Rectification stratale du cercle : statut de π

Constructibilité en $2n_\infty$ étapes et obstacle de courbure

Hugues Genvrin

3 juin 2026

Préambule

Ce document établit un théorème de rectification stratale du cercle dans l'axiomatique du programme du grain. Le résultat central est que la rectification du cercle, impossible en un nombre fini d'étapes (Lindemann-Wantzel) et achevée seulement à la limite ordinale dénombrable ω dans ZFC (au sens d'un infini potentiel), devient *réalisable exactement en* $2n_\infty$ *étapes* dans l'axiomatique stratale, mais demeure *impossible en* n_∞ *étapes.*

L'obstacle structurel est précisément identifié : c'est la *courbure non nulle* du cercle à l'infini au niveau de résolution $\mathcal{G}_{+n_\infty}$, qui devient *nulle stratale* au niveau $\mathcal{G}_{+2n_\infty}$, où le cercle géant s'identifie à la droite à l'infini.

Logique d'infini achevé. Le document opère dans la logique de l'*infini achevé stratal* du programme du grain. Les niveaux n_∞ et $2n_\infty$ ne sont pas des étapes intermédiaires d'une suite croissante : ce sont des *niveaux stratals achevés.* L'analyse n'utilise donc pas de développements de Taylor pour calculer des erreurs résiduelles : à un niveau stratal achevé, la construction n'est pas approximative, elle est exacte ou impossible selon le niveau.

Compatibilité avec Lindemann-Wantzel. Le résultat ne contredit pas les théorèmes classiques de transcendance. π reste *transcendant au sens classique* (racine d'aucun polynôme à coefficients rationnels de degré fini). Il acquiert simplement un nouveau statut dans l'axiomatique stratale : *algébrique stratal de degré* 2^{2n_∞}, au sens d'une notion d'extension propre au programme.

Référence implicite. Programme du grain (Volumes I-III), le document classique *Interprétations de la rectification du cercle par bissection itérée*, et les notes sur la métrique stratale et l'exponentielle complexe.

1 Rappel de la construction par bissection

1.1 Le procédé

On rappelle la construction classique. Partant d'un cercle C_1 de rayon $\rho_1 = 1$ et d'un arc d'angle $\theta_1 = \pi$, on construit une suite de cercles (C_k) par doublement du rayon et bissection de l'angle :

$$\rho_k = 2^{k-1}, \quad \theta_k = \frac{\pi}{2^{k-1}}.$$

La corde rectifiée à l'étape k vaut :

$$y_{S_k} = 2\rho_k \sin(\theta_k/2) = 2^k \sin\left(\frac{\pi}{2^k}\right).$$

1.2 Statut classique et statut stratal

Dans ZFC, la suite (y_{S_k}) converge vers π quand $k \to \infty$, au sens d'une limite topologique à l'ordinal ω. π n'est pas constructible en un nombre fini d'étapes (Wantzel), et il n'appartient pas à la tour algébrique L_ω (Lindemann).

Remarque 1 (Changement de logique)**.** *Dans l'axiomatique stratale, la suite (y_{S_k}) ne se déploie pas selon un infini potentiel limite, mais selon une* hiérarchie stratale d'infinis achevés. *Les niveaux pertinents pour la rectification sont $\mathcal{G}_{+n_\infty}$ (cercle à l'infini) et $\mathcal{G}_{+2n_\infty}$ (cercle géant). À ces niveaux, la rectification n'est pas une approximation à examiner, c'est une construction qui est* soit achevée, soit impossible.

2 Reformulation stratale

2.1 Les niveaux de résolution pertinents

Définition 1 (Niveaux stratals ascendants pour la rectification)**.** *On distingue deux niveaux stratals significatifs pour la rectification :*

— *Le* cercle à l'infini *C_{n_∞}, de rayon $\rho_{n_\infty} = 2^{n_\infty - 1}$, vit au niveau $\mathcal{G}_{+n_\infty}$. Sa factorisation est :*

$$(2\pi \cdot 2^{n_\infty},\ 2^{n_\infty},\ 2\pi).$$

Il comporte 2^{n_∞} grains d'épaisseur élémentaire 2π.

— *Le* cercle géant *C_{2n_∞}, de rayon $\rho_{2n_\infty} = 2^{2n_\infty - 1}$, vit au niveau $\mathcal{G}_{+2n_\infty}$. Il* est *la droite à l'infini stratale (et non son approximation).*

2.2 Courbure stratale et identification à la droite

Proposition 1 (Statut de la courbure)**.** *La courbure des cercles C_{n_∞} et C_{2n_∞} a un statut stratal différent :*

— *Au niveau $\mathcal{G}_{+n_\infty}$, la courbure de C_{n_∞} vaut $1/\rho_{n_\infty} = 1/2^{n_\infty - 1}$. Cette courbure est* non nulle *: c'est un infinitésimal de niveau n_∞ qui demeure détectable au niveau $\mathcal{G}_{+n_\infty}$ lui-même.*

— *Au niveau $\mathcal{G}_{+2n_\infty}$, la courbure de C_{2n_∞} vaut $1/\rho_{2n_\infty} = 1/2^{2n_\infty - 1}$. Cette courbure est* nulle stratale *au niveau $\mathcal{G}_{+n_\infty}$ (infinitésimal d'ordre supérieur).*

Remarque 2 (Cercle géant = droite à l'infini)**.** *Le cercle géant C_{2n_∞} a une courbure nulle stratale au niveau $\mathcal{G}_{+n_\infty}$, ce qui signifie qu'il est* indistinguable d'une droite *à ce niveau de résolution. Dans la logique de l'infini achevé stratal, cette indistinguabilité n'est pas une approximation : c'est une* identification stratale exacte.

Le cercle géant est *donc la droite à l'infini, et non son approximation.*

2.3 Valeurs stratales de la corde rectifiée

Dans la logique stratale, le sinus d'un infinitésimal stratal de niveau k est, par construction de la métrique stratale, égal à l'infinitésimal lui-même au niveau de résolution considéré. Cette identité n'est pas approximative, elle est structurelle.

Proposition 2 (Corde rectifiée au niveau n_∞)**.** *À l'étape $k = n_\infty$, la corde rectifiée vaut :*

$$y_{S_{n_\infty}} = 2^{n_\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2^{n_\infty}}\right).$$

La valeur $\pi/2^{n_\infty}$ est un infinitésimal de niveau n_∞, mais le cercle C_{n_∞} conserve une courbure non nulle *à ce niveau. La sinusoïde n'est donc pas linéarisée stratalement, et l'écart entre $y_{S_{n_\infty}}$ et π* est significatif *dans $\widetilde{\mathbb{R}}_{|1}$: la rectification n'est pas achevée.*

Proposition 3 (Corde rectifiée au niveau $2n_\infty$)**.** *À l'étape $k = 2n_\infty$, la corde rectifiée vaut :*

$$y_{S_{2n_\infty}} = 2^{2n_\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2^{2n_\infty}}\right).$$

La valeur $\pi/2^{2n_\infty}$ est un infinitésimal de niveau $2n_\infty$, et le cercle C_{2n_∞} a une courbure nulle stratale *au niveau $\mathcal{G}_{+n_\infty}$. Le cercle géant s'identifie à la droite à l'infini, et la sinusoïde devient linéaire stratale :*

$$\sin\left(\frac{\pi}{2^{2n_\infty}}\right) = \frac{\pi}{2^{2n_\infty}} \quad \textit{(égalité stratale exacte).}$$

Par conséquent :

$$y_{S_{2n_\infty}} = 2^{2n_\infty} \cdot \frac{\pi}{2^{2n_\infty}} = \pi.$$

La rectification est exacte *dans $\widetilde{\mathbb{R}}_{|2}$.*

3 Le théorème central : impossibilité en n_∞ étapes

3.1 Énoncé

Théorème 1 (Rectification stratale impossible en n_∞ étapes)**.** *Dans l'axiomatique du programme du grain, la rectification du cercle C_1 est* impossible en n_∞ étapes *de bissection itérée.*

L'obstacle structurel est la courbure non nulle *du cercle à l'infini C_{n_∞} au niveau de résolution $\mathcal{G}_{+n_\infty}$.*

Plus précisément : tant que la courbure est non nulle, le cercle n'est pas une droite, et la sinusoïde n'est pas linéarisée stratale. La corde rectifiée $y_{S_{n_\infty}}$ ne peut donc pas être égale à π dans $\widetilde{\mathbb{R}}_{|1}$.

3.2 Démonstration

Démonstration. **Étape 1.** Par la Proposition 1, la courbure de C_{n_∞} au niveau $\mathcal{G}_{+n_\infty}$ vaut $1/2^{n_\infty - 1}$, infinitésimal de niveau n_∞ mais *non nul* à ce niveau.

Étape 2. Une courbure non nulle implique que le cercle reste distinct de la droite : C_{n_∞} est un cercle authentique au niveau $\mathcal{G}_{+n_\infty}$, pas une droite déguisée.

Étape 3. Sur un cercle authentique, la fonction sin n'est pas linéaire : l'identité $\sin(u) = u$ n'est pas exacte stratalement quand la courbure du support sous-jacent est non nulle. Donc

$$\sin\left(\frac{\pi}{2^{n_\infty}}\right) \neq \frac{\pi}{2^{n_\infty}} \quad (\text{au niveau } \mathcal{G}_{+n_\infty}).$$

Étape 4. Par conséquent :

$$y_{S_{n_\infty}} = 2^{n_\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2^{n_\infty}}\right) \neq 2^{n_\infty} \cdot \frac{\pi}{2^{n_\infty}} = \pi.$$

La rectification n'est pas achevée à l'étape n_∞, et la différence $\pi - y_{S_{n_\infty}}$ est *détectable* dans $\widetilde{\mathbb{R}}_{|1}$.

Conclusion. L'obstacle structurel à la rectification au niveau $\mathcal{G}_{+n_\infty}$ est la courbure non nulle du cercle à l'infini. Tant que cette courbure n'a pas été ramenée à zéro stratale, la rectification reste incomplète. □

3.3 Lecture conceptuelle

Remarque 3 (L'obstacle géométrique)**.** *Cette démonstration identifie précisément ce qui empêche la rectification au niveau $\mathcal{G}_{+n_\infty}$: non pas une erreur résiduelle dans une suite de Taylor, mais l'*obstacle géométrique intrinsèque *de la courbure non nulle. Tant qu'une courbure existe au niveau de résolution considéré, le cercle reste un cercle, et sa rectification reste impossible.*

L'obstacle est donc structurel, *pas un artefact du procédé. Aucune amélioration du procédé de bissection ne pourrait franchir cet obstacle au niveau $\mathcal{G}_{+n_\infty}$, car la courbure persiste quel que soit le procédé.*

4 Rectification stratale en $2n_\infty$ étapes

4.1 Énoncé

Théorème 2 (Rectification stratale exacte en $2n_\infty$ étapes)**.** *Dans l'axiomatique du programme du grain, la rectification du cercle C_1 est* exactement réalisable en $2n_\infty$ étapes *de bissection itérée. Au niveau $\mathcal{G}_{+2n_\infty}$, la courbure du cercle géant C_{2n_∞} est nulle stratale au niveau $\mathcal{G}_{+n_\infty}$, et l'obstacle structurel disparaît.*

Plus précisément, la corde rectifiée $y_{S_{2n_\infty}}$ vaut π exactement :

$$y_{S_{2n_\infty}} = \pi \quad \textit{(égalité stratale dans } \widetilde{\mathbb{R}}_{|2}\textit{).}$$

4.2 Démonstration

Démonstration. **Étape 1.** Par la Proposition 1, la courbure de C_{2n_∞} vaut $1/2^{2n_\infty - 1}$, infinitésimal d'ordre $2n_\infty$. Au niveau $\mathcal{G}_{+n_\infty}$, cette courbure est *nulle stratale* (infinitésimale d'ordre supérieur à la finesse du niveau considéré).

Étape 2. Avec courbure nulle stratale, le cercle géant C_{2n_∞} *est* la droite à l'infini stratale. Cette identification n'est pas approximative : c'est une égalité stratale au niveau de résolution considéré.

Étape 3. Sur une droite (courbure nulle), la fonction sin est linéaire au sens stratal : pour tout infinitésimal u de niveau adéquat, $\sin(u) = u$ exactement.

Donc :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2^{2n_\infty}}\right) = \frac{\pi}{2^{2n_\infty}} \quad \text{(égalité stratale exacte).}$$

Étape 4. Par conséquent :

$$y_{S_{2n_\infty}} = 2^{2n_\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2^{2n_\infty}}\right) = 2^{2n_\infty} \cdot \frac{\pi}{2^{2n_\infty}} = \pi.$$

L'égalité $y_{S_{2n_\infty}} = \pi$ est exacte dans $\widetilde{\mathbb{R}}_{|2}$. □

4.3 Caractère exact de l'égalité

Remarque 4 (Égalité stratale exacte, non approximative)**.** *La rectification en $2n_\infty$ étapes* n'est pas *une approximation infinitésimale. C'est une égalité exacte au niveau stratal $\widetilde{\mathbb{R}}_{|2}$. La logique d'infini achevé du programme du grain permet de traiter $2n_\infty$ comme un niveau achevé où la construction est terminée, et non comme une étape intermédiaire avec erreur résiduelle.*

Cette différence est cruciale par rapport à la logique d'infini potentiel de ZFC, où π n'est jamais atteint qu'à la limite, sans égalité exacte à aucune étape finie.

5 Statut stratal de π et théorèmes de transcendance

5.1 π comme élément constructible stratal

Proposition 4 (Statut de π par rectification)**.** *La rectification stratale établit que π est un élément de $\widetilde{\mathbb{R}}_{|2}$ obtenu par construction effective en $2n_\infty$ étapes :*

$$\pi = y_{S_{2n_\infty}} \in \widetilde{\mathbb{R}}_{|2}.$$

Cette construction place π dans la tour d'extensions algébriques stratales L_{2n_∞} de degré 2^{2n_∞} sur $\mathbb{Q}$:

$$\pi \in L_{2n_\infty}, \quad [L_{2n_\infty} : \mathbb{Q}] = 2^{2n_\infty}.$$

5.2 Compatibilité avec Lindemann-Wantzel

Remarque 5 (Deux notions de transcendance)**.** *La Proposition 4 ne contredit pas le théorème de Lindemann sur la transcendance de π. Il faut distinguer soigneusement deux notions :*

- Transcendance classique (Lindemann, ZFC) *: π n'est racine d'aucun polynôme à coefficients dans $\mathbb{Q}$ de* degré fini. *Cette propriété reste valide dans l'axiomatique stratale, car elle concerne uniquement les polynômes à degré entier classique.*
- Algébricité stratale *: π appartient à L_{2n_∞}, extension stratale de $\mathbb{Q}$ de degré 2^{2n_∞}. Cette propriété est propre à l'axiomatique stratale et utilise une notion de polynôme à degré stratal, absente de ZFC.*

Ces deux notions ne sont pas comparables directement *: elles opèrent dans des cadres axiomatiques différents avec des définitions différentes de « polynôme » et « algébrique ». Il n'y a donc aucune contradiction.*

5.3 La distinction degré fini / degré stratal

Remarque 6 (Pourquoi la distinction est essentielle)**.** *La notion classique de polynôme exige un degré* fini *(entier naturel standard). Cette restriction est cruciale pour que la notion d'algébricité ait un contenu discriminant : sans elle, tout réel serait « algébrique » au sens trivial (racine d'un polynôme de degré non standard).*

Lindemann démontre que π n'est pas racine d'un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Q}$ de degré fini. *Le théorème porte sur cette classe précise de polynômes.*

Dans l'axiomatique stratale, l'admission de polynômes à degré stratal 2^{2n_∞} est une extension conceptuelle *qui ne contredit pas Lindemann : elle introduit simplement une nouvelle notion d'« algébrique » qui n'est pas comparable au sens classique.*

6 Dualité avec le cercle unité du plan complexe stratal

6.1 Deux apparitions de π

Remarque 7 (Deux apparitions distinctes)**.** *π apparaît dans le programme du grain sous deux formes géométriquement distinctes :*

- *Par* rectification ascendante *: π comme valeur de la corde rectifiée au niveau $\mathcal{G}_{+2n_\infty}$ (présent document).*
- *Par* structure cyclique descendante *: π comme invariant du cercle unité du plan complexe stratal, identifié au quotient $\mathcal{G}_{-n_\infty}/\mathcal{G}_{-2n_\infty}$ (cf. document sur l'exponentielle complexe).*

Ces deux apparitions correspondent à des niveaux stratals opposés *(ascendant vs descendant) et ne sont pas immédiatement identifiables.*

6.2 La dualité δ_2 du Volume II

Proposition 5 (Identification par dualité)**.** *La bijection canonique $\delta_2 : \mathcal{G}_{+2n_\infty} \to \mathcal{G}_{-2n_\infty}$ du Volume II permet de relier les deux apparitions de π :*

- *La valeur $y_{S_{2n_\infty}} = \pi \in \mathcal{G}_{+2n_\infty}$ (rectification ascendante) admet une image $\delta_2(\pi) \in \mathcal{G}_{-2n_\infty}$.*
- *Modulo la projection canonique $\mathcal{G}_{-2n_\infty} \to \mathcal{G}_{-n_\infty}/\mathcal{G}_{-2n_\infty}$, cette image correspond à la position de π sur le cercle unité du plan complexe stratal.*

Les deux apparitions de π sont ainsi duales *l'une de l'autre, et reliées par la symétrie de résolution du programme.*

Remarque 8 (Statut conceptuel)**.** *La dualité δ_2 exprime une cohérence interne du programme : π est un objet unique du programme, qui se manifeste différemment selon le niveau stratal où on l'observe. Au niveau ascendant $\mathcal{G}_{+2n_\infty}$, il est constructible par rectification exacte. Au niveau descendant $\mathcal{G}_{-n_\infty}/\mathcal{G}_{-2n_\infty}$, il est invariant cyclique du quotient.*

Cette double apparition n'est pas une redondance : elle est l'expression géométrique de la dualité fondamentale du Volume II.

7 Comparaison avec ZFC

7.1 Le statut de π dans les deux cadres

Remarque 9 (ZFC vs axiomatique stratale)**.** *Les deux cadres traitent π de manières fondamentalement différentes :*

Dans ZFC (logique d'infini potentiel).
- *π est transcendant sur $\mathbb{Q}$ (Lindemann).*
- *π n'est pas constructible à règle et compas en temps fini (Wantzel).*
- *π est atteint comme* limite topologique *de la suite (y_{S_k}) à l'ordinal ω, sans égalité exacte à aucune étape.*
- *Pas de graduation entre les différents niveaux d'infini : ω est la seule limite pertinente.*

Dans l'axiomatique stratale (logique d'infini achevé).
- *π est transcendant sur $\mathbb{Q}$ au sens classique (compatibilité avec Lindemann).*
- *π n'est pas constructible à règle et compas en temps fini (compatibilité avec Wantzel).*
- *π est* impossible à rectifier en n_∞ étapes *(obstacle de courbure, Théorème 1).*
- *π est* exactement rectifié en $2n_\infty$ étapes *(Théorème 2).*
- *π est* algébrique stratal *de degré 2^{2n_∞} sur $\mathbb{Q}$, dans la notion stratale d'extension.*
- Graduation explicite *entre les niveaux n_∞ (impossible) et $2n_\infty$ (exact).*

7.2 L'apport de l'axiomatique stratale

Remarque 10 (Une lecture plus fine)**.** *L'axiomatique stratale n'invalide pas ZFC, elle l'*affine*. Là où ZFC réunit toutes les limites infinies en une seule limite ordinale ω (logique d'infini potentiel, π jamais atteint), l'axiomatique stratale distingue des niveaux $n_\infty, 2n_\infty, 3n_\infty, \ldots$ et traite chacun comme un* infini achevé *où des constructions sont soit possibles soit impossibles, sans résidu approximatif.*

Pour la rectification du cercle, cette distinction est significative :
- *Le programme du grain identifie précisément où se situe l'obstacle (courbure non nulle au niveau n_∞).*
- *Il identifie à quel niveau l'obstacle disparaît (niveau $2n_\infty$, où la courbure devient nulle stratale).*
- *Il fournit une* égalité exacte stratale *$y_{S_{2n_\infty}} = \pi$, et non une approximation.*

Cette précision n'est pas accessible dans ZFC, qui ne distingue pas les niveaux d'infini par leur structure stratale.

7.3 Statut de la transcendance dans l'axiomatique stratale

Remarque 11 (Une double lecture de π)**.** *Dans l'axiomatique stratale, π acquiert un* double statut *:*
- Transcendant *au sens classique : pas racine d'un polynôme à coefficients rationnels de degré fini.*
- Algébrique stratal *de degré 2^{2n_∞} : constructible exactement en $2n_\infty$ étapes dans la tour d'extensions stratales.*

Cette double lecture n'est pas contradictoire : elle reflète l'élargissement conceptuel de la notion d'algébricité. Le programme du grain ouvre un cadre où la dichotomie classique algébrique/transcendant se nuance en une hiérarchie stratale *de niveaux de constructibilité.*

Conclusion

Ce document a établi un théorème de rectification stratale du cercle dans l'axiomatique du programme du grain. Les deux énoncés centraux sont :

- **Impossibilité en n_∞ étapes** : la rectification ne peut être achevée au niveau $\mathcal{G}_{+n_\infty}$ en raison de la courbure non nulle du cercle à l'infini.
- **Exactitude en $2n_\infty$ étapes** : au niveau $\mathcal{G}_{+2n_\infty}$, la courbure devient nulle stratale, le cercle géant s'identifie à la droite à l'infini, et la corde rectifiée vaut π exactement.

Le statut de π qui en résulte est précis : c'est un élément de $\widetilde{\mathbb{R}}_{|2}$, exactement rectifié en $2n_\infty$ étapes, et appartenant à la tour d'extensions algébriques stratales L_{2n_∞} de degré 2^{2n_∞} sur $\mathbb{Q}$. Il reste transcendant au sens classique (Lindemann), en compatibilité totale avec les théorèmes de ZFC, tout en acquérant un statut nouveau dans l'axiomatique stratale.

La dualité δ_2 du Volume II relie cette construction ascendante à la lecture descendante de π comme invariant du cercle unité du plan complexe stratal, assurant la cohérence interne du programme.

L'axiomatique stratale apporte ainsi une *graduation fine* de l'inaccessibilité de π que ZFC ne distinguait pas : entre le fini, l'ordinal limite ω (infini potentiel), et le stratifié (n_∞, $2n_\infty$, comme infinis achevés). Cette graduation n'est pas une contradiction des résultats classiques, mais leur *enrichissement* par une logique d'infini achevé qui ouvre de nouvelles perspectives sur le statut des constantes transcendantes dans le programme.