

Quantification informationnelle des axiomes de groupe

Le coût en bits de l'associativité, du neutre et des inverses

Hugues Genvrin — Programme du grain

September 8, 2026

Résumé

On mesure en bits le *coût de contrainte* de chaque axiome algébrique. Sur un ensemble à n éléments, une loi interne est une table $n \times n$; on compte combien de tables satisfont chaque axiome, et la néguentropie de contrainte d'un axiome est le logarithme du facteur par lequel il réduit le nombre de tables. La hiérarchie magma $\rightarrow$ semigroupe $\rightarrow$ monoïde $\rightarrow$ groupe reçoit ainsi une *échelle quantifiée*. Résultat central : l'*associativité* est de loin l'axiome le plus coûteux, et son coût *croît* avec n , tandis que neutre et inverses restent modérés. Les valeurs sont exactes ($n = 2, 3, 4$), vérifiées contre la littérature (comptage de structures étiquetées) et via $n!/|\text{Aut}(G)|$.

1 L'idée : compter les tables

Renversant la construction usuelle (ensemble $\rightarrow$ magma $\rightarrow$ monoïde $\rightarrow$ groupe), on *dégrade* un groupe en retirant ses axiomes un à un, et l'on mesure à chaque cran la néguentropie de contrainte perdue — le coût informationnel de l'axiome. L'outil est le comptage.

Définition 1 (Loi interne comme table). Sur un ensemble E à n éléments (étiquetés), une *loi interne* est une application $E \times E \rightarrow E$, c'est-à-dire une table $n \times n$ à valeurs dans E . Le nombre total de lois (magmas) est

$$|\text{Magma}(n)| = n^{n^2}.$$

Définition 2 (Néguentropie de contrainte d'un axiome). Soit $\mathcal{A}$ une classe de structures (magma, semigroupe, monoïde, groupe) et $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ la sous-classe obtenue en ajoutant un axiome. La *néguentropie de contrainte* de cet axiome est

$$\mathcal{N}_{\text{axiome}} = \log_2 \frac{|\mathcal{A}|}{|\mathcal{A}'|} \geq 0 :$$

le nombre de bits nécessaires pour sélectionner les tables admissibles parmi les tables de départ.

Remarque 3 (Le signe, corrigé). Ajouter un axiome *contraint* : on *paie* $\mathcal{N}_{\text{axiome}}$ bits (on restreint l'espace des tables). Dégrader (retirer l'axiome) *libère* de l'entropie (plus de tables admissibles) : c'est une *perte* de néguentropie, non un gain. La quantité qui caractérise chaque couche est donc le coût de l'axiome, compté positivement à la *reconstruction* (chaînage arrière).

2 La hiérarchie, quantifiée

On empile les axiomes dans l'ordre : loi interne (magma) $\rightarrow$ associativité (semigroupe) $\rightarrow$ neutre (monoïde) $\rightarrow$ inverses (groupe).

Théorème 4 (Échelle des coûts). *Pour n éléments étiquetés, le nombre de structures et le coût de chaque axiome sont :*

n	$magma$	$semigrp$	$monoïde$	$groupe$	$\mathcal{N}_{assoc}$	$\mathcal{N}_{neutre}$	$\mathcal{N}_{inv}$
2	16	8	4	2	1,00	1,00	1,00
3	19 683	113	33	3	7,44	1,78	3,46
4	$4,29 \times 10^9$	3 492	126	16	20,23	4,79	2,98

(coûts en bits ; $magma = n^{n^2}$). Le coût total $magma \rightarrow groupe$ est $\log_2(n^{n^2}/|\text{Groupe}(n)|)$: 3,00 bits ($n=2$), 12,68 ($n=3$), 28,00 ($n=4$).

Calcul. Comptage exact par énumération des tables pour $n = 2, 3$ (resp. 16 et 19 683 tables) ; pour $n = 4$, valeurs de la littérature (semigroupes, monoïdes et groupes étiquetés). La néguentropie de chaque axiome est le $\log_2$ du rapport de cardinaux entre deux niveaux consécutifs. $\square$

Corollaire 5 (L'associativité domine). *Parmi les trois axiomes, l'associativité est le plus coûteux dès $n \geq 3$, et son coût croît rapidement avec n ($1 \rightarrow 7,4 \rightarrow 20,2$ bits) — bien plus vite que neutre ou inverses. C'est l'axiome qui structure le plus : il élimine à lui seul 99,4% des tables à $n = 3$.*

Remarque 6 (Interprétation). L'associativité est une contrainte *globale* (elle lie tous les triplets (a, b, c) : n^3 conditions), là où neutre et inverses sont *locaux* (un élément distingué, un partenaire par élément). D'où sa croissance en n : c'est la « colonne vertébrale » informationnelle de la structure algébrique. Le groupe n'est pas cher à cause de ses inverses mais à cause de son associativité.

3 Vérifications

Comptage direct ($n = 2, 3$).

```
import itertools, math
log2 = math.log2
def get(t,n,i,j): return t[i*n+j]
def is_assoc(t,n):
    return all(get(t,n,get(t,n,a,b),c)==get(t,n,a,get(t,n,b,c))
               for a in range(n) for b in range(n) for c in range(n))
def identity(t,n):
    for e in range(n):
        if all(get(t,n,e,a)==a and get(t,n,a,e)==a for a in range(n)): return e
    return None
def has_inv(t,n,e):
    return all(any(get(t,n,a,b)==e and get(t,n,b,a)==e for b in range(n))
               for a in range(n))

for n in (2,3):
    magma = n**(n*n); A=M=G=0
    for t in itertools.product(range(n), repeat=n*n):
        if is_assoc(t,n):
            A += 1; e = identity(t,n)
            if e is not None:
                M += 1
                if has_inv(t,n,e): G += 1
    print(n, magma, A, M, G,
          round(log2(magma/A),2), round(log2(A/M),2), round(log2(M/G),2))
# 2 16 8 4 2 1.0 1.0 1.0 | 3 19683 113 33 3 7.44 1.78 3.46
```

Contrôle croisé ($n = 4$, groupes). Le nombre de tables de groupe étiquetées est $\sum_G n!/|\text{Aut}(G)|$ sur les groupes abstraits d'ordre n . Pour $n = 4$: $\mathbb{Z}/4$ ($|\text{Aut}| = 2$) donne $24/2 = 12$ tables, le groupe de Klein V ($|\text{Aut}| = 6$) donne $24/6 = 4$, total **16** — en accord avec le comptage. Le coût des inverses (monoïde $\rightarrow$ groupe) est $\log_2(126/16) = 2,98$ bits.

4 Lien avec le théorème de Klein

Remarque 7 (Une échelle d'Erlangen informationnelle). Cette quantification prolonge le théorème de Klein (chapitre *Matière*) : là, la néguentropie mesurait la contrainte d'un *groupe agissant* (via les orbites, Burnside) ; ici, elle mesure la contrainte des *axiomes* qui font d'une loi un groupe. Les deux comptent des configurations éliminées par une contrainte, en bits. Ensemble, elles donnent une *échelle d'Erlangen informationnelle* : depuis l'ensemble nu (néguentropie de structure nulle — l'analogue algébrique de l'équiprobable) jusqu'au groupe agissant sur une géométrie, chaque cran a un coût mesurable.

Remarque 8 (L'invariant à l'origine). En chaînage arrière (reconstruction), on part de l'ensemble nu ($\mathcal{N} = 0$) et l'on *injecte* les contraintes : associativité, neutre, inverses. Le groupe apparaît ainsi non comme un axiome premier mais comme le *terme d'une accumulation de contraintes* — ce qui donne corps à l'intuition d'un *ascendant conceptuel* du groupe dans la notion d'invariant (une contrainte préservée *est* un invariant).

5 Portée et limites

Remarque 9 (Acquis). Chaque axiome algébrique a un coût informationnel exact, calculable par comptage de tables (théorème 4). L'associativité domine et croît avec n (corollaire 5). La hiérarchie magma→groupe devient une échelle quantifiée, cohérente avec le comptage d'orbites de Klein.

Limites. (i) *Étiquetage*. On compte des structures *étiquetées* (tables sur $E = \{1, \dots, n\}$) ; le comptage à *isomorphisme près* donnerait d'autres nombres — il faut fixer la convention (ici : étiquetées, la plus naturelle pour « compter des tables »). (ii) *Finitude*. La méthode vaut pour n fini ; l'extension aux structures infinies (perte de cyclicité = passage fini→infini) demande une mesure sur un espace de lois infini, non traitée ici. (iii) *Ordre des axiomes*. Le coût de chaque axiome dépend des axiomes *déjà* imposés (le neutre est compté *parmi les associatives*) : les valeurs sont *conditionnelles* à l'ordre d'empilement, comme des entropies conditionnelles. Le *total* magma→groupe, lui, est indépendant de l'ordre.