor^2 \simeq \frac{6}{\pi^2}\,\nu^2,$$

où μ est la fonction de Möbius, définissable dans l'arithmétique.

Démonstration. On raisonne d'abord dans $\mathbb{N}$. Notons $A(n)$ le nombre de couples $(p,q) \in [1,n]^2$ premiers entre eux. Pour tout couple, la somme $\sum_{d|p\wedge q} \mu(d)$ vaut 1 si $p \wedge q = 1$, et 0 sinon. En sommant sur les couples de $[1,n]^2$ et en intervertissant les sommes, on obtient

$$A(n) = \sum_{d=1}^{n} \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor^2,$$

car il y a $\lfloor n/d \rfloor^2$ couples dont les deux termes sont multiples de d. Comme $\left|\lfloor n/d \rfloor^2 - n^2/d^2\right| \leq 2n/d$, que $|\mu(d)| \leq 1$ et que $\sum_{d\geq 1} \mu(d)/d^2 = 1/\zeta(2) = 6/\pi^2$, avec un reste après le rang n au plus égal à $1/n$, il vient

$$\left|A(n) - \frac{6}{\pi^2}\, n^2\right| \leq n + 2n \sum_{d=1}^{n} \frac{1}{d}.$$

Le second membre est négligeable devant n^2. Soient donc $a < 6/\pi^2 < b$ deux rationnels standard : il existe un entier standard N_0 tel que l'énoncé

$$\forall n \geq N_0 \qquad a\, n^2 < A(n) < b\, n^2$$

soit vrai dans $\mathbb{N}$. Cet énoncé est arithmétique, puisque A est définissable et que a et b sont des quotients d'entiers standard. Par transfert (lemme 1), il est vrai dans M ; comme $\nu \geq N_0$, on obtient $a\nu^2 < A(\nu) < b\nu^2$. Enfin $A(\nu) = \#\mathbb{Q}_+^{\mathrm{irr}}$ par définition de la numérosité. □

Exemple 5. Pour $n = 1000$, on compte $A(1000) = 608\,383$ couples premiers entre eux, pour $\frac{6}{\pi^2} \cdot 10^6 \approx 607\,927$.

4 Comparaison et grain

4.1 Les irréductibles sont les plus nombreux

Par la proposition 4 et la propriété d'additivité, on a

$$\#\mathbb{Q}_+^{\mathrm{irr}} \simeq \frac{6}{\pi^2}\,\nu^2 \approx 0{,}608\,\nu^2, \qquad \#\mathbb{Q}_+^{\mathrm{red}} = \nu^2 - \#\mathbb{Q}_+^{\mathrm{irr}} \simeq \Big(1 - \frac{6}{\pi^2}\Big)\nu^2 \approx 0{,}392\,\nu^2.$$

En prenant $a = 1/2 < 6/\pi^2$ dans la preuve, on obtient l'inégalité stricte, exacte dans M :

$$\#\mathbb{Q}_+^{\mathrm{red}} < \frac{\nu^2}{2} < \#\mathbb{Q}_+^{\mathrm{irr}}.$$

Il y a donc plus de fractions irréductibles que de fractions réductibles dans la fenêtre. Le rapport $\#\mathbb{Q}_+^{\mathrm{irr}}/\#\mathbb{Q}_+^{*}$ est infiniment proche de $6/\pi^2 = 1/\zeta(2)$: c'est la version, au grain des entiers, du théorème de Dirichlet et Cesàro sur la probabilité que deux entiers soient premiers entre eux [3].

4.2 Un grain standard

Le grain moyen des fractions irréductibles vaut

$$\frac{\nu^2}{\#\mathbb{Q}_+^{\mathrm{irr}}} \simeq \frac{\pi^2}{6} \approx 1{,}645.$$

C'est un nombre standard. De ce point de vue, $\mathbb{Q}_+^{\mathrm{irr}}$ se comporte dans $\mathbb{N}^2$ comme les nombres pairs dans $\mathbb{N}$, dont le grain vaut 2, et non comme les nombres premiers ou les carrés, dont le grain est infiniment grand. Mais, comme pour les premiers, ce grain est hétérogène : il vaut 1 dans la colonne $p = 1$ et $p/\phi(p)$ dans la colonne d'un numérateur p standard.

Partie	Fenêtre	Numérosité	Grain moyen
$\mathbb{N}$	$[1,\nu]$	ν	1
pairs	$[1,\nu]$	$\nu/2$	2
premiers	$[1,\nu]$	$\simeq \nu/\ln\nu$	$\simeq \ln\nu$
$\mathbb{Q}_+^*$	$[1,\nu]^2$	ν^2	1
$\mathbb{Q}_+^{\text{irr}}$	$[1,\nu]^2$	$\simeq \frac{6}{\pi^2}\nu^2$	$\simeq \pi^2/6$
$\mathbb{Q}_+^{\text{red}}$	$[1,\nu]^2$	$\simeq \big(1-\frac{6}{\pi^2}\big)\nu^2$	$\simeq \frac{\pi^2}{\pi^2-6}$

4.3 Fractions et valeurs

Tout rationnel strictement positif dont une écriture a ses deux termes dans la fenêtre admet une unique écriture irréductible, dont les termes sont encore dans la fenêtre. Compter les rationnels comme *valeurs*, chacun une seule fois, revient donc à compter les fractions irréductibles : la numérosité des valeurs rationnelles de la fenêtre est $\#\mathbb{Q}_+^{\text{irr}} \simeq \frac{6}{\pi^2}\nu^2$. Le passage des fractions aux valeurs ne fait perdre qu'une proportion standard des éléments, et non une proportion infiniment grande.

5 Partie partielle, partie propre

On transpose à $\mathbb{N}^2$ les notions de [1]. Le continu de référence de $\mathbb{N}^2$ est fixé par son grain : c'est le segment $[0,1]$ pris à la résolution $-\nu^2$, formé de 2^{ν^2} grains d'épaisseur $2^{-\nu^2}$, que les 2^{ν^2} parties de la fenêtre $[1,\nu]^2$ indexent bijectivement.

- *Comme partie partielle* de $\mathbb{N}^2$, l'ensemble $\mathbb{Q}_+^{\text{irr}}$ a $\#\mathbb{Q}_+^{\text{irr}} < \nu^2$ éléments dans la fenêtre. Ses parties, au nombre de $2^{\#\mathbb{Q}_+^{\text{irr}}} < 2^{\nu^2}$, ne suffisent pas à indexer les grains du continu de référence : $\mathbb{Q}_+^{\text{irr}}$ est illimité sans être infini, au grain de $\mathbb{N}^2$. Ses parties résolvent le continu à la résolution plus grossière $-\#\mathbb{Q}_+^{\text{irr}}$, soit environ $-0{,}608\,\nu^2$.
- *Comme partie propre*, renumérotée par une bijection définissable avec $\mathbb{N}^2$, par exemple une énumération des fractions irréductibles composée avec un couplage de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}_+^{\text{irr}}$ a ν^2 éléments et redevient infini, comme dans la proposition 10 de [1].

On retrouve ainsi, pour les rationnels, la thèse de [1] : ce n'est pas l'ensemble qui change, mais le grain sous lequel on le regarde.

Remarque (Choix du continu de référence). Rapportées au continu de base de $\mathbb{N}$, à la résolution $-\nu$, les parties de $\mathbb{Q}_+^{\text{irr}}$ sont bien plus nombreuses que nécessaire, puisque $2^{\#\mathbb{Q}_+^{\text{irr}}} \geq 2^{\nu}$. Le statut de $\mathbb{Q}_+^{\text{irr}}$ dépend donc du continu de référence, comme le souligne la section 6 de [1] : il est illimité non infini au grain de $\mathbb{N}^2$, et infini au grain de $\mathbb{N}$.

6 Rationnels et irrationnels : densité et rareté

On compare maintenant les rationnels de la fenêtre aux grains du continu de base de [1], le segment $[0,1]$ pris à la résolution $-\nu$, formé des 2^{ν} grains $\big[k2^{-\nu},(k+1)2^{-\nu}\big]$, $0 \leq k < 2^{\nu}$.

6.1 Les rationnels de la fenêtre dans $[0,1]$

Définition 6 (Suite de Farey de la fenêtre)**.** Pour un entier n, on note $\mathcal{F}_n$ l'ensemble des rationnels $p/q \in [0,1]$, avec $0 \leq p \leq q \leq n$ et $p \wedge q = 1$, rangés par ordre croissant : c'est la suite de Farey d'ordre n. Elle est définissable dans l'arithmétique, chaque rationnel étant représenté par le couple (p,q). Les *rationnels de la fenêtre dans* $[0,1]$ forment ${}^*\mathcal{F}_\nu$.

Lemme 7.

$$\big|{}^*\mathcal{F}_\nu\big| = 1 + \frac{\#\mathbb{Q}_+^{\text{irr}}+1}{2} \simeq \frac{3}{\pi^2}\,\nu^2.$$

Démonstration. Dans $\mathbb{N}$, l'ensemble des couples $(p,q) \in [1,n]^2$ premiers entre eux est symétrique, et le seul couple diagonal est $(1,1)$. Il y a donc $(A(n)+1)/2$ couples avec $p \leq q$, auxquels s'ajoute la fraction $0/1$. L'énoncé $|\mathcal{F}_n| = 1 + (A(n)+1)/2$ est arithmétique ; on le transfère en $n = \nu$, et la proposition 4 donne l'équivalent. □

6.2 La densité, à l'échelle standard

Lemme 8 (Farey)**.** *Pour tout $n \geq 2$, si $a/b < c/d$ sont deux éléments consécutifs de $\mathcal{F}_n$, alors $bc - ad = 1$ et $b + d > n$. En conséquence,*

$$\frac{1}{n(n-1)} \;\leq\; \frac{c}{d} - \frac{a}{b} \;=\; \frac{1}{bd} \;\leq\; \frac{1}{n}.$$

Démonstration. Les deux premières propriétés sont classiques [3, chap. III]. Comme $b+d \geq n+1$ et $b, d \geq 1$, on a $bd \geq n$. Comme $b, d \leq n$ et $b \neq d$ (sinon $b(c-a) = 1$, donc $b = d = 1$, ce qui n'arrive que pour $n = 1$), on a $bd \leq n(n-1)$. L'énoncé est arithmétique : il vaut dans M pour $n = \nu$ (lemme 1). □

Proposition 9 (Densité)**.** *Tout intervalle de $[0,1]$ de longueur au moins $1/\nu$ contient un rationnel de la fenêtre. En particulier, tout intervalle de longueur standard en contient un, et même tout intervalle de longueur infinitésimale au moins $1/\nu$.*

Démonstration. Deux rationnels consécutifs de ${}^*\mathcal{F}_\nu$ sont distants d'au plus $1/\nu$ (lemme 8), et $0, 1$ appartiennent à ${}^*\mathcal{F}_\nu$. □

À l'échelle standard, on retrouve ainsi la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$: tout réel standard est infiniment proche d'un rationnel de la fenêtre, à moins de $1/\nu$.

6.3 La rareté, au grain du continu

Définition 10 (Grain rationnel, grain irrationnel)**.** Un grain $\left[k2^{-\nu}, (k+1)2^{-\nu}\right]$ du continu de base est *rationnel* s'il contient un rationnel de la fenêtre, et *irrationnel* sinon.

La condition « p/q appartient au grain d'indice k » s'écrit $kq \leq p\,2^\nu \leq (k+1)q$: elle est arithmétique, et les grains rationnels se comptent dans M.

Proposition 11 (Rareté)**.**

1. *Le nombre de grains rationnels est au plus $2\,|{}^*\mathcal{F}_\nu| \leq 2\nu^2$.*
2. *La proportion de grains rationnels, au plus $2\nu^2/2^\nu$, est infinitésimale : les grains irrationnels sont infiniment plus nombreux que les grains rationnels.*
3. *Entre deux rationnels consécutifs de la fenêtre se trouvent au moins $2^\nu/\nu^2 - 2$ grains irrationnels : un nombre illimité.*

Démonstration. (1) Un rationnel appartient à au plus deux grains, lorsqu'il tombe sur leur frontière commune. Et $|\mathcal{F}_n| \leq 1 + n(n+1)/2 \leq n^2$ pour $n \geq 2$.

(2) Pour tout entier standard m, l'énoncé $\forall n \geq N_m \;\; 2m\,n^2 < 2^n$ est vrai dans $\mathbb{N}$ pour un N_m standard convenable ; par transfert, $2\nu^2/2^\nu < 1/m$.

(3) Deux rationnels consécutifs sont distants d'au moins $1/(\nu(\nu-1)) > 1/\nu^2$ (lemme 8). Un intervalle de cette longueur contient au moins $2^\nu/\nu^2 - 2$ grains entiers, qui ne contiennent aucun rationnel de la fenêtre. Ce nombre n'est pas standard, par le même argument qu'en (2). □

Remarque (Ce qui décide). La constante $3/\pi^2$ ne joue aucun rôle dans la proposition 11 : seul compte l'ordre de grandeur ν^2 des rationnels de la fenêtre, face aux 2^ν grains du continu de base. La même conclusion vaut en comptant toutes les fractions, réductibles comprises.

6.4 Une densité relative au grain

Les propositions 9 et 11 ne se contredisent pas : elles portent sur deux grains d'observation.

Résolution	Épaisseur du grain	Les rationnels de la fenêtre
standard	standard	denses
$-\lfloor \log_2 \nu \rfloor$	$\geq 1/\nu$	présents dans chaque grain
$-\nu$	$2^{-\nu}$	dans une proportion infinitésimale des grains

À la résolution $-\lfloor \log_2 \nu \rfloor$, chaque grain a une épaisseur au moins $1/\nu$ et contient donc un rationnel de la fenêtre (proposition 9). À la résolution $-\nu$, presque tous les grains sont irrationnels (proposition 11). La densité, comme l'infini dans [1], n'est pas une propriété de l'ensemble, mais du grain sous lequel on le regarde.

Remarque (Mesure nulle). La longueur totale des grains rationnels est au plus $2\nu^2 \cdot 2^{-\nu}$, infinitésimale : sa partie standard est 0. C'est la version, au grain du continu, de l'énoncé classique selon lequel $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ mais de mesure de Lebesgue nulle. Le cadre en donne en outre l'ordre de grandeur, ν^2 contre 2^ν, là où Cantor oppose le dénombrable au non dénombrable.

Remarque (Rationnels au grain de la fenêtre). Dans M, chaque extrémité de grain $k/2^\nu$ est elle-même une fraction. Si l'on appelait rationnelles toutes les fractions de M, tous les grains seraient rationnels. La distinction entre grains rationnels et irrationnels est donc relative à la hauteur des fractions : on ne retient que les dénominateurs de la fenêtre, $q \leq \nu$, conformément à la définition de la numérosité.

Références

[1] H. Genvrin, *Partie propre et partie partielle chez les entiers*, 2026.

[2] H. Genvrin, *Théorie du grain*, 2026.

[3] G. H. Hardy, E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford University Press, 6e éd., 2008.

[4] R. Kaye, *Models of Peano Arithmetic*, Oxford University Press, 1991.

[5] Th. Skolem, « Über die Nicht-charakterisierbarkeit der Zahlenreihe mittels endlich oder abzählbar unendlich vieler Aussagen mit ausschliesslich Zahlenvariablen », *Fundamenta Mathematicae* 23, 1934.