

Les nombres réels comme objets stratifiés

Une construction pragmatique

Hugues Genyvin

19 juin 2026

Préambule

Ce document propose une *construction pragmatique* des nombres réels dans le cadre du programme du grain. Cette construction est complémentaire à la construction algébrique de $\mathbb{R}$ comme corps déjà établie, et compatible avec les constructions classiques (coupures de Dedekind, suites de Cauchy).

Statut. La construction pragmatique stratale est un *objet nouveau*, qui n'a pas d'analogue direct dans les constructions classiques. Elle s'appuie sur la *relativité du statut des réels* : un nombre réel n'a pas de propriétés absolues, mais des propriétés *relatives au niveau de résolution* où on l'observe.

Nature de la construction. La construction est :

- *Effective* : elle produit explicitement les objets, par un mécanisme géométrique de stratification.
- *Opérationnelle* : elle définit les réels par les opérations qu'on peut effectuer sur eux à chaque niveau de résolution.

Méthode d'étalonnage. On étalonne d'abord la construction sur le cercle unité (de circonférence 1), puis on l'étend au diamètre, et enfin à tout objet stratifiable.

Référence implicite. Programme du grain (Volumes I-III), et les notes sur la stratification fonctionnelle, la rectification stratale, et la métrique stratale.

1 Position du problème

1.1 Quatre constructions des réels

Le programme du grain admet désormais trois constructions des nombres réels, complémentaires et compatibles :

- **Construction algébrique.** $\mathbb{R}$ est construit comme corps, par les structures algébriques classiques. C'est la construction la plus abstraite et la plus universelle.
- **Constructions classiques (Dedekind, Cauchy).** Coupures de $\mathbb{Q}$ ou classes d'équivalence de suites convergentes. Constructions par complétion topologique.
- **Construction non-standard.** développée en application du programme du grain.
- **Construction pragmatique stratale.** Nouvelle approche propre au programme du grain : les réels comme objets stratifiés dont les propriétés dépendent du niveau de résolution.

1.2 Pourquoi une construction pragmatique

Remarque 1 (Motivation). *Les constructions classiques produisent les réels comme objets absolus, indépendants de toute représentation. La construction algébrique en fait des éléments d'une structure abstraite (corps).*

La construction pragmatique adopte une perspective différente : elle reconnaît qu'un réel est toujours observé à un niveau de résolution donné, et que ses propriétés (mesure, extension, cardinalité) sont relatives à ce niveau.

Cette perspective permet de répondre à des objections épistémologiques sur le statut des réels : un grain ponctuel de mesure nulle au niveau supérieur n'est pas un objet « sans substance », il devient un grain étendu de mesure non nulle au niveau inférieur. La « disparition » apparente est un effet de la représentation, pas une propriété intrinsèque de l'objet.

1.3 Statut épistémologique

Remarque 2 (Objet nouveau, compatible avec les approches classiques). *La construction pragmatique stratale est un objet nouveau : elle n'identifie pas un réel à une coupure de $\mathbb{Q}$ ni à une classe de suites convergentes, mais à une famille de représentations stratales aux différents niveaux de résolution.*

Cependant, elle est compatible avec les constructions classiques :

- *L'opération de partie standard (cf. note sur la partie standard) relie la famille stratale d'un réel à sa coupure canonique de Dedekind.*
- *Les suites de Cauchy classiques correspondent aux suites stratales d'un réel : chaque représentant au niveau k est un terme de la suite.*

Aucune des constructions classiques n'est invalidée. La construction pragmatique les enrichit en y ajoutant la dimension stratale.

2 Étalonnage sur le cercle unité

2.1 Choix de l'étalon

Définition 1 (Cercle unité de référence). *On choisit comme étalon initial le cercle unité C_1 de circonférence 1 (et donc de rayon $1/(2\pi)$).*

Ce choix particulier (circonférence 1 plutôt que 2π) simplifie l'écriture des mesures stratales et permet d'établir une correspondance directe avec le système décimal stratal.

Remarque 3 (Pourquoi la circonférence unitaire). *Avec une circonférence de 1, la stratification du cercle à résolution $-kn_\infty$ donne 2^{kn_∞} grains d'épaisseur élémentaire $1/2^{kn_\infty}$. Le développement « décimal » (en base 2) de la mesure d'un grain admet alors une lecture directe : sa position ℓ est codée par les chiffres après la virgule, sans facteur multiplicatif parasite. Au niveau de résolution $-kn_\infty$, on trouve $-kn_\infty$ chiffre après la virgule.*

2.2 Stratification à résolution $-n_\infty$

Proposition 1 (Mosaïque à résolution $-n_\infty$). *À résolution $-n_\infty$, le cercle unité C_1 se factorise comme :*

$$C_1 = \left(1, 2^{n_\infty}, \frac{1}{2^{n_\infty}}\right).$$

La mosaïque $\mathcal{B}_{-n_\infty} \simeq \mathcal{G}_{-n_\infty}$ comporte 2^{n_∞} grains $b_{k,-n_\infty}$ ($k = 1, \dots, 2^{n_\infty}$), chacun de mesure $1/2^{n_\infty}$.

À ce niveau de résolution, chaque grain $b_{k,-n_\infty}$ apparaît comme un point ponctuel : sa mesure $1/2^{n_\infty}$ est un infinitésimal de niveau n_∞ , qui se présente comme une mesure « nulle » au sens des observations à résolution standard.

2.3 Stratification à résolution $-2n_\infty$

Proposition 2 (Mosaïque à résolution $-2n_\infty$). À résolution $-2n_\infty$, le même cercle C_1 se factorise comme :

$$C_1 = \left(1, 2^{2n_\infty}, \frac{1}{2^{2n_\infty}}\right).$$

La mosaïque $\mathcal{B}_{-2n_\infty} \simeq \mathcal{G}_{-2n_\infty}$ comporte 2^{2n_∞} sous-grains de mesure $1/2^{2n_\infty}$.

Chaque grain $b_{k,-n_\infty}$ de la mosaïque grossière contient exactement 2^{n_∞} sous-grains de la mosaïque fine :

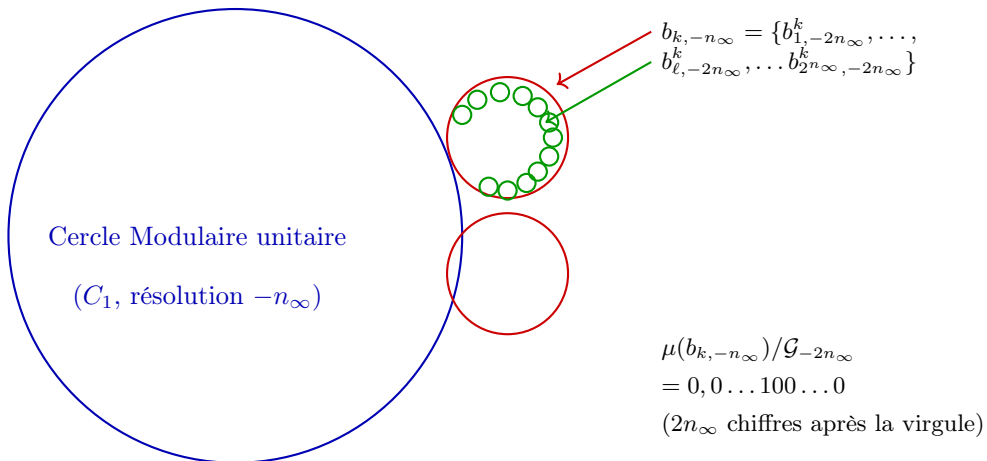
$$b_{k,-n_\infty} = \{b_{1,-2n_\infty}^k, \dots, b_{\ell,-2n_\infty}^k, \dots, b_{2^{n_\infty},-2n_\infty}^k\}.$$

À ce niveau de résolution, le grain $b_{k,-n_\infty}$ apparaît comme un objet étendu : sa mesure $\mu(b_{k,-n_\infty})$ vaut $2^{n_\infty}/2^{2n_\infty} = 1/2^{n_\infty}$, qui est non nulle au niveau $-2n_\infty$.

3 Le mécanisme central : passage de mesure nulle à mesure non nulle

3.1 Représentation graphique

La figure suivante illustre le mécanisme de promotion stratale. Le grand cercle (Cercle Modulaire) représente le cercle unité à résolution $-n_\infty$. Les deux petits cercles rouges (zoom) représentent un grain particulier $b_{k,-n_\infty}$ vu à résolution $-2n_\infty$, contenant ses 2^{n_∞} sous-grains.



3.2 Le développement décimal stratal

Proposition 3 (Expression décimale de la mesure stratale). La mesure du grain $b_{k,-n_\infty}$ exprimée dans le système de résolution $\mathcal{G}_{-2n_\infty}$ admet le développement décimal binaire :

$$\frac{\mu(b_{k,-n_\infty})}{\mathcal{G}_{-2n_\infty}} = 0,0 \dots 100 \dots 0$$

avec $2n_\infty$ chiffres après la virgule, le chiffre 1 occupant une position précise déterminée par l'indice k et la cardinalité de la mosaïque fine.

Remarque 4 (Lecture du développement). Le développement $0,0 \dots 100 \dots 0$ représente :

- Les premiers chiffres « 0 » avant le « 1 » : la position du grain dans la mosaïque grossière (codage à résolution $-n_\infty$).
- Le chiffre « 1 » : l'indication que le grain est présent (non nul).
- Les chiffres « 0 » après le « 1 » : la structure interne du grain à résolution fine (sous-grains).

À résolution $-n_\infty$, seuls les premiers n_∞ chiffres sont visibles : on perçoit le grain comme ponctuel (la position précise est encodée mais sans étendue interne).

À résolution $-2n_\infty$, les $2n_\infty$ chiffres sont visibles : on perçoit la position grossière du grain et sa structure interne (qui constitue son extension).

3.3 Le mécanisme de promotion stratale

Théorème 1 (Promotion stratale d'un grain). *Pour tout grain $b_{k,-n_\infty}$ de la mosaïque grossière, le passage du niveau de résolution $-n_\infty$ au niveau $-2n_\infty$ effectue une promotion stratale :*

$$(grain\ ponctuel,\ mesure\ nulle) \xrightarrow{\text{passage } -n_\infty \rightarrow -2n_\infty} (grain\ étendu,\ mesure\ non\ nulle).$$

Plus précisément :

- À résolution $-n_\infty$: $b_{k,-n_\infty}$ est un objet ponctuel sans structure interne perceptible. Sa mesure est $1/2^{n_\infty}$, infinitésimale au sens standard.
- À résolution $-2n_\infty$: $b_{k,-n_\infty}$ est un objet étendu contenant 2^{n_∞} sous-grains. Sa mesure est $1/2^{n_\infty}$, non nulle au niveau de résolution considéré.

La promotion conserve quantitativement la mesure ($1/2^{n_\infty}$ dans les deux cas), mais elle change qualitativement son statut (« nul standard » vs « non nul stratal »).

Démonstration. Conséquence directe des Propositions 1 et 2. Le calcul de la mesure donne $1/2^{n_\infty}$ dans les deux cas, mais ce nombre est :

- Infinitésimal d'ordre n_∞ vu de la résolution $-n_\infty$ (où l'épaisseur élémentaire est $1/2^{n_\infty}$ également) : il se réduit à une « ponctualité ».
- Non nul vu de la résolution $-2n_\infty$ (où l'épaisseur élémentaire est $1/2^{2n_\infty}$, plus fine que la mesure considérée) : il acquiert une étendue détectable.

□

3.4 Interprétation comme changement de représentation

Remarque 5 (Lecture épistémologique). *Le mécanisme de promotion stratale n'est pas une transformation ontologique du grain : le grain $b_{k,-n_\infty}$ ne « change » pas de nature en passant d'une résolution à l'autre.*

C'est un changement de représentation : le même objet est représenté différemment selon le niveau d'observation. Sa mesure intrinsèque (calculable à tout niveau suffisamment fin) est $1/2^{n_\infty}$. Mais l'apparence de cette mesure (nulle ou non nulle) dépend du système de référence.

Cette lecture s'inscrit dans une perspective générale de relativité du statut des réels : les propriétés d'un nombre réel ne sont pas absolues, elles dépendent du niveau de résolution où on l'observe.

4 La relativité du statut des réels

4.1 Le principe général

Principe 1 (Relativité stratale). *Toutes les propriétés d'un nombre réel — mesure, extension, cardinalité, ainsi que d'autres attributs métriques ou structuraux — sont relatives au niveau de résolution où on l'observe.*

Aucune propriété n'est intrinsèquement absolue. Le nombre réel n'est pas un objet à propriétés fixes, mais une famille de représentations stratales aux différents niveaux.

Remarque 6 (Conséquences du principe). *Le Principe 1 a plusieurs conséquences :*

- *Un même réel peut être de mesure nulle à un niveau et non nulle à un autre, sans contradiction (Théorème 1).*

- Un même continu peut avoir des cardinalités différentes selon le mode de décompte (positionnel ou combinatoire, cf. document sur la stratification fonctionnelle).
 - L'extension d'un grain dépend du niveau d'observation (ponctuelle ou étendue).
- Cette relativité ne fragilise pas la notion de nombre réel : elle l'enrichit en révélant ses différentes facettes selon le niveau d'analyse.

4.2 Compatibilité avec les constructions classiques

Proposition 4 (Lien avec Dedekind). *La construction pragmatique stratale est compatible avec les coupures de Dedekind. À toute famille stratale $\{b_{k,-mn_\infty}\}_{m \geq 1}$ correspondant à un réel x , la partie standard de la suite des mesures donne la coupure de Dedekind canonique :*

$$\text{st}\left(\bigcup_m b_{k,-mn_\infty}\right) = \{q \in \mathbb{Q} : q < x\}.$$

La coupure classique est ainsi récupérée comme limite standard de la construction stratale, sans contradiction avec les axiomes de Dedekind.

Proposition 5 (Lien avec Cauchy). *La construction pragmatique stratale est compatible avec les suites de Cauchy. La famille stratale $\{b_{k,-mn_\infty}\}_{m \geq 1}$ d'un réel x correspond à une suite stratale de représentants, où chaque grain au niveau $-mn_\infty$ est un terme de la suite.*

La condition de Cauchy classique est automatiquement satisfaite : deux représentants $b_{k,-mn_\infty}$ et $b_{k,-m'n_\infty}$ (à $m, m' \geq m_0$) sont à distance infinitésimale.

Le réel x classique est récupéré comme la partie standard de la suite stratale.

Remarque 7 (Le diagramme de compatibilité). *On peut résumer la compatibilité avec le diagramme suivant :*

Construction stratale $\longrightarrow$ Partie standard $\longrightarrow$ Construction classique

Famille $\{b_{k,-mn_\infty}\}_m$

Opération st

Coupure / Suite Cauchy

La construction stratale est plus fine que la classique : elle conserve la structure de hiérarchie stratale, alors que la partie standard la réduit à un objet unique (le réel classique).

4.3 Distinction avec l'analyse non-standard

Remarque 8 (Comparaison avec Robinson). *La construction pragmatique stratale partage des traits avec l'analyse non-standard (Robinson, 1960), mais s'en distingue :*

- Point commun : Toutes deux travaillent avec des infinitésimaux et opèrent dans un cadre plus large que $\mathbb{R}$.
- Différence 1 : L'analyse non-standard de Robinson construit son cadre par ultraproduit et théorie des modèles ; la construction stratale opère par hiérarchisation géométrique des niveaux de résolution.
- Différence 2 : L'analyse non-standard a un seul niveau d'infinitésimaux ($\mathbb{R}^*$) ; la construction stratale en a une hiérarchie graduée ($\mathcal{G}_{-kn_\infty}$ pour $k \geq 1$).
- Différence 3 : L'analyse non-standard est essentiellement analytique ; la construction stratale est essentiellement géométrique et opérationnelle.

Les deux approches sont compatibles et complémentaires, mais elles proposent des perspectives différentes sur les nombres réels.

5 Généralisation au-delà du cercle

5.1 Du cercle au diamètre

Proposition 6 (Extension au diamètre). *La construction pragmatique étalonnée sur le cercle unité s'étend naturellement au diamètre du cercle (segment de longueur $1/\pi$, ou plus généralement segment unitaire après normalisation).*

Le mécanisme de promotion stratale (Théorème 1) s'applique verbatim au diamètre, en remplaçant la structure cyclique par la structure linéaire.

La mosaïque grossière du diamètre comporte $2^{n\infty}$ grains de mesure $1/2^{n\infty}$; la mosaïque fine en comporte $2^{2n\infty}$ de mesure $1/2^{2n\infty}$. La promotion stratale opère identiquement.

5.2 À toute structure stratifiable

Proposition 7 (Généralisation). *La construction pragmatique stratale, étalonnée sur le cercle unité et étendue au diamètre, s'applique à toute structure stratifiable du programme du grain :*

- *Le plan stratal (Volume II).*
- *Toute mosaïque stratée du programme.*

À chaque fois, le même mécanisme de promotion stratale opère : un grain ponctuel à un niveau de résolution devient un grain étendu au niveau plus fin, sans changement ontologique mais par changement de représentation.

Remarque 9 (Universalité de la construction). *La construction pragmatique stratale n'est donc pas un mécanisme particulier au cercle ou au diamètre, mais un principe général qui régit tout objet stratifiable du programme. Le cercle et le diamètre servent d'étalons initiaux pour calibrer la construction, mais le mécanisme se généralise sans restriction.*

C'est conforme à l'esprit du programme du grain : un seul mécanisme structurel (la stratification multiplicative) gouverne toutes les constructions, et la construction pragmatique en est une expression particulière dans le domaine des nombres réels.

6 Statut et perspectives

6.1 Ce qui est solide

Le présent document établit, dans un cadre cohérent avec le programme du grain :

- Un *étalonnage rigoureux* sur le cercle unité de circonférence 1.
- Un *mécanisme central* de promotion stratale (Théorème 1).
- Une *compatibilité explicite* avec les constructions classiques de Dedekind et Cauchy.
- Une *généralisation universelle* à toute structure stratifiable.

Ces résultats forment une construction pragmatique stratale des réels qui complète, sans contredire, les approches algébriques et classiques.

6.2 Ce qui demande à être approfondi

Plusieurs aspects méritent un développement ultérieur :

- La *structure algébrique* de l'ensemble des familles stratales : forme-t-il un corps ? Quelles sont ses opérations canoniques ?
- L'*ordre* sur les familles stratales : comment comparer deux réels par leur représentation stratale ?
- La *topologie* : quelle est la topologie naturelle sur l'espace des familles stratales ? Est-elle plus fine que la topologie classique de $\mathbb{R}$?

6.3 Liens avec le corpus

Cette construction s'articule avec plusieurs documents du programme :

- *Remarques topo-ensemblistes* : la promotion stratale reprend et précise le mécanisme « sortir du zéro » par factorisation du continu.
- *Rectification stratale du cercle* : la rectification en $2n_\infty$ étapes utilise la même promotion stratale appliquée à la corde rectifiée.
- *Métrique stratale* : la métrique logarithmique est compatible avec la mesure stratée des grains.

Conclusion

Ce document a établi une *construction pragmatique stratale* des nombres réels, propre au programme du grain. Cette construction est *nouvelle* (sans analogue direct dans les approches classiques) mais *compatible* avec les constructions algébriques, de Dedekind et de Cauchy.

L'apport principal est conceptuel : les nombres réels sont conçus non comme des objets à propriétés absolues, mais comme des *familles de représentations stratales* aux différents niveaux de résolution. La mesure, l'extension, la cardinalité d'un réel deviennent des propriétés *relatives au niveau d'observation*.

Le mécanisme central est la *promotion stratale* : un grain ponctuel de mesure nulle à un niveau devient un grain étendu de mesure non nulle au niveau plus fin. Cette promotion n'est pas une transformation ontologique mais un changement de représentation, ce qui préserve la cohérence avec les constructions classiques tout en révélant une structure stratale plus riche.

La construction, étalonnée sur le cercle unité et étendue au diamètre, se généralise à toute structure stratifiable du programme, manifestant l'universalité du mécanisme de stratification dans le programme du grain.