Partie propre et partie partielle chez les entiers

Hugues Genvrin

Novembre 2026

Résumé

On quitte le cadre cantorien, où une partie infinie de $\mathbb{N}$ a autant d'éléments que $\mathbb{N}$ lui-même, pour un cadre non idempotent, où le tout reste plus grand que la partie. On y mesure les parties de $\mathbb{N}$ par leur numérosité, au grain d'individuation des entiers. Une même partie de $\mathbb{N}$ peut alors être regardée de deux façons : comme *partie partielle*, incluse dans les entiers au grain de base, ou comme *partie propre*, renumérotée comme un tout. En reprenant la définition de l'infini par l'indexation du continu, on montre que $\mathbb{N}$ est le plus petit ensemble infini, et que toute partie partielle non finie de $\mathbb{N}$, autre que $\mathbb{N}$, n'est qu'*illimitée* sans être infinie : l'ensemble de ses parties ne suffit pas à indexer les grains du continu de base. L'illimité est la propriété générale des parties non finies, et il admet des degrés ; l'infini en est le cas particulier, un seuil. La même partie, considérée comme partie propre, redevient infinie. La différence entre les deux regards est une différence de grain. Le cadre est un modèle non standard de l'arithmétique de Peano, au sens de Skolem : il ne fait appel ni à la théorie des ensembles de Cantor, ni à l'axiome du choix.

1 Introduction

Chez Cantor, l'ensemble des nombres pairs et l'ensemble des entiers ont le même cardinal, puisque $n \mapsto 2n$ est une bijection de l'un sur l'autre. L'arithmétique des cardinaux infinis est idempotente : $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$. Le prix de cette convention est l'abandon de la cinquième notion commune d'Euclide, « le tout est plus grand que la partie ».

Nous adoptons ici le point de vue inverse. On travaille avec une *numérosité* des entiers, notée $\nu = \#\mathbb{N}$, dont l'arithmétique n'est pas idempotente :

$$\nu + \nu \neq \nu, \qquad \nu - 1 < \nu.$$

Ce point de vue a été rendu rigoureux par la théorie des numérosités de Benci et Di Nasso [1]. Nous en utilisons une version élémentaire, décrite à la section 3, où la numérosité d'une partie de $\mathbb{N}$ est le nombre de ses éléments dans une fenêtre infinie $[1, \nu]$, c'est-à-dire au grain d'individuation des entiers.

Pour disposer d'un entier infini ν, nous ne quittons pas l'arithmétique de Peano [9] : nous nous plaçons dans un modèle non standard de l'arithmétique, dont Skolem a montré l'existence [10]. Les entiers y obéissent aux mêmes lois que les entiers usuels, mais certains d'entre eux sont plus grands que tous les entiers usuels. La non-idempotence n'y est pas une hypothèse, mais un théorème de Peano.

Nous partons de la définition de l'infini par l'indexation du continu [4], et de la distinction, introduite dans la théorie du grain [6], entre partie partielle et partie propre. Nous montrons que cette distinction sépare deux régimes : l'*illimité*, propriété générale des parties non finies, et l'*infini*, qui en est le cas particulier où les parties indexent le continu. Tout ensemble infini est illimité ; la réciproque est fausse.

2 Rappels

Définition 1 (Infini, définition de base)**.** Un ensemble E est *infini* si l'ensemble de ses parties $\mathcal{P}(E)$ permet d'indexer tous les points d'un continu.

Dans le cadre cantorien, toute partie infinie de $\mathbb{N}$ vérifie cette définition, puisque l'ensemble de ses parties est en bijection avec $[0, 1]$. Nous allons voir qu'il n'en est plus de même lorsqu'on fixe le grain d'observation.

Avertissement. Dans l'usage courant, une *partie propre* de E est une partie strictement incluse dans E. Nous employons ici l'expression dans un sens différent, issu de la théorie du grain. Une partie $F \subset E$ est dite :

— *partielle* lorsqu'on la considère comme incluse dans E, au grain de base de E ;

— *propre* lorsqu'on la considère comme un tout, renuméroté par une bijection avec E.

Une même partie peut donc être regardée comme partielle ou comme propre : ce n'est pas une propriété de l'ensemble, mais du regard porté sur lui.

3 Le cadre : un modèle non standard de Peano

3.1 Les entiers de Peano et leurs modèles non standard

Dans toute la suite, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ désigne les entiers de Peano [9], munis de l'addition, de la multiplication et de l'ordre. Les axiomes de Peano du premier ordre décrivent le successeur, l'addition, la multiplication et le schéma de récurrence, appliqué à toutes les propriétés exprimables par une formule de l'arithmétique.

Skolem a montré en 1934 [10] qu'il existe des structures $\mathcal{M}$ qui satisfont exactement les mêmes énoncés arithmétiques que $\mathbb{N}$, mais qui contiennent des éléments plus grands que tous les entiers usuels. On fixe un tel modèle $\mathcal{M}$; il contient $\mathbb{N}$ comme segment initial [8]. Les éléments de $\mathbb{N}$ sont dits *standard*, les autres *infinis*.

Lemme 2 (Transfert)**.** *Tout énoncé de l'arithmétique vrai dans $\mathbb{N}$ est vrai dans $\mathcal{M}$, et réciproquement. Cela vaut aussi pour les énoncés qui mentionnent des entiers standard particuliers, puisque chacun s'écrit $1 + 1 + \cdots + 1$.*

C'est la définition même de $\mathcal{M}$. Ce lemme joue ici le rôle que joue le principe de transfert chez Robinson, mais il ne porte que sur l'arithmétique.

Lemme 3 (Non-idempotence)**.** *Dans $\mathcal{M}$, pour tout $x \neq 0$, on a $x + x \neq x$ et $x - 1 < x$.*

Démonstration. C'est déjà un théorème de Peano : si $x+x = x$, la simplification donne $x = 0$; et $x = (x - 1) + 1 > x - 1$. Ces énoncés sont vrais dans $\mathbb{N}$, donc dans $\mathcal{M}$ par transfert. □

On fixe un entier infini $\nu \in \mathcal{M}$, divisible par tout entier standard : par exemple $\nu = H!$, avec H infini. La factorielle est définissable dans Peano, et $H!$ est divisible par tout $k \leq H$, donc par tout entier standard.

3.2 Parties définissables et numérosité

On appelle *partie définissable* de $\mathbb{N}$ une partie $F = \{n \in \mathbb{N} : \varphi(n)\}$, où φ est une formule de l'arithmétique. Les nombres pairs ($\exists k\ n = 2k$), les carrés ($\exists k\ n = k \cdot k$) et les nombres premiers sont définissables. On note ${}^*F = \{x \in \mathcal{M} : \mathcal{M} \models \varphi(x)\}$ l'ensemble que la même formule définit dans $\mathcal{M}$; par transfert, ${}^*F \cap \mathbb{N} = F$. *Dans toute la suite, les parties de $\mathbb{N}$ considérées sont définissables.*

Définition 4 (Numérosité)**.** La *fenêtre* est l'intervalle $[1, \nu]$ de $\mathcal{M}$. On appelle *numérosité* de F le nombre, calculé dans $\mathcal{M}$, d'éléments de ${}^*F$ dans la fenêtre :

$$\#F = |{}^*F \cap [1, \nu]| \,.$$

Le *grain moyen* de F est $\nu/\#F$: c'est l'épaisseur moyenne qu'il faut donner à chaque élément de F pour paver la fenêtre, selon la relation fondamentale $L = |L| \cdot \varepsilon$ de la théorie du grain.

Le nombre d'éléments de F inférieurs à n est une fonction définissable de n ; sa valeur en ν est $\#F$. Le comptage a donc lieu dans $\mathcal{M}$, avec les seules ressources de l'arithmétique.

Parties d'une partie de la fenêtre. Dans l'arithmétique, une partie de $[1, n]$ se représente par un nombre inférieur à 2^n, son écriture binaire : le k-ième chiffre vaut 1 si et seulement si k appartient à la partie. Les parties d'un ensemble de m éléments de la fenêtre sont ainsi représentées par 2^m nombres de $\mathcal{M}$. Dans la suite, « l'ensemble des parties » d'une partie de la fenêtre s'entend en ce sens.

Cette numérosité possède les propriétés attendues :

(N1) $\#\mathbb{N} = \nu$;

(N2) si F est fini, $\#F$ est son nombre d'éléments usuel ;

(N3) si F et G sont disjoints, $\#(F \cup G) = \#F + \#G$;

(N4) si $F \subsetneq \mathbb{N}$, alors $\#F < \nu$.

Pour (N4) : il existe un entier standard $m \notin F$, c'est-à-dire tel que $\varphi(m)$ soit faux dans $\mathbb{N}$; par transfert, $\varphi(m)$ est faux dans $\mathcal{M}$. Comme $m \leq \nu$, l'élément m manque à ${}^*F \cap [1, \nu]$, donc $\#F \leq \nu - 1 < \nu$ (lemme 3).

La propriété (N4) est la cinquième notion commune d'Euclide : le tout est plus grand que la partie. Elle est incompatible avec l'idempotence : par exemple, $\#\{\text{pairs}\} = \nu/2 < \nu$, puisque ν est pair.

4 Partie partielle, partie propre

4.1 Les nombres pairs

Les nombres pairs font partie d'un tout, l'ensemble des entiers : ils en sont une partie partielle. Dans la fenêtre $[1, \nu]$, il y en a $\nu/2$, et leur grain moyen vaut 2.

Mais on peut aussi les renuméroter par la bijection $n \mapsto 2n$, et les considérer comme un tout : ils forment alors une partie propre. Les ν premiers nombres pairs, $2, 4, \ldots, 2\nu$, occupent la fenêtre $[1, 2\nu]$, et le grain reste égal à 2. La figure 1 représente les deux regards.

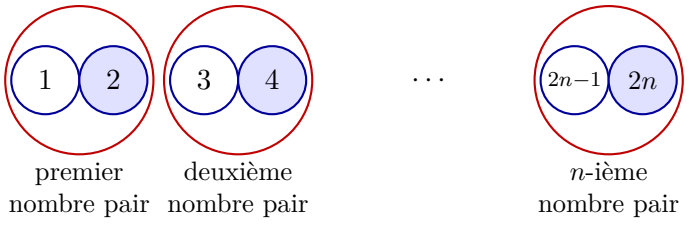


FIGURE 1 – Les nombres pairs. Disques bleu clair : les pairs comme partie partielle des entiers, au grain de base. Cercles rouges : les pairs comme partie propre, renumérotés ; chaque grain rouge englobe deux grains de base.

La différence de régime est portée par un niveau d'observation distinct du grain des entiers, mais homogène : tous les grains rouges ont la même épaisseur, le double du grain de base.

4.2 Carrés et nombres premiers

Les carrés et les nombres premiers peuvent eux aussi être regardés comme parties partielles ou comme parties propres. Mais leurs grains sont *hétérogènes* : l'écart entre deux éléments consécutifs varie, et leur grain moyen est plus épais que celui des pairs.

— Il y a $\lfloor\sqrt{\nu}\rfloor$ carrés dans la fenêtre ; leur grain moyen est de l'ordre de $\sqrt{\nu}$, infiniment grand.

— Il y a ${}^*\pi(\nu)$ nombres premiers dans la fenêtre. Le théorème des nombres premiers s'exprime par un énoncé de l'arithmétique, en remplaçant le logarithme par des approximations rationnelles ; par transfert (lemme 2), ${}^*\pi(\nu)\,\ln\nu/\nu$ est infiniment proche de 1 ; leur grain moyen est de l'ordre de $\ln\nu$, infiniment grand lui aussi.

4.3 Cas général

Plus généralement, soit F une partie définissable et infinie de $\mathbb{N}$ (au sens usuel), et $f : \mathbb{N} \to F$ son énumération croissante : $f(n)$ est le n-ième élément de F. La fonction f est définissable, et l'on note ${}^*f$ la fonction que la même formule définit dans $\mathcal{M}$.

Définition 5. On distingue deux façons de regarder F :

— F *considérée comme partie partielle* est l'ensemble ${}^*F \cap [1, \nu]$, de numérosité $\#F$.

— F *considérée comme partie propre* est l'ensemble ${}^*f([1, \nu])$ de ses ν premiers éléments, renumérotés par f. Il a ν éléments et occupe la fenêtre $[1, {}^*f(\nu)]$.

La figure 2 illustre le passage d'un regard à l'autre : comme partie propre, F est indexée par autant d'éléments que $\mathbb{N}$, au prix d'un niveau d'observation moyen plus épais.

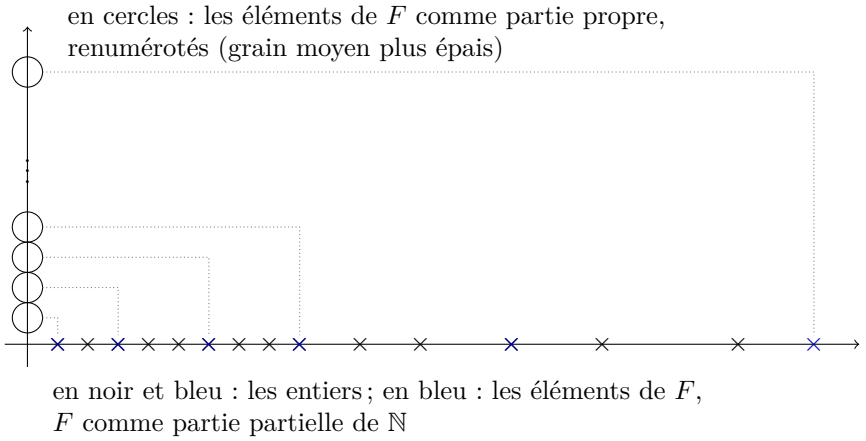


FIGURE 2 – Une partie $F \subset \mathbb{N}$, comme partie partielle (sur l'axe horizontal, parmi les entiers) et comme partie propre (sur l'axe vertical, renumérotée).

5 Fini, illimité, infini

Pour que la définition 1 distingue les deux regards, il faut fixer le continu de référence au grain des entiers.

Définition 6 (Continu de base)**.** On appelle *continu de base* le segment $[0, 1]$ pris à la résolution $-\nu$: il est formé des 2^ν grains $[k2^{-\nu}, (k+1)2^{-\nu}]$, pour $0 \leq k < 2^\nu$, d'épaisseur $2^{-\nu}$.

Définition 7 (Fini, illimité, infini)**.** Une partie définissable F de $\mathbb{N}$, considérée comme partie partielle, est :

— *finie* si $\#F$ est un entier standard ;

— *illimitée* si elle n'est pas finie ;

— *infinie* si elle est illimitée et que l'ensemble de ses parties permet d'indexer les grains du continu de base, c'est-à-dire si $2^{\#F} \geq 2^{\nu}$.

Les trois notions ne forment pas une partition, mais une inclusion :

$$\text{infini} \implies \text{illimité}, \qquad \text{illimité} \not\Longrightarrow \text{infini}.$$

L'illimité est la propriété générale ; l'infini en est un cas particulier. On obtient ainsi trois régimes disjoints : le *fini*, l'*illimité non infini* et l'*infini*.

Les parties de ${}^*F \cap [1, \nu]$ sont représentées par $2^{\#F}$ nombres de $\mathcal{M}$: la condition $2^{\#F} \geq 2^{\nu}$ exprime qu'il existe une surjection de cet ensemble sur les grains du continu de base.

Proposition 8. *Soit $F \subset \mathbb{N}$ une partie définissable, considérée comme partie partielle. Alors :*

(i) F est infinie si et seulement si $F = \mathbb{N}$;

(ii) F est finie si et seulement si F est finie au sens usuel ;

(iii) toute partie de $\mathbb{N}$, infinie au sens usuel et distincte de $\mathbb{N}$, est illimitée sans être infinie.

En particulier, $\mathbb{N}$ est le plus petit ensemble infini.

Démonstration. (i) On a $\#\mathbb{N} = \nu$, donc les parties de la fenêtre sont représentées par exactement 2^{ν} nombres, et elles indexent bijectivement les grains du continu de base. Si $F \subsetneq \mathbb{N}$, la propriété (N4) donne $\#F < \nu$, donc $2^{\#F} < 2^{\nu}$: les parties de F sont trop peu nombreuses pour indexer les grains du continu de base, même de façon surjective.

(ii) Si F est fini, de plus grand élément k, l'énoncé « tout élément de F est au plus k » est vrai dans $\mathbb{N}$, donc dans $\mathcal{M}$; ainsi ${}^*F = F$, et $\#F$ est son nombre d'éléments. Si F est infini au sens usuel, il contient au moins n éléments inférieurs à ν pour tout entier standard n, car ν est infiniment grand ; $\#F$ n'est donc pas standard.

(iii) découle de (i) et (ii). □

Exemple 9. Comme parties partielles de $\mathbb{N}$, dans la fenêtre $[1, \nu]$:

Partie	Numérosité	Grain moyen	Nombre de parties	Statut
entiers	ν	1	2^{ν}	infini (donc illimité)
pairs	$\nu/2$	2	$2^{\nu/2}$	illimité non infini
premiers	$\simeq \nu/\ln \nu$	$\simeq \ln \nu$	$2^{{}^*\pi(\nu)}$	illimité non infini
carrés	$\lfloor\sqrt{\nu}\rfloor$	$\simeq \sqrt{\nu}$	$2^{\lfloor\sqrt{\nu}\rfloor}$	illimité non infini

Le symbole $\simeq$ signifie ici que le rapport des deux membres est infiniment proche de 1, c'est-à-dire qu'il diffère de 1 de moins que $1/n$ pour tout entier standard n. Les quantités $\sqrt{\nu}$ et $\ln \nu$ s'entendent par leurs parties entières, définissables dans l'arithmétique.

Proposition 10. *Toute partie définissable et infinie de $\mathbb{N}$ (au sens usuel), considérée comme partie propre, est infinie.*

Démonstration. Considérée comme partie propre, F est l'ensemble ${}^*f([1, \nu])$, qui a ν éléments puisque ${}^*f$ est injective, par transfert de l'injectivité de f. Ses parties sont représentées par 2^{ν} nombres, qui indexent bijectivement les grains du continu de base. □

Les propositions 8 et 10 résument la thèse de cet article : *une même partie de* $\mathbb{N}$ *est illimitée sans être infinie comme partie partielle, et infinie comme partie propre.* Ce n'est pas l'ensemble qui change, mais le grain sous lequel on le regarde.

Remarque (Une définition stricte). La définition 7 est stricte : $\mathbb{N}\setminus\{1\}$, de numérosité $\nu-1$, est illimitée et non infinie. Retirer un seul élément suffit à perdre l'infinité. C'est la contrepartie du principe d'Euclide, que l'arithmétique non idempotente rétablit : la partie est strictement plus petite que le tout, même lorsqu'il ne lui manque qu'un élément.

Remarque (Illimité et infini). La distinction entre *illimité* et *infini* rappelle celle que fait Riemann, dans sa leçon d'habilitation de 1854 [7], entre l'illimitation (*Unbegrenztheit*) et l'infinité (*Unendlichkeit*), même si elle porte chez lui sur l'étendue de l'espace. Ici, une partie illimitée non infinie n'a pas de borne, mais ses parties ne suffisent pas à résoudre le continu au grain des entiers.

Remarque (L'illimité est gradué, l'infini est un seuil). Les deux notions n'ont pas la même nature. L'infini est une propriété absolue : indexer le continu de base ; une partie l'a ou ne l'a pas. L'illimité, lui, admet des degrés, mesurés par la numérosité : les premiers ($\simeq \nu/\ln\nu$) sont moins illimités que les pairs ($\nu/2$), eux-mêmes moins illimités que $\mathbb{N}$ (ν). De même, la grille $\mathbb{G}_{2\nu}$, à $2^{2\nu}$ points, est plus illimitée que $\mathbb{G}_\nu$, à 2^ν points, sans être plus infinie : toutes deux indexent le continu.

Remarque (Les opérations permises sur ν). Si l'on part du continu donné, plutôt que d'une construction dyadique qui convergerait vers lui, $\nu = \#\mathbb{N}$ est un nombre illimité, dont on n'utilise que l'*ordre* et les *changements de niveau* : comparer ($\nu-1<\nu<2\nu$), multiplier par une puissance de 2 ($2^\nu\cdot 2^\nu = 2^{2\nu}$). On n'utilise pas sa divisibilité ni sa parité, qui traiteraient 2^ν comme un entier achevé. Les propositions 8 et 10 n'utilisent que l'ordre. Les valeurs exactes du tableau de l'exemple 9, comme $\nu/2$ ou $\lfloor\sqrt{\nu}\rfloor$, s'entendent dans cette lecture à une unité près : seuls comptent leurs ordres de grandeur.

6 Niveau d'observation et résolution

6.1 La partie partielle résout un continu plus grossier

Le choix du continu de base est essentiel. Les parties des nombres pairs, au nombre de $2^{\nu/2}$, indexent les grains du segment $[0,1]$ pris à la résolution $-\nu/2$, d'épaisseur $2^{-\nu/2}$. Cette épaisseur est encore infinitésimale, c'est-à-dire inférieure à $1/n$ pour tout entier standard n : tout point du continu de base est à distance infinitésimale d'un point de ce continu plus grossier. À l'échelle standard, les deux continus ne se distinguent pas.

Le statut d'illimité non infini n'est donc pas absolu : il est relatif au grain des entiers. Une partie illimitée non infinie résout le continu, mais avec un grain plus épais que celui que fixe $\mathbb{N}$. C'est la relation $L = |L|\cdot\varepsilon$ appliquée à la fenêtre :

$$\nu = \frac{\nu}{2}\cdot 2 \quad \text{(pairs)}, \qquad \nu \simeq \frac{\nu}{\ln\nu}\cdot\ln\nu \quad \text{(premiers)}.$$

6.2 La partie propre et sa fenêtre

Considérés comme partie propre, les nombres pairs sont énumérés avec un grain double du grain de base : leurs ν premiers éléments occupent la fenêtre $[1,2\nu]$, qui contient 2ν entiers au grain de base.

Il faut distinguer deux résolutions :

— les *entiers* de la fenêtre $[1,2\nu]$ ont $2^{2\nu}$ parties ; ils permettent d'écrire les réels avec 2ν chiffres binaires après la virgule, au lieu de ν, soit la résolution plus fine -2ν ;

— les *nombres pairs* de cette fenêtre n'ont que 2^ν parties ; ils donnent ν chiffres binaires, soit la résolution de base $-\nu$.

L'agrandissement de la fenêtre affine donc la résolution : à un ordre lexical plus fin, celui de 2ν chiffres, correspond un ordre géométrique plus fin des points. Mais cet affinement est porté par les entiers de la fenêtre agrandie, non par les pairs eux-mêmes, qui, rapportés à la longueur qu'ils occupent, gardent un grain double.

Conclusion

En quittant l'idempotence cantorienne, on retrouve le principe d'Euclide : toute partie stricte de $\mathbb{N}$ a une numérosité strictement inférieure à celle de $\mathbb{N}$. Couplé à la définition de l'infini par l'indexation du continu, ce principe sépare trois régimes : le fini, l'illimité non infini et l'infini ; l'infini est un cas particulier de l'illimité, et l'illimité admet des degrés, mesurés par la numérosité. Les entiers sont le plus petit ensemble infini ; les nombres pairs, les carrés et les nombres premiers, regardés comme parties partielles, sont illimités sans être infinis, car leurs parties ne suffisent pas à résoudre le continu au grain des entiers. Regardés comme parties propres, renumérotés comme des touts, ils redeviennent infinis. Le passage de l'un à l'autre n'est pas un changement d'ensemble, mais un changement de grain.

Références

[1] V. Benci, M. Di Nasso, « Numerosities of labelled sets : a new way of counting », *Advances in Mathematics* 173, 2003.

[2] G. Cantor, « Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre », *Mathematische Annalen* 46, 1895.

[3] Euclide, *Éléments*, livre I, notions communes.

[4] H. Genvrin, *Ensemble infini, continu et premiers*, 2026.

[5] H. Genvrin, *Que le point absolu est un grain*, 2026.

[6] H. Genvrin, *Théorie du grain*, 2026.

[7] B. Riemann, « Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen », leçon d'habilitation, Göttingen, 1854.

[8] R. Kaye, *Models of Peano Arithmetic*, Oxford University Press, 1991.

[9] G. Peano, *Arithmetices principia, nova methodo exposita*, Turin, 1889.

[10] Th. Skolem, « Über die Nicht-charakterisierbarkeit der Zahlenreihe mittels endlich oder abzählbar unendlich vieler Aussagen mit ausschliesslich Zahlenvariablen », *Fundamenta Mathematicae* 23, 1934.