

Le produit des réalités

Version reformulée sur $\mathbb{R}$

Hugues Genyvin

Préambule

Nous voulons un cadre algébrique dans lequel deux espaces complexes conservent chacun leur propre unité imaginaire, $\imath_1$ et $\imath_2$, au lieu de les identifier. Nous verrons que ce cadre existe : c'est le produit tensoriel *sur* $\mathbb{R}$ d'espaces vectoriels complexes, sur lequel agit naturellement l'algèbre des nombres bicomplexes. Il se décompose canoniquement en deux parties : l'une où les deux imaginaires coïncident (« réalité partagée »), l'autre où ils sont conjugués (« réalités distinctes »).

L'intrication quantique, elle, est une propriété distincte, qui se lit sur un déterminant Δ et existe déjà dans le produit tensoriel complexe usuel. La section 5 sépare clairement les résultats mathématiques de leur interprétation.

1 Le produit tensoriel

Définition 1 (Produit tensoriel). Soit A un anneau commutatif et M_1, M_2 deux A -modules. Un *produit tensoriel* de M_1 et M_2 sur A est un A -module $M_1 \otimes_A M_2$ muni d'une application A -bilinéaire $\psi : M_1 \times M_2 \rightarrow M_1 \otimes_A M_2$, $(x, y) \mapsto x \otimes y$, telle que :

1. l'image de ψ engendre $M_1 \otimes_A M_2$ comme A -module ;
2. pour toute application A -bilinéaire $f : M_1 \times M_2 \rightarrow M_3$ vers un A -module quelconque M_3 , il existe une unique application A -linéaire $g : M_1 \otimes_A M_2 \rightarrow M_3$ telle que $f(x, y) = g(x \otimes y)$.

Il existe et il est unique à isomorphisme unique près.

Remarque. C'est exactement la définition du « produit des réalités » de la version précédente : le produit des réalités *est* le produit tensoriel. Le seul choix réellement libre est l'anneau A sur lequel on tensorise, et c'est ce choix qui décide du sort des imaginaires.

Propriété 1 (Bilinéarité). Pour tous $x, x' \in M_1$, $y, y' \in M_2$, $a \in A$:

1. $(x + x') \otimes y = x \otimes y + x' \otimes y$;
2. $x \otimes (y + y') = x \otimes y + x \otimes y'$;
3. $(ax) \otimes y = a(x \otimes y) = x \otimes (ay)$.

Remarque (Attention : l'image de ψ n'est pas tout l'espace). L'axiome 1 dit que les tenseurs purs $x \otimes y$ engendrent l'espace, pas qu'ils le remplissent. Un vecteur général est une *somme* de tenseurs purs, par exemple $e^1 \otimes e^1 + e^2 \otimes e^2$, qui n'est le produit d'aucun couple (x, y) . C'est précisément là que vit l'intrication (section 4).

2 Deux imaginaires : tensoriser sur $\mathbb{R}$

2.1 Pourquoi le produit sur $\mathbb{C}$ identifie les imaginaires

Soient E_1 et E_2 deux espaces vectoriels complexes. Dans $E_1 \otimes_{\mathbb{C}} E_2$, la propriété 3 avec $a = i$ donne

$$(ix) \otimes y = i(x \otimes y) = x \otimes (iy).$$

L'imaginaire de E_1 et celui de E_2 agissent donc de la même façon : on a forcément $\iota_1 = \iota_2$ et $\iota_1 \iota_2 = -1$. Il n'y a qu'une seule réalité.

2.2 Le produit sur $\mathbb{R}$

Un espace complexe est en particulier un espace réel (de dimension double). On peut donc former

$$W = E_1 \otimes_{\mathbb{R}} E_2,$$

dans lequel seuls les scalaires *réels* traversent le produit. Sur W , on dispose de deux applications $\mathbb{R}$ -linéaires :

$$J_1 = (\text{multiplication par } i \text{ dans } E_1) \otimes \text{id}, \quad J_2 = \text{id} \otimes (\text{multiplication par } i \text{ dans } E_2),$$

c'est-à-dire $J_1(x \otimes y) = (ix) \otimes y$ et $J_2(x \otimes y) = x \otimes (iy)$. Elles vérifient

$$J_1^2 = J_2^2 = -\text{id}, \quad J_1 J_2 = J_2 J_1,$$

mais $J_1 \neq J_2$: ce sont deux imaginaires distincts ι_1 et ι_2 .

Si $\dim_{\mathbb{C}} E_1 = \dim_{\mathbb{C}} E_2 = 2$, alors $\dim_{\mathbb{R}} E_k = 4$ et $\dim_{\mathbb{R}} W = 16$, alors que $\dim_{\mathbb{C}}(E_1 \otimes_{\mathbb{C}} E_2) = 4$, soit $\dim_{\mathbb{R}} = 8$.

2.3 L'algèbre des nombres bicomplexes

Définition 2 (Nombres bicomplexes). On note $\mathbb{BC} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. C'est l'algèbre réelle de dimension 4 engendrée par deux unités imaginaires $\iota_1 = i \otimes 1$ et $\iota_2 = 1 \otimes i$ qui commutent, avec $\iota_1^2 = \iota_2^2 = -1$. Tout élément s'écrit

$$z = a + b\iota_1 + c\iota_2 + dj, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad j = \iota_1 \iota_2.$$

Propriété 2. On a $j^2 = \iota_1^2 \iota_2^2 = +1$, et $j \neq \pm 1$. Par conséquent $\mathbb{BC}$ possède des diviseurs de zéro :

$$(1 + j)(1 - j) = 1 - j^2 = 0.$$

Proposition 1 (Idempotents et décomposition de $\mathbb{BC}$). Posons

$$e_{=} = \frac{1 - j}{2}, \quad e_{\neq} = \frac{1 + j}{2}.$$

Alors $e_{=}^2 = e_{=}$, $e_{\neq}^2 = e_{\neq}$, $e_{=} e_{\neq} = 0$ et $e_{=} + e_{\neq} = 1$. De plus

$$e_{=} \iota_2 = e_{=} \iota_1, \quad e_{\neq} \iota_2 = -e_{\neq} \iota_1,$$

si bien que $\mathbb{BC} = e_{=}\mathbb{BC} \oplus e_{\neq}\mathbb{BC} \simeq \mathbb{C} \times \mathbb{C}$.

Démonstration. Les identités sur $e_{=}$, $e_{\neq}$ découlent de $j^2 = 1$. Ensuite $\iota_1 e_{=} = \frac{\iota_1 - \iota_1^2 \iota_2}{2} = \frac{\iota_1 + \iota_2}{2}$ et $\iota_2 e_{=} = \frac{\iota_2 - \iota_1 \iota_2^2}{2} = \frac{\iota_2 + \iota_1}{2}$, d'où l'égalité. Le calcul pour $e_{\neq}$ est identique au signe près. $\square$

L'algèbre $\mathbb{BC}$ agit sur W par $\iota_1 \mapsto J_1$, $\iota_2 \mapsto J_2$, donc $j \mapsto K = J_1 J_2$.

3 Le théorème de décomposition

Théorème 1 (Décomposition du produit des réalités). *Soient E_1, E_2 deux espaces vectoriels complexes de dimension finie et $W = E_1 \otimes_{\mathbb{R}} E_2$. Posons*

$$W_+ = \ker(K + \text{id}), \quad W_- = \ker(K - \text{id}), \quad K = J_1 J_2.$$

Alors :

1. $W = W_+ \oplus W_-$ (somme directe de sous-espaces), les projecteurs étant $P_+ = \frac{1}{2}(\text{id} - K)$ et $P_- = \frac{1}{2}(\text{id} + K)$;
2. sur W_+ , on a $J_2 = J_1$: les deux imaginaires coïncident ;
3. sur W_- , on a $J_2 = -J_1$: les deux imaginaires sont conjugués ;
4. ce sont des espaces quotients de W , et

$$W_+ \simeq W/W_- \simeq E_1 \otimes_{\mathbb{C}} E_2, \quad W_- \simeq W/W_+ \simeq E_1 \otimes_{\mathbb{C}} \overline{E_2},$$

où $\overline{E_2}$ désigne E_2 muni de la multiplication conjuguée $\lambda \cdot y = \bar{\lambda} y$.

En dimension 2, chacun des deux morceaux est de dimension complexe 4 (réelle 8).

Démonstration. 1. J_1 et J_2 commutent, donc $K^2 = J_1^2 J_2^2 = \text{id}$. Un endomorphisme involutif se diagonalise avec les valeurs propres ± 1 , et P_+, P_- sont les projecteurs associés.

2. Sur W_+ , $J_1 J_2 = -\text{id}$. En composant à gauche par J_1 : $-J_2 = -J_1$, donc $J_2 = J_1$.

3. Sur W_- , $J_1 J_2 = \text{id}$, d'où $-J_2 = J_1$.

4. Le produit tensoriel complexe s'obtient en imposant la relation $(ix) \otimes y = x \otimes (iy)$:

$$E_1 \otimes_{\mathbb{C}} E_2 = W/N, \quad N = \text{Vect}\{(ix) \otimes y - x \otimes (iy)\} = \text{Im}(J_1 - J_2).$$

Sur W_+ , $J_1 - J_2 = 0$; sur W_- , $J_1 - J_2 = 2J_1$ est inversible. Donc $\text{Im}(J_1 - J_2) = W_-$ et $E_1 \otimes_{\mathbb{C}} E_2 \simeq W/W_- \simeq W_+$. De même, $E_1 \otimes_{\mathbb{C}} \overline{E_2} = W/\text{Im}(J_1 + J_2)$ et $\text{Im}(J_1 + J_2) = W_-$. $\square$

Remarque. Concrètement, pour un tenseur pur :

$$P_+(x \otimes y) = \frac{1}{2}(x \otimes y - (ix) \otimes (iy)), \quad P_-(x \otimes y) = \frac{1}{2}(x \otimes y + (ix) \otimes (iy)).$$

Dans W_+ , le terme $(ix) \otimes (iy)$ vaut $\iota_1 \iota_2 (x \otimes y) = -x \otimes y$: on retrouve le produit complexe usuel. Dans W_- , il vaut $+x \otimes y$.

Remarque. Si E_1 et E_2 sont des espaces de Hilbert, $\overline{E_2}$ s'identifie au dual E_2^* , et $E_1 \otimes_{\mathbb{C}} \overline{E_2} \simeq \mathcal{L}(E_2, E_1)$ est l'espace des opérateurs de E_2 dans E_1 . Pour $E_1 = E_2 = H$, c'est l'espace où vivent les matrices densité $|\phi\rangle\langle\phi|$. La « seconde réalité » a donc un sens précis : c'est l'espace des opérateurs.

3.1 Le calcul en dimension 2

Prenons des bases (e_1^1, e_1^2) de E_1 et (e_2^1, e_2^2) de E_2 , et, comme dans la version précédente, des vecteurs dont la première composante porte l'imaginaire :

$$x = x_1 \iota_1 e_1^1 + x_2 e_1^2, \quad y = y_1 \iota_2 e_2^1 + y_2 e_2^2, \quad x_k, y_k \in \mathbb{R}.$$

Dans W , par bilinéarité réelle :

$$x \otimes y = x_1 y_1 j(e_1^1 \otimes e_2^1) + x_1 y_2 \iota_1(e_1^1 \otimes e_2^2) + x_2 y_1 \iota_2(e_1^2 \otimes e_2^1) + x_2 y_2 (e_1^2 \otimes e_2^2).$$

— Composante $W_=$ ($j = -1, \iota_1 = \iota_2 = i$) :

$$P_=(x \otimes y) \leftrightarrow -x_1 y_1 e_1^1 e_2^1 + i x_1 y_2 e_1^1 e_2^2 + i x_2 y_1 e_1^2 e_2^1 + x_2 y_2 e_1^2 e_2^2.$$

— Composante $W_\neq$ ($j = +1, \iota_1 = i, \iota_2 = -i$) :

$$P_\neq(x \otimes y) \leftrightarrow x_1 y_1 e_1^1 e_2^1 + i x_1 y_2 e_1^1 e_2^2 - i x_2 y_1 e_1^2 e_2^1 + x_2 y_2 e_1^2 e_2^2.$$

(On a noté $e_1^k e_2^l$ pour l'image de $e_1^k \otimes e_2^l$.) La première ligne est exactement le calcul « à réalité partagée » de la version précédente ; la seconde en est la version « à réalités distinctes ».

4 L'intrication

4.1 Le critère du déterminant

Dans $E_1 \otimes_{\mathbb{C}} E_2$ (c'est-à-dire dans W_+), tout vecteur s'écrit de façon unique

$$|w\rangle = \alpha e_1^1 \otimes e_2^1 + \beta e_1^1 \otimes e_2^2 + \delta e_1^2 \otimes e_2^1 + \gamma e_1^2 \otimes e_2^2, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}.$$

On lui associe sa matrice de coefficients et son déterminant :

$$M(w) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \gamma \end{pmatrix}, \quad \Delta(w) = \det M(w) = \alpha\gamma - \beta\delta.$$

Théorème 2 (Critère de séparabilité). *Un vecteur non nul $|w\rangle$ est un tenseur pur $x \otimes y$ si et seulement si $\Delta(w) = 0$.*

Démonstration. Si $w = x \otimes y$ avec $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, alors $M(w) = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$ est de rang au plus 1, donc $\Delta = 0$. Réciproquement, si $\Delta = 0$ et $w \neq 0$, $M(w)$ est de rang exactement 1, donc s'écrit comme un produit colonne $\times$ ligne, c'est-à-dire $w = x \otimes y$. $\square$

Définition 3 (État intriqué). Un vecteur non nul est dit *séparable* s'il est un tenseur pur, et *intriqué* sinon, c'est-à-dire si $\Delta \neq 0$.

Remarque (Ce ne sont pas des sous-espaces). L'ensemble des vecteurs séparables n'est *pas* un sous-espace vectoriel : $e_1^1 \otimes e_2^1$ et $e_1^2 \otimes e_2^2$ sont séparables, mais leur somme a $\Delta = 1 \neq 0$. C'est un cône (la variété de Segre). Son complémentaire, l'ensemble des états intriqués, ne contient pas 0 et n'est pas non plus un sous-espace. La décomposition en sous-espaces de ce document est $W = W_+ \oplus W_-$, pas « séparables $\oplus$ intriqués ».

Remarque (Intrication et nombre de réalités sont indépendants). Le critère s'applique de la même façon dans $W_- \simeq E_1 \otimes_{\mathbb{C}} \overline{E_2}$. Dans les deux composantes, il existe des vecteurs séparables et des vecteurs intriqués. Dans l'exemple ci-dessus, $\Delta = -x_1 y_1 x_2 y_2 - (i x_1 y_2)(i x_2 y_1) = 0$ dans W_+ et $\Delta = x_1 y_1 x_2 y_2 - (i x_1 y_2)(-i x_2 y_1) = 0$ dans W_- : un tenseur pur reste séparable des deux côtés. L'intrication ne vient donc pas du dédoublement des imaginaires ; elle vient des *sommes* de tenseurs purs.

En particulier, le facteur $\iota_1 \iota_2 = j$ vaut -1 sur W_+ et $+1$ sur W_- ; il n'est jamais nul et ne peut ni créer ni détruire l'intrication.

4.2 Une mesure qui se conserve : la concurrence

Définition 4 (Concurrence). Pour un vecteur normalisé ($|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1$), on pose

$$C(w) = 2|\Delta(w)| = 2|\alpha\gamma - \beta\delta| \in [0, 1].$$

$C = 0$ pour un état séparable et $C = 1$ pour un état maximalement intriqué.

Proposition 2 (Invariance). C est invariante :

1. par les transformations locales unitaires $U_1 \otimes U_2$, car $M \mapsto U_1 M U_2^T$ et $|\det U_k| = 1$;
2. par $\tau_2 : w \mapsto -w$, car $\det(-M) = \det M$ pour une matrice 2×2 ;
3. lorsque $E_1 = E_2$, par l'échange $\tau_1 : x \otimes y \mapsto y \otimes x$, car $M \mapsto M^T$.

Remarque. C'est la version rigoureuse de la « mesure $\hat{\mu}$ conservée par les transformations τ » de la version précédente.

4.3 Les états de Bell

Dans $\mathbb{C}^2 \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2$, avec $|0\rangle = e^1$, $|1\rangle = e^2$:

$$|\Phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle), \quad |\Psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle).$$

Tous vérifient $|\Delta| = \frac{1}{2}$, donc $C = 1$: ils sont maximalement intriqués. Le vecteur construit dans la version précédente, avec $\alpha = \beta = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ sur $e_1^1 \otimes e_2^2$ et $e_1^2 \otimes e_2^1$, est $\pm|\Psi^+\rangle$. Les quatre couples de signes de la « classe d'intrication » donnent $\pm|\Psi^+\rangle$ et $\pm|\Psi^-\rangle$.

5 Interprétation (hors mathématiques)

Les énoncés précédents sont des théorèmes. Ce qui suit est une *lecture* proposée de ces théorèmes, qui n'est pas démontrée par eux.

- On peut appeler « réalité » le choix d'une unité imaginaire. Tensoriser sur $\mathbb{C}$ revient à imposer une réalité partagée ; tensoriser sur $\mathbb{R}$ laisse coexister deux réalités, et l'espace se scinde canoniquement en une partie où elles coïncident ($W_=\$) et une partie où elles sont conjuguées ($W_\neq$).
- La partie à réalité partagée est exactement l'espace des états de la mécanique quantique de deux systèmes ; la partie à réalités conjuguées est l'espace des opérateurs.
- L'intrication est une notion indépendante : elle se mesure par Δ dans chacune des deux parties.

Un énoncé comme « il n'existe pas qu'une seule réalité » relève de cette interprétation et non du formalisme : les mathématiques montrent seulement que les deux structures coexistent dans $E_1 \otimes_{\mathbb{R}} E_2$.

Pour aller plus loin

- Nombres bicomplexes : M. E. Luna-Elizarrarás, M. Shapiro, D. C. Struppa, A. Vajiac, *Bicomplex Holomorphic Functions*, Birkhäuser, 2015.
- Produit tensoriel : N. Bourbaki, *Algèbre*, chapitre II ; J.-P. Serre, références de la version précédente.

- Intrication et concurrence : W. K. Wootters, « Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits », *Phys. Rev. Lett.* 80 (1998).
- Décomposition de Schmidt : M. Nielsen, I. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, §2.5.