

Qu'est-ce que le grain ?

Synthèse de la notion de grain dans la théorie du grain

Hugues Genyvin

September 1, 2026

Cette note rassemble la notion de grain sous ses différentes approches définitoires, de la plus stricte (géométrique) aux propriétés qui la caractérisent. Le niveau d'exposition est celui d'un lecteur déjà familier des objets du programme.

1 Construction géométrique

Le grain naît d'une double construction géométrique menée à partir d'un cercle unité C quelconque : la *rectification* du cercle (son déroulement en un segment) et une *construction symétrique*. L'objet obtenu est un cercle que l'on autorise à être parcouru un nombre entier de fois.

Définition 1 (Grain). On appelle *grain* $\mathcal{G}_{\pm kn_\infty}$ un cercle support parcouru μ fois — la *multiplicité* —, où

$$\mu \in \{1, \dots, 2^{\pm kn_\infty}\}, \quad k \in \mathbb{N},$$

à un *niveau de résolution* donné

$$\nu \in \{1, \dots, \pm kn_\infty\}, \quad k \rightarrow \aleph_0,$$

qui fixe le rayon du cercle support par $\rho = 2^\nu$.

De façon équivalente : un grain est un cercle support parcouru μ fois, soit en *boucle totale* (recouvrement entier), soit en boucle *partielle* (arc de cercle), la multiplicité étant une puissance de deux $2^{\pm\mu}$. En particulier, un cercle simple ($\mu = 1$) est un grain.

Remarque 1 (Statut de n_∞). Le symbole n_∞ désigne un *terme entier* destiné à croître indéfiniment, exactement comme le terme général d'une suite d'entiers tendant vers l'infini. Il ne s'agit pas d'un entier fixe : les énoncés où n_∞ apparaît sont à lire, selon le contexte, soit à niveau k fixé (tout est alors fini), soit à la limite $k \rightarrow \aleph_0$. Cette double lecture est essentielle et l'on y reviendra à chaque comparaison entre quantités finies et cardinaux.

Remarque 2 (Grain comme classe de grains). Par extension, un grain peut être une *classe* de grains : un grain en forme de boucle est composé de cercles élémentaires, eux-mêmes des grains. Cette imbrication est reprise plus bas (§8).

2 Déploiement sur la droite réelle étendue

Définition 2 (Droite réelle étendue, à un niveau). À un niveau k fixé, on pose

$$\widetilde{\mathbb{R}}|_k = [0; 2\pi \cdot 2^{+kn_\infty}],$$

et $\widetilde{\mathbb{R}} = \bigcup_k \widetilde{\mathbb{R}}|_k$. *Se déployer* signifie que $\widetilde{\mathbb{R}}|_k$ est composée de grains élémentaires.

Le passage du cercle à la droite se conçoit par trois voies complémentaires, qu'il faut distinguer car elles ne font pas la même chose.

- **Heuristique.** Le cercle « à l'infini » est une droite « à l'infini » : les composants du cercle infini deviennent composants de la droite, et ce sont des grains. C'est l'image directrice, non une démonstration.
- **Fibration.** Elle organise la droite Δ_∞ en fibres au-dessus d'une base, chaque fibre portant la structure circulaire de départ ; les grains $\mathcal{G}_{-kn_\infty}$ se déploient le long des fibres.
- **Homéomorphisme.** Il fournit l'identification topologique (bicontinue) entre la structure circulaire déroulée et le segment support, garantissant que le déploiement préserve la topologie.

Remarque 3. Les deux derniers mécanismes sont *distincts* : la fibration est une structure de projection (elle empile), l'homéomorphisme est une équivalence topologique (il identifie). L'heuristique du cercle infini motive les deux mais ne les remplace pas.

3 Structure dyadique et anneau partiel

L'ensemble $\widetilde{\mathbb{R}}$ porte une structure *dyadique* : tout grain est un multiple entier d'un inverse de puissance de deux,

$$\frac{p}{2^{n_\infty}}, \quad p \in \mathbb{Z}.$$

Concrètement, sur l'échelle de 0 à 1, le q -ième grain s'identifie à la fraction $\frac{q}{2^{n_\infty}}$ pour $q \in \{1, \dots, 2^{n_\infty}\}$.

Définition 3 (Anneau partiel). $\widetilde{\mathbb{R}}$ est un *anneau partiel* : l'addition et la multiplication y sont définies, mais l'inversion multiplicative n'est que partielle.

Deux raisons, de portées différentes, expliquent le caractère *partiel* :

1. **Raison de borne (contingente).** Certains éléments infinitésimaux n'ont pas d'inverse dans $\widetilde{\mathbb{R}}|_k$ parce que leur inverse dépasse la borne supérieure $2\pi \cdot 2^{+kn_\infty}$ du niveau.
2. **Raison structurelle (fondamentale).** Des éléments de la structure dyadique, comme 3 , n'ont pas d'inverse : $1/3$ n'est pas un rationnel dyadique ($3 \nmid 2^k$ pour tout k). Cette obstruction ne dépend pas du niveau ; elle est intrinsèque à la dyadicité.

Remarque 4. La seconde raison est la vraie : même en levant toute borne, $\widetilde{\mathbb{R}}$ ne serait pas un corps, car la dyadicité exclut structurellement les inverses non dyadiques.

4 Information : du grain au point

Définition 4 (Information de Hartley d'un niveau). À un niveau k fixé, l'information de Hartley de $\widetilde{\mathbb{R}}|_k$ est *finie* et vaut $2kn_\infty$ bits (deux signes $\pm$, d'où le facteur 2). Elle est *paramétrée par le niveau* : ce n'est pas une constante.

La droite réelle achevée $\mathbb{R}$, elle, a une information de Hartley égale à $\aleph_0$ (cardinal du continu). La comparaison correcte n'est donc pas entre deux nombres, mais entre une suite finie et un cardinal, prise à la limite :

$$\lim_{k \rightarrow \aleph_0} 2kn_\infty \longrightarrow \aleph_0.$$

À tout niveau fini, $2kn_\infty < \aleph_0$; c'est seulement dans le passage à la limite que le second domine.

Remarque 5 (Ce qui se perd et ce qui apparaît). Le passage du grain au point met en jeu *deux* quantités distinctes, qu'il ne faut pas confondre sous le seul mot « information » :

- **Ce qui se perd** : la *quantification finie en bits*. Un grain se quantifie ($2kn_\infty$ bits à un niveau donné) ; un point, non. En ce sens précis, le passage grain $\rightarrow$ point *dissipe* la quantification.
- **Ce qui apparaît** : le *cardinal du continu* $\aleph_0$, qui excède toute quantification finie. En ce sens, le passage à la limite fait *émerger* un ordre de grandeur supérieur.

Il n'y a pas contradiction : on perd la mesure finie en bits, et l'on gagne un cardinal. Ce sont deux « informations » de natures différentes (l'une est une capacité en bits, l'autre un cardinal), et le passage est *irréversible* : d'un point on ne reconstruit pas le grain quantifié dont il provient.

Remarque 6 (Statut de la « réalité platonicienne »). On peut lire ce passage comme l'accès à une réalité idéale (au sens platonicien) : le point, illimité et achevé à la fois. Cette lecture est une *position* philosophique (le réalisme des idéautés), non une conséquence forcée du formalisme ; on la signale comme interprétation, non comme théorème.

5 Promotion vers les réels achevés

Pour retrouver la construction usuelle des réels — en particulier la multiplication de deux nombres quelconques —, on inclut $\widetilde{\mathbb{R}}$ dans la droite réelle achevée $\mathbb{R}$, dans le cadre de l'analyse non standard (ANS). Un mécanisme de *promotion* fait alors passer d'un grain de $\widetilde{\mathbb{R}}$ à un point de $\mathbb{R}$: c'est le quotient qui « achève » l'anneau partiel en corps, au prix de l'oubli de l'épaisseur du grain.

6 L'anomalie cartésienne : l'origine comme grain

Dans l'anomalie cartésienne, on met en évidence une déformation de l'axe des ordonnées par une fonction quelconque (autre que $y = x$). Une condition nécessaire pour que le repère se conçoive est alors une *origine en forme de grain*.

En effet, en pur langage de points, on ne peut se représenter aucune contraction le long de l'axe ($y'Oy$). Si l'on objecte que la déformation n'a lieu qu'au niveau différentiel, $dy = f'(x) dx$ avec dx homogène, c'est déjà reconnaître que l'axe ($y'Oy$) et le repère ne sont ni homogènes ni universels : le facteur $f'(x)$ y introduit une inhomogénéité locale que le langage de points seul ne sait pas porter.

7 Le point : d'Aristote à l'idéalité achevée

Selon Euclide, le point est *ce dont la partie est nulle*. Pourtant, un point tracé sur une feuille est un *symbole* : avec une mine plus fine, on le tracerait plus fin. Le point de la feuille s'interprète donc pragmatiquement comme un *grain* — ce qui n'empêche nullement de dériver ou d'intégrer des courbes constituées de grains.

L'idéalité platonicienne du point marque le passage à l'infini illimité et achevé. On obtient ainsi un concept de point qui *identifie* deux caractères que l'intuition sépare : l'*illimité* (ce qui n'a pas de borne) et l'*achevé* (ce qui est terminé).

8 Auto-similarité (sans fractalité stricte)

Supposons un niveau d'observation fixé, repéré par exemple par le grain d'origine d'un plan. Par *auto-similarité*, un grain — même infinitésimal (inversible ou non) ou infiniment grand — se représente, à un autre niveau d'observation, par un support circulaire unité ; et réciproquement, un grain se décompose en grains élémentaires.

Remarque 7. Ce n'est pas une fractale au sens strict : la dimension d'homothétie interne vaut 1 (le grain se déploie linéairement, non selon une dimension fractionnaire).

9 Transfert logique et infinitésimaux

Le transfert des résultats de la logique du premier ordre reste valable (par le théorème de transfert de l'ANS). Par exemple : une suite converge en termes de grains si et seulement si elle converge en termes de points.

Enfin, si le point est le zéro, les grains infinitésimaux d'épaisseur $\epsilon \leq \frac{1}{2^{+kn_\infty}}$ ont une *partie standard* nulle (leur projection dans $\mathbb{R}$ est 0). Ce sont, en un sens précis, des « *zéros plus épais que le zéro absolu* » : nuls après promotion, non nuls avant.