

Quotienter un continu par une mesure identiquement nulle

Un raisonnement valide, une conclusion tautologique,
et le phénomène véritable

Hugues GENVRIN

10 septembre 2026

Résumé

On examine l'argument suivant : sur un continu où la mesure μ est identiquement nulle, la relation $X \mathcal{R} Y \Leftrightarrow \mu(X) = \mu(Y)$ identifie tous les points en une seule classe. On montre que le raisonnement est *formellement correct*, mais que sa conclusion ne dépend d'aucune propriété propre à la mesure : elle vaut pour n'importe quelle fonction constante, et repose sur une confusion entre *égalité de valeurs* et *égalité d'arguments*. On dégage ensuite le phénomène réellement en jeu : le passage au quotient *modulo les ensembles négligeables* ne produit pas un point, mais une algèbre de mesure sans atomes. La même analyse s'applique à la variante métrique (peut-on écrire $d(X, O) = 0$?) : la conclusion est l'axiome de réflexivité sur un espace déjà réduit à un point, et l'objet correspondant sur le continu est le pseudo-métrique nul, dont la version non dégénérée est l'identification métrique des espaces L^p .

1 L'énoncé examiné

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, que l'on pense comme un « continu » (par exemple $E = [-a, a]$ muni de la mesure de Lebesgue, ou une variante). On considère l'argument suivant.

Supposons $\mu(X) = 0$ pour tout X . Alors $\mu(X) = \mu(O)$ pour tout X , donc $X \equiv O$ via la relation d'équivalence $X \mathcal{R} Y \Leftrightarrow \mu(X) = \mu(Y)$. Dans l'espace quotient modulo la mesure, tous les points sont donc équivalents.

2 Le raisonnement est valide

Il n'y a ici aucune faute de logique.

Lemme 1. Soit $f : E \rightarrow F$ une application quelconque. La relation $X \mathcal{R}_f Y \Leftrightarrow f(X) = f(Y)$ est une relation d'équivalence sur E , et ses classes sont exactement les fibres $f^{-1}(\{v\})$, $v \in \text{Im } f$.

Démonstration. Réflexivité, symétrie et transitivité de $\mathcal{R}_f$ se déduisent immédiatement de celles de l'égalité sur F . Une classe de X est $\{Y : f(Y) = f(X)\} = f^{-1}(\{f(X)\})$. $\square$

En appliquant ceci à $f = \mu$ constante égale à 0, il n'existe qu'une seule fibre, $\mu^{-1}(\{0\}) = E$, donc le quotient $E/\mathcal{R}$ est un singleton. La conclusion est **vraie**.

3 Mais elle est tautologique

Le point crucial est que la démonstration n'utilise aucune propriété spécifique de μ : ni l'additivité, ni la positivité, ni le lien avec une quelconque notion de taille. Elle utilise uniquement que μ est **constante**.

Proposition 1. Soit $f : E \rightarrow F$ une application constante. Alors $E/\mathcal{R}_f$ est un singleton. Réciproquement, si $E \neq \emptyset$ et $E/\mathcal{R}_f$ est un singleton, alors f est constante.

Démonstration. Si $f \equiv c$, l'unique fibre est $f^{-1}(\{c\}) = E$. Réciproquement, une seule classe signifie une seule fibre non vide, donc $\text{Im } f$ est un singleton. $\square$

Remarque. La conclusion « tous les points sont équivalents » est donc *logiquement équivalente* à « μ est constante ». Remplacer μ par la fonction constante $f \equiv 42$ produit exactement le même effondrement. Les mots « mesure », « continu » et le symbole « 0 » ne jouent aucun rôle : ils sont décoratifs.

4 Le glissement sur le symbole $\equiv$

L'apparente profondeur de l'argument tient à une oscillation entre deux lectures de « $X \equiv O$ ».

- (a) $\equiv$ **signifie $\mathcal{R}$ -équivalent**. Alors l'équivalence $\mu(X) = \mu(O) \Leftrightarrow X \equiv O$ est la *définition même* de $\mathcal{R}$. L'énoncé est vrai mais circulaire, et ne dit rien de plus que « μ est constante ».
- (b) $\equiv$ **signifie égalité des points**, $X = O$. Alors l'implication $\mu(X) = \mu(O) \Rightarrow X = O$ exige que μ soit *injective*. Or une fonction constante est le comble de la non-injectivité. L'implication est donc **fausse**.

Lire une égalité de valeurs comme une égalité d'arguments requiert la **séparation** (l'injectivité), qui est précisément l'hypothèse absente. C'est le même défaut que pour une pseudo-distance $d(A, B) = |AB| - |AB| \equiv 0$: l'axiome $d(A, B) = 0 \Rightarrow A = B$ échoue justement là.

Remarque (Être dans la même classe $\neq$ être le même point). Le quotient a beau n'avoir qu'un élément, l'espace E n'a pas bougé. La projection canonique $\pi : E \rightarrow E/\mathcal{R}$ est la surjection constante : elle atterrit sur un point *parce qu'elle oublie toute l'information*, non parce que son domaine serait réduit à un point.

5 Le phénomène véritable : quotienter par le négligeable

L'intuition sous-jacente — « modulo la mesure, les points s'évanouissent » — est correcte, mais elle se formalise autrement. On ne quotiente pas les *points* entre eux ; on quotiente les *ensembles mesurables* en déclarant négligeables leurs différences de mesure nulle.

Définition. Sur $\mathcal{A}$, on pose

$$A \sim B \iff \mu(A \triangle B) = 0,$$

où $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ est la différence symétrique. Le quotient $\mathfrak{M} = \mathcal{A}/\sim$ est l'**algèbre de mesure** de $(E, \mathcal{A}, \mu)$.

Ce quotient est une algèbre de Boole ($\vee, \wedge, \neg$ passent au quotient), munie de la mesure $\bar{\mu}([A]) = \mu(A)$ bien définie. Les points, eux, disparaissent : dans $L^p([0, 1])$, la « valeur en un point » n'a aucun sens, car les singletons sont négligeables. Mais le résultat n'est pas un point :

Proposition 2 (Absence d'atomes). Pour la mesure de Lebesgue λ sur $[0, 1]$, l'algèbre de mesure $\mathfrak{M}$ est sans atomes : pour toute classe $[A]$ avec $\lambda(A) > 0$, il existe $B \subset A$ mesurable tel que

$$0 < \lambda(B) < \lambda(A).$$

Démonstration. La fonction $t \mapsto g(t) = \lambda(A \cap [0, t])$ est continue (continuité absolue de l'intégrale de Lebesgue), avec $g(0) = 0$ et $g(1) = \lambda(A) > 0$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe t_0 tel que $g(t_0) = \frac{1}{2}\lambda(A)$. Alors $B = A \cap [0, t_0]$ convient : on a bien $0 < \lambda(B) = \frac{1}{2}\lambda(A) < \lambda(A)$. $\square$

Remarque (Sans points $\neq$ un seul point). L'effondrement de l'argument initial vers *un* point ne vient que du choix de l'invariant le plus aveugle possible (la mesure des singletons, tous nuls). Nourrie honnêtement de tous les mesurables, la relation produit un objet *sans atomes*, extraordinairement riche : un objet « sans points » au sens de la topologie sans points, et non un point unique.

6 Ce que le quotient détecte réellement

L'unique information non triviale extraite par l'argument est la **non-atomicité** de μ : aucun point ne porte de masse.

Proposition 3. *Le quotient de l'argument (par la seule mesure des singletons) s'effondre en un point si et seulement si $\mu(\{x\}) = \mu(\{y\})$ pour tous x, y . En particulier, s'il existe un atome, c'est-à-dire un point p avec $\mu(\{p\}) > 0$ tandis que $\mu(\{x\}) = 0$ pour $x \neq p$, alors le quotient possède au moins deux classes et ne s'effondre pas.*

Ainsi l'effondrement, dans sa pauvreté, n'est qu'un certificat que la mesure est *diffuse*. C'est une propriété de μ , non de l'identité des points.

7 La variante métrique : peut-on écrire $d(X, O) = 0$?

Une objection naturelle : ne peut-on pas munir le quotient $E/\mathcal{R}$ d'une métrique (fût-elle triviale) afin d'écrire légitimement $d(X, O) = 0$? La réponse est oui, mais elle reproduit exactement le schéma précédent : l'énoncé est vrai, il est l'*axiome* de réflexivité, et il ne porte pas sur les points de E .

Sur le quotient : la réflexivité, non un résultat

Le quotient $E/\mathcal{R}$ est un singleton $\{*\}$. Sur un ensemble à un point, il existe une *unique* métrique, imposée par l'axiome $d(p, p) = 0$:

$$d(*, *) = 0.$$

Or, par définition de $\mathcal{R}$, on a déjà $[X] = [O] = *$. L'égalité invoquée est donc

$$d([X], [O]) = d(*, *) = 0,$$

c'est-à-dire la réflexivité appliquée à un point avec lui-même. Elle ne dit rien de X et de O , et vaut pour *toute* métrique (triviale, discrète, ...).

L'abus de notation $d(X, O)$

Les objets X, O vivent dans E ; la métrique d est définie sur $E/\mathcal{R}$. L'expression « $d(X, O)$ » n'est pas définie : ce qui l'est, c'est $d(\pi(X), \pi(O))$, où $\pi : E \rightarrow E/\mathcal{R}$ est la projection canonique. Écrire $d(X, O) = 0$ identifie silencieusement les points du continu et ceux du quotient — la même oscillation que « $X \equiv O$ » entre *même classe* et *même point*.

Le tiré-en-arrière sur E n'est pas une métrique

L'alternative honnête consiste à ramener d sur E en posant

$$\tilde{d}(X, Y) := d(\pi(X), \pi(Y)) = 0 \quad \text{pour tous } X, Y.$$

Alors $\tilde{d}(X, O) = 0$ est bien une assertion sur X et O . Mais $\tilde{d}$ n'est **pas** une métrique : c'est le **pseudo-métrique nul** (un *écart*). Il vérifie $\tilde{d}(x, x) = 0$, la symétrie et l'inégalité triangulaire, mais il rate précisément la séparation :

$$\tilde{d}(X, Y) = 0 \implies X = Y \quad (\text{faux ici}).$$

C'est exactement l'axiome qu'il faudrait pour conclure $X = O$; et c'est exactement l'axiome absent. On retrouve mot pour mot la pseudo-distance $d(A, B) = |AB| - |AB| \equiv 0$.

La version rigoureuse : identification métrique (quotient de Kolmogorov)

L'intuition n'est pas gratuite : elle est le cas dégénéré d'une construction centrale. Partant d'un *pseudo-métrique* $(E, \tilde{d})$, on pose

$$X \sim Y \iff \tilde{d}(X, Y) = 0.$$

Proposition 4 (Descente en une vraie métrique). *La relation $\sim$ est une relation d'équivalence, et l'application*

$$\bar{d}([X], [Y]) := \tilde{d}(X, Y)$$

est bien définie sur $E/\sim$ et $\bar{d}$ est une métrique (séparée).

Démonstration. La réflexivité vient de $\tilde{d}(X, X) = 0$; la symétrie, de celle de $\tilde{d}$; la transitivité, de l'inégalité triangulaire : si $\tilde{d}(X, Y) = 0$ et $\tilde{d}(Y, Z) = 0$, alors $0 \leq \tilde{d}(X, Z) \leq \tilde{d}(X, Y) + \tilde{d}(Y, Z) = 0$. Bonne définition : si $X \sim X'$ et $Y \sim Y'$, l'inégalité triangulaire donne $|\tilde{d}(X, Y) - \tilde{d}(X', Y')| \leq \tilde{d}(X, X') + \tilde{d}(Y, Y') = 0$, donc $\tilde{d}(X, Y) = \tilde{d}(X', Y')$. Enfin la séparation : $\bar{d}([X], [Y]) = 0$ signifie $\tilde{d}(X, Y) = 0$, c'est-à-dire $X \sim Y$, soit $[X] = [Y]$. $\square$

La séparation, absente en haut, est *vérifiée en bas par construction*.

Exemple (Les espaces L^p). C'est littéralement ainsi que les L^p deviennent métriques. La quantité $\|f - g\|_p$ n'est qu'un pseudo-métrique : deux fonctions égales presque partout sont à distance nulle sans être égales. On quotiente par « distance nulle » — soit exactement par « égales presque partout » — pour obtenir une vraie métrique sur les classes. Ici encore, *les points de départ (les fonctions) ne sont pas identifiés en un seul* : le quotient est l'espace L^p tout entier, richement structuré.

Remarque (Le cas dégénéré). La situation examinée est l'instance $\tilde{d} \equiv 0$: le quotient est un point, et la métrique induite dessus est la métrique triviale à un point. Correct et standard, mais cela ne dit rien de plus que « l'écart de départ était nul ». Comme pour la mesure, l'effondrement mesure la **pauvreté de l'écart choisi**, non la géométrie de E .

Conclusion

Le raisonnement est **valide** et sa conclusion **vraie**, mais **tautologiquement** : elle équivaut à « μ est constante » et vaut pour toute fonction constante. Elle ne dit rien de la géométrie du continu.

Le phénomène profond visé — l'évanouissement des points modulo le négligeable — existe, mais il produit une **algèbre de mesure sans atomes** (un espace « sans points »), et non un point unique.

De même, munir le quotient d'une métrique et écrire $d(X, O) = 0$ n'invoque que la **réflexivité** sur un espace déjà réduit à un point ; sur le continu, l'objet correspondant est le **pseudo-métrique nul**, non séparé — dont la version non dégénérée, l'**identification métrique**, fonde les espaces L^p .