Que le point absolu est un grain

Hugues Genvrin

Novembre 2026

Résumé

On part de la définition de l'infini par l'indexation du continu : un ensemble est infini si l'ensemble de ses parties permet d'indexer les points d'un continu. Au premier étage, les parties d'un ensemble dénombrable sont en bijection avec le segment réel, dont chaque point est un point absolu, sans épaisseur. On monte d'un étage : un continu muni d'une structure de corps ordonné, dont les points sont indexés bijectivement par les parties des parties d'un ensemble dénombrable, est nécessairement non archimédien. On en déduit que ce que l'on prend pour un point réel est l'ombre d'un grain, qui a la puissance du continu et se divise sans fin : dans un tel continu, il n'y a pas de point absolu. On donne en application une lecture de la distribution de Dirac comme une densité finie répartie sur un grain.

1 Introduction

Euclide définit le point comme ce qui n'a pas de partie. Aristote, au contraire, tient la ligne pour divisible sans fin, et refuse qu'elle soit composée de points : un point n'existe en acte que là où l'on coupe la ligne. La droite réelle moderne tranche en faveur d'Euclide. Si l'on emboîte autour d'un réel x les intervalles $[x - 1/n,\, x + 1/n]$, leur intersection est le singleton $\{x\}$: la division, poursuivie à toutes les échelles, aboutit à un point d'épaisseur nulle.

Définition 1. Soit $\mathbb{K}$ un corps ordonné. Un élément $x \in \mathbb{K}$ est un *point absolu* si

$$\bigcap_{n\geq 1} \left[x - \tfrac{1}{n},\ x + \tfrac{1}{n}\right] = \{x\}.$$

Dans $\mathbb{R}$, tout point est absolu. L'objet de cet article est de montrer que cette propriété n'est pas une nécessité du continu, mais une conséquence de sa taille. Si l'on indexe le continu avec un étage de parties supplémentaire, ce qui, à toute échelle réelle, apparaît comme un point est en réalité un *grain* : un ensemble qui contient une copie du continu, et qui se divise sans fin.

La section 2 rappelle la définition de base et l'indexation bijective du segment par les parties de $\mathbb{N}$. La section 3 introduit le vocabulaire des grains et deux lemmes. La section 4 énonce et démontre le théorème principal. La section 5 distingue le cardinal et l'épaisseur. La section 6 donne l'application à la distribution de Dirac.

2 La définition de base

Définition 2. Un ensemble E est *infini* si l'ensemble de ses parties $\mathcal{P}(E)$ permet d'indexer tous les points d'un continu, c'est-à-dire s'il existe une surjection de $\mathcal{P}(E)$ sur le segment $[0, 1]$.

On a montré dans [6] que cette définition caractérise exactement les ensembles infinis au sens usuel. Pour un ensemble dénombrable, l'indexation peut même être rendue bijective.

Proposition 3. *Il existe une bijection entre* $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ *et* $[0,1]$.

Démonstration. Pour $A \subset \mathbb{N}$, on pose $f(A) = \sum_{n\in A} 2^{-(n+1)}$. Tout $x \in [0,1]$ admet une écriture binaire $x = 0{,}\varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots$, et $f(\{n : \varepsilon_n = 1\}) = x$: f est surjective. Elle n'est pas injective, car un rationnel dyadique a deux écritures, par exemple $0{,}1000\ldots = 0{,}0111\ldots$

Notons $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$, $\mathcal{C}$ celui des parties cofinies, et D l'ensemble des rationnels dyadiques de $[0,1]$. Si A est finie, $f(A)$ est dyadique ; si A est cofinie, $f(A) = 1 - f(\mathbb{N}\setminus A)$ l'est aussi. Un réel non dyadique a une unique écriture binaire, qui comporte une infinité de 0 et une infinité de 1 ; un réel dyadique n'a que des écritures finies ou terminées par une infinité de 1. Donc f réalise une bijection

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus (\mathcal{F}\cup\mathcal{C}) \longrightarrow [0,1]\setminus D.$$

Les ensembles $\mathcal{F}\cup\mathcal{C}$ et D sont tous deux dénombrables et infinis ; soit g une bijection de l'un sur l'autre. L'application égale à f hors de $\mathcal{F}\cup\mathcal{C}$ et à g sur $\mathcal{F}\cup\mathcal{C}$ est une bijection de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ sur $[0,1]$. □

Au premier étage, chaque point du segment reçoit donc exactement un indice, une partie de $\mathbb{N}$, et chaque point est un point absolu. La question est de savoir ce que devient le point lorsqu'on monte d'un étage, et que l'on indexe un continu par les parties des parties.

3 Le deuxième étage : vocabulaire et lemmes

Dans toute la suite, $\mathbb{K}$ désigne un corps ordonné qui contient $\mathbb{R}$ comme sous-corps ordonné.

Définition 4. Un élément $y \in \mathbb{K}$ est *infinitésimal* si $|y| < 1/n$ pour tout entier $n \geq 1$, et *limité* s'il existe un entier n tel que $|y| < n$. Deux éléments y, z sont *infiniment proches* si $y - z$ est infinitésimal. La *monade* d'un réel x est

$$\mu(x) = \{y \in \mathbb{K} : y - x \text{ est infinitésimal}\}.$$

Un *grain* est un intervalle $[a,\, a+\varepsilon]$ de $\mathbb{K}$, avec $\varepsilon > 0$ infinitésimal ; le nombre ε est son *épaisseur*.

Le corps $\mathbb{K}$ est dit *archimédien* si, pour tout $y \in \mathbb{K}$, il existe un entier $n > y$. Cela revient à dire que 0 est le seul infinitésimal de $\mathbb{K}$. Le lemme suivant est une forme du théorème de Hölder [8].

Lemme 5 (Hölder)**.** *Un corps ordonné archimédien s'injecte dans* $\mathbb{R}$ *en préservant l'ordre. En particulier, il a au plus* $2^{\aleph_0}$ *éléments.*

Démonstration. Soit $\mathbb{K}$ archimédien. Pour $y \in \mathbb{K}$, l'ensemble des rationnels $q < y$ est non vide et majoré, puisqu'il existe des entiers $n > y$ et $m > -y$. On pose $\varphi(y) = \sup\{q \in \mathbb{Q} : q < y\} \in \mathbb{R}$.

Montrons que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{K}$. Si $y < z$, il existe un entier n avec $n(z-y) > 1$, puis un plus petit entier m avec $m > ny$; alors $ny < m \leq ny + 1 < nz$, et le rationnel m/n est strictement entre y et z. On trouve ainsi deux rationnels $q < q'$ avec $y < q < q' < z$. Tout rationnel inférieur à y est inférieur à q, donc $\varphi(y) \leq q$; et $q' < z$, donc $\varphi(z) \geq q'$. Il vient $\varphi(y) < \varphi(z)$: l'application φ est strictement croissante, donc injective. □

Lemme 6 (Ombre)**.** *Tout élément limité* $y \in \mathbb{K}$ *est infiniment proche d'un unique réel, noté* $\mathrm{st}(y)$ *et appelé son* ombre.

Démonstration. L'ensemble $\{r \in \mathbb{R} : r < y\}$ est non vide et majoré dans $\mathbb{R}$, puisque y est limité ; soit s sa borne supérieure. Pour tout $n \geq 1$, le réel $s + 1/n$ n'est pas strictement inférieur à y, donc $y \leq s + 1/n$; et il existe un réel $r > s - 1/n$ avec $r < y$, donc $y > s - 1/n$. Ainsi $|y - s| \leq 1/n$ pour tout n, et y est infiniment proche de s. Deux réels infiniment proches sont égaux, d'où l'unicité. □

4 Le théorème principal

Théorème 7 (Le point absolu est un grain)**.** *Soit E un ensemble infini dénombrable, et soit $\mathbb{K}$ un corps ordonné contenant $\mathbb{R}$, dont les points sont indexés bijectivement par $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$. Alors :*

(i) *$\mathbb{K}$ contient un grain : il existe $\varepsilon \in \mathbb{K}$, $\varepsilon > 0$, tel que $\varepsilon < 1/n$ pour tout entier $n \geq 1$;*

(ii) *aucun grain n'est minimal : tout grain d'épaisseur ε se divise en deux grains d'épaisseur $\varepsilon/2$;*

(iii) *pour tout réel x, l'intersection des intervalles emboîtés est la monade :*

$$\bigcap_{n\geq 1} \left[x - \tfrac{1}{n},\ x + \tfrac{1}{n}\right] = \mu(x),$$

et tout élément de $\mu(x)$ a pour ombre x ;

(iv) *la monade de tout réel x a au moins la puissance du continu : les éléments $x + r\varepsilon$, pour $r \in \mathbb{R}$, sont deux à deux distincts et appartiennent à $\mu(x)$.*

Démonstration. (i) Comme E est dénombrable, $\mathcal{P}(E)$ a $2^{\aleph_0}$ éléments et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$ en a $2^{2^{\aleph_0}}$. Par le théorème de Cantor, $2^{2^{\aleph_0}} > 2^{\aleph_0}$, donc $\mathbb{K}$ a strictement plus d'éléments que $\mathbb{R}$. D'après le lemme 5, $\mathbb{K}$ n'est pas archimédien : il existe $H \in \mathbb{K}$ avec $H > n$ pour tout entier n. L'élément $\varepsilon = 1/H$ vérifie $0 < \varepsilon < 1/n$ pour tout $n \geq 1$.

(ii) On a $0 < \varepsilon/2 < \varepsilon < 1/n$ pour tout n, donc $\varepsilon/2$ est encore infinitésimal. Le grain $[a,\, a+\varepsilon]$ est la réunion des grains $[a,\, a+\varepsilon/2]$ et $[a+\varepsilon/2,\, a+\varepsilon]$.

(iii) Un élément y appartient à tous les intervalles $[x - 1/n,\, x + 1/n]$ si et seulement si $|y - x| \leq 1/n$ pour tout n, c'est-à-dire si et seulement si $y - x$ est infinitésimal, soit $y \in \mu(x)$. Un tel y est limité, et le réel x lui est infiniment proche ; par l'unicité du lemme 6, $\mathrm{st}(y) = x$.

(iv) Si $r \neq s$ sont deux réels, alors $(r-s)\varepsilon \neq 0$, donc $x + r\varepsilon \neq x + s\varepsilon$. Pour tout entier $n \geq 1$, on a $|r\varepsilon| \leq (|r|+1)\,\varepsilon < 1/n$, en appliquant (i) à l'entier $n(\lfloor |r| \rfloor + 1)$. Donc $x + r\varepsilon \in \mu(x)$, et $r \mapsto x + r\varepsilon$ est une injection de $\mathbb{R}$ dans $\mu(x)$. □

Corollaire 8. *Dans un corps $\mathbb{K}$ vérifiant les hypothèses du théorème 7, aucun point n'est un point absolu.*

Démonstration. Soit $y \in \mathbb{K}$ et ε un infinitésimal strictement positif. Pour tout n, $|(y+\varepsilon) - y| = \varepsilon < 1/n$, donc $y + \varepsilon \neq y$ appartient à l'intersection des intervalles $[y - 1/n,\, y + 1/n]$, qui n'est pas réduite à $\{y\}$. □

Interprétation. Dans $\mathbb{R}$, la division d'un intervalle, poursuivie à toutes les échelles réelles, aboutit à un point sans épaisseur. Dans $\mathbb{K}$, elle aboutit à la monade $\mu(x)$, qui contient une copie du continu, $\{x + r\varepsilon : r \in \mathbb{R}\}$, et dont tous les éléments ont pour ombre x. Ce que l'on prend, à l'échelle réelle, pour le point x est l'ombre d'un grain. Ce grain n'a pas de grain minimal : il se divise sans fin, comme la ligne d'Aristote. Le point absolu n'est donc pas un atome du continu ; c'est un grain vu de trop loin.

5 Cardinal et épaisseur

Le tableau suivant résume les deux étages.

Étage	Indices	Cardinal	Continu	Ce qu'est un point
premier	$\mathcal{P}(E)$	$2^{\aleph_0}$	$[0,1] \subset \mathbb{R}$	un point absolu, d'épaisseur nulle
second	$\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$	$2^{2^{\aleph_0}}$	$\mathbb{K}$	un grain, la monade $\mu(x)$

Remarque (L'épaisseur est un nombre, non un cardinal). On pourrait être tenté d'écrire l'épaisseur d'un grain sous la forme $1/2^{\aleph_0}$. Mais l'arithmétique des cardinaux est idempotente : $2 \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$. Un grain dont l'épaisseur serait ainsi définie vérifierait $\varepsilon/2 = \varepsilon$: il serait indivisible, c'est-à-dire un point absolu. C'est pourquoi l'épaisseur ε est prise dans le corps $\mathbb{K}$, où $\varepsilon/2 \neq \varepsilon$. Le cardinal compte les points ; l'épaisseur se calcule dans le corps.

Remarque (Le cardinal force les grains sans fixer leur épaisseur). Le théorème 7 assure l'existence de grains, mais ne désigne pas une épaisseur particulière : si ε est infinitésimal, $\varepsilon/2$, ε^2 ou $2^{-1/\varepsilon}$ le sont aussi, lorsqu'ils existent dans $\mathbb{K}$. L'épaisseur effective d'un grain dépend de la résolution choisie, non du cardinal.

L'hypothèse de cardinal est d'ailleurs suffisante mais non nécessaire. Le corps $\mathbb{R}(t)$ des fractions rationnelles, ordonné de sorte que $0 < t < r$ pour tout réel $r > 0$, est non archimédien et n'a que $2^{\aleph_0}$ éléments. Le théorème établit seulement que, au-delà de $2^{\aleph_0}$ points, un continu ordonné en corps ne peut plus avoir de points absolus.

Remarque (Existence). Le théorème n'est pas vide : de tels corps existent. Si $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre régulier sur $\mathbb{R}$, l'ultrapuissance $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}/\mathcal{U}$ est un corps ordonné contenant $\mathbb{R}$, de cardinal $(2^{\aleph_0})^{2^{\aleph_0}} = 2^{2^{\aleph_0}}$ d'après le théorème de Frayne, Morel et Scott [5]. Le contenu du théorème 7 ne dépend toutefois d'aucune construction particulière : il vaut pour tout continu ordonné en corps indexé par le second étage.

6 Application : la distribution de Dirac

La masse de Dirac en un point x est l'objet qui associe à une fonction f la valeur $f(x)$. On l'écrit souvent comme une « fonction » nulle hors de x et d'intégrale égale à 1, ce qui n'a pas de sens pour une fonction réelle ; Schwartz l'a rendue rigoureuse comme distribution [10]. Dans un continu de grains, elle redevient une densité ordinaire.

Exemple 9. Soit x un réel, $\varepsilon > 0$ un infinitésimal de $\mathbb{K}$, et $G = [x,\, x+\varepsilon]$ le grain d'épaisseur ε issu de x. On définit sur $\mathbb{K}$ la densité

$$\delta_\varepsilon(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon} & \text{si } t \in G, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Sa masse totale vaut $\dfrac{1}{\varepsilon} \cdot \varepsilon = 1$: c'est la relation fondamentale $L = |L| \cdot \varepsilon$ de la théorie du grain [7], appliquée à une masse.

Soit f une fonction polynomiale à coefficients réels, de degré d. Son intégrale sur G se calcule dans $\mathbb{K}$ par une primitive, et la formule de Taylor, exacte pour un polynôme, donne $f(x+t) = \sum_{j=0}^{d} f^{(j)}(x)\, t^j/j!$. On obtient la moyenne de f sur le grain :

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_x^{x+\varepsilon} f(t)\,dt = \sum_{j=0}^{d} \frac{f^{(j)}(x)}{(j+1)!}\,\varepsilon^j = f(x) + \frac{\varepsilon}{2}\,f'(x) + \frac{\varepsilon^2}{6}\,f''(x) + \cdots$$

Chaque terme d'indice $j \geq 1$ est le produit d'un réel par une puissance de ε, donc infinitésimal ; leur somme finie l'est aussi. Par le lemme 6,

$$\operatorname{st}\left(\int_{\mathbb{K}} f\,\delta_\varepsilon\right) = f(x) = \langle \delta_x, f \rangle.$$

À l'échelle réelle, la masse de Dirac est concentrée en un point. À l'échelle de $\mathbb{K}$, c'est une densité finie, $1/\varepsilon$, répartie sur un grain d'épaisseur ε, contenu dans la monade $\mu(x)$, qui a la puissance du continu. L'ombre du résultat ne dépend pas de l'infinitésimal choisi : la distribution est l'ombre commune de tous ces grains.

Remarque. Le calcul est mené pour les polynômes, parce qu'il ne demande alors aucun outil supplémentaire : l'intégrale d'un polynôme se définit dans tout corps par une primitive. L'extension aux fonctions continues demande de préciser comment une fonction réelle se prolonge aux grains ; c'est le seul point où un cadre plus riche que le seul corps $\mathbb{K}$ devient nécessaire.

Conclusion

La définition de l'infini par l'indexation du continu se prolonge naturellement d'un étage. Au premier, les parties d'un ensemble dénombrable indexent bijectivement le segment réel, dont chaque point est un point absolu. Au second, un continu ordonné en corps, indexé bijectivement par les parties des parties, est non archimédien : ce que l'on prend pour un point y est l'ombre d'un grain, qui contient une copie du continu et se divise sans fin. Le point absolu n'est pas un constituant ultime du continu, mais un grain vu à l'échelle réelle. La distribution de Dirac en donne une illustration : la masse ponctuelle y devient une densité finie répartie sur un grain.

Références

[1] Aristote, *Physique*, livre VI.

[2] G. Cantor, « Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre », *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 1891.

[3] P. A. M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, Oxford, 1930.

[4] Euclide, *Éléments*, livre I, définitions.

[5] T. Frayne, A. Morel, D. Scott, « Reduced direct products », *Fundamenta Mathematicae* 51, 1962.

[6] H. Genvrin, *Définir l'infini par l'indexation du continu*, 2026.

[7] H. Genvrin, *Théorie du grain*, 2026.

[8] O. Hölder, « Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Mass », *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig*, 1901.

[9] A. Robinson, *Non-standard Analysis*, North-Holland, 1966.

[10] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, Hermann, 1950.