

Le paradoxe de la réflexivité dans la théorie du grain

Hugues Genvrin

Septembre 2026

Résumé

Le paradoxe de la réflexivité, hérité de Galilée, Bolzano et Dedekind, affirme qu'un continu peut être mis en bijection avec l'une de ses parties propres. Nous le réexaminons dans le cadre de la théorie du grain, en prenant pour référence l'anomalie cartésienne et le théorème de stratification fonctionnelle. Nous montrons qu'au niveau hyperfini, la bijection entre la partie et le tout existe, mais qu'elle n'est pas homogène : elle dilate chaque grain du facteur jacobien. À résolution homogène, la partie contient strictement moins de grains que le tout, et cet écart est illimité. Le paradoxe ne réapparaît qu'après la promotion $\tilde{\mathbb{R}}_{\text{fin}}/\mathfrak{m} = \mathbb{R}$, qui écrase les épaisseurs de grain sur 0. Le cas d'un facteur irrationnel fait en outre apparaître que l'inclusion de la partie dans le tout est une inclusion de points, et non de grilles.

1 Introduction

Galilée observait déjà dans les *Discorsi* [2] que les carrés d'entiers peuvent être mis en correspondance avec tous les entiers, bien qu'ils n'en soient qu'une partie. Bolzano, dans les *Paradoxien des Unendlichen* [3] étendit la remarque au continu : l'application $x \mapsto 2x$ établit une correspondance biunivoque entre $[0, 1]$ et $[0, 2]$, alors que le premier intervalle est strictement contenu dans le second. Dedekind [4] renversa la perspective et fit de ce phénomène la *définition* même de l'infini : un système est infini s'il est équipotent à l'une de ses parties propres. Russell [5] nomma *réflexives* les classes possédant cette propriété.

Dans la théorie cantorienne, la conséquence est la suivante. Si F et E sont deux continus (deux intervalles d'intérieur non vide) avec $F \subset E$, alors

$$|F| = |E| = 2^{\aleph_0}. \quad (1)$$

L'axiome d'Euclide, « le tout est plus grand que la partie », cesse de valoir pour le cardinal.

La théorie du grain [1] décrit le continu comme la limite, réalisée par une promotion algébrique, d'une tour de grilles hyperfinies. Chaque étage est muni de grains d'épaisseur infinitésimale non nulle. Il est naturel de se demander ce que devient le paradoxe à un étage donné de cette tour. Nous utilisons pour cela l'outil de l'anomalie cartésienne [1, chap. 14] : une fonction dérivable f stratifie son axe codomaine par le facteur local $|f'|$. Pour une homothétie $x \mapsto ax$, ce facteur est constant et vaut a .

La thèse de cet article est la suivante : *la réflexivité n'est pas une propriété des étages de la tour, mais un effet de la promotion.*

2 Rappels sur le grain

Nous rappelons brièvement les éléments de [1] utilisés ici.

Soit n_∞ un hyperentier (entier non standard). À la résolution $-n_\infty$, le continu unité $C_1 = [0, 1[$ est découpé en grains

$$g_k = [k 2^{-n_\infty}, (k+1) 2^{-n_\infty}[, \quad 0 \leq k < 2^{n_\infty},$$

d'épaisseur 2^{-n_∞} , infinitésimale non nulle. Ces grains correspondent aux écritures binaires terminantes $0, b_1 b_2 \dots b_{n_\infty}$, et leur ensemble B_{-n_∞} est hyperfini, de cardinal

$$|B_{-n_\infty}| = 2^{n_\infty}$$

([1, prop. 78]). Les épaisseurs vivent dans l'anneau partiel $\tilde{\mathbb{R}}$. La *promotion* est le passage au quotient $\mathbb{R}_{\text{fin}}/\mathfrak{m} = \mathbb{R}$, où $\mathfrak{m}$ est l'idéal des infinitésimaux; elle est réalisée par la partie standard st. Sous la promotion, toutes les épaisseurs 2^{-kn_∞} s'écrasent sur 0, les suites illimitées deviennent des points, et le cardinal passe de 2^{n_∞} (grille) à $2^{\aleph_0}$ (continu) ([1, th. 63 et rem. 120]).

Théorème 1 (Stratification fonctionnelle, [1, th. 62]). *Soit f une fonction dérivable. Le graphe cartésien de f envoie l'intervalle uniforme $[x, x + dx]$ de l'axe Ox sur l'intervalle $[f(x), f(x) + f'(x) dx]$ de l'axe Oy . La fonction f agit donc sur son axe codomaine comme un facteur de stratification local $|f'(x)|$.*

Nous utiliserons enfin le principe des tiroirs sous sa forme hyperfinie, que nous énonçons comme hypothèse de travail.

Hypothèse 2 (Principe des tiroirs hyperfini). Pour tout hyperentier N , il n'existe aucune bijection entre $\{1, \dots, N\}$ et une partie propre de cet ensemble, parmi les applications définissables au niveau de la grille.

Dans le cadre de l'analyse non standard, cette hypothèse est le transfert du principe des tiroirs fini aux ensembles hyperfinis et aux bijections internes. Elle exprime que les étages de la tour se comportent, pour le comptage, comme des ensembles finis.

3 Le dispositif

On se place dans le plan $\mathcal{P}_{\mathbb{R}}^2$ muni d'un repère (O, x, y) . Soit $a > 1$ un réel standard.

Définition 3. 1. $\mathcal{F}_2 = [0, 1[$ est porté par l'axe Ox et muni de sa grille hyperentière : 2^{n_∞} grains g_k d'épaisseur 2^{-n_∞} .

2. $f: \mathcal{F}_2 \rightarrow \mathcal{F}_1$, $x \mapsto ax$, et $\mathcal{F}_1 = f(\mathcal{F}_2) = [0, a[$, porté par l'axe Oy .

3. $\tau = \text{rot}(O, \frac{\pi}{2})$ et $\mathcal{F}_2^* = \tau(\mathcal{F}_2) = [0, 1[$, porté par l'axe Oy .

Comme $a > 1$, on a $\mathcal{F}_2^* \subsetneq \mathcal{F}_1$ sur l'axe Oy : $\mathcal{F}_2^*$ est la partie, $\mathcal{F}_1$ le tout (figure 1).

Remarque 4. Sur le demi-axe positif, la rotation τ coïncide avec la symétrie orthogonale d'axe $y = x$. C'est cette symétrie que matérialise la construction en pointillés de la figure 1. Le choix de l'une ou de l'autre est sans incidence sur ce qui suit : dans les deux cas, τ est une isométrie et transporte la grille de $\mathcal{F}_2$ sans la déformer.

4 La réflexivité au niveau hyperfini

4.1 Deux grilles

Les deux applications du dispositif transportent la grille de $\mathcal{F}_2$ de deux manières différentes.

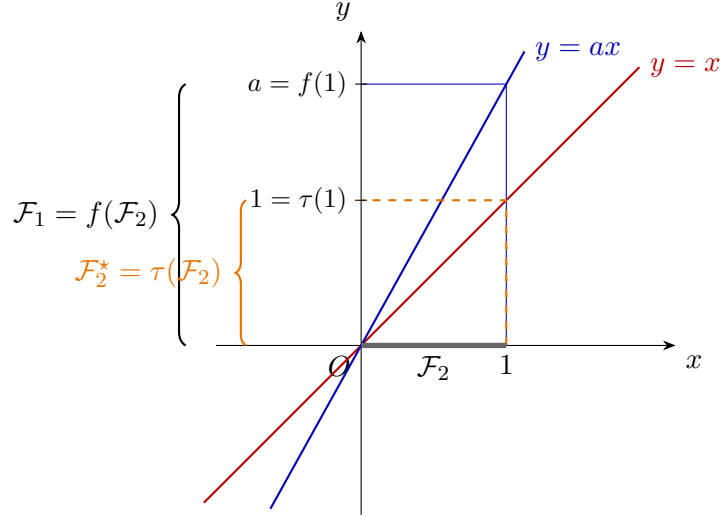


FIGURE 1 – Réflexivité : la partie $\mathcal{F}_2^* = \tau(\mathcal{F}_2)$ et le tout $\mathcal{F}_1 = f(\mathcal{F}_2)$ sur l'axe Oy .

Proposition 5 (Grille de la partie). *L'isométrie τ munit $\mathcal{F}_2^*$ de 2^{n_∞} grains*

$$\tau(g_k) = [k 2^{-n_\infty}, (k+1) 2^{-n_\infty}[, \quad 0 \leq k < 2^{n_\infty},$$

tous d'épaisseur 2^{-n_∞} . La grille de $\mathcal{F}_2^$ est la grille dyadique homogène.*

Proposition 6 (Grille du tout). *L'homothétie f munit $\mathcal{F}_1$ de 2^{n_∞} grains*

$$f(g_k) = [ak 2^{-n_\infty}, a(k+1) 2^{-n_\infty}[, \quad 0 \leq k < 2^{n_\infty},$$

tous d'épaisseur $a 2^{-n_\infty}$.

Démonstration. L'image d'un intervalle par $x \mapsto ax$ est l'intervalle des images, et sa longueur est multipliée par a . C'est le théorème 1 avec $f' \equiv a$. $\square$

Aucune hypothèse de rationalité n'est requise sur a : la grille image est une grille homothétique, parfaitement définie dès que $a 2^{-n_\infty}$ a un sens dans $\mathbb{R}$. Elle n'a simplement aucune raison de coïncider avec la grille dyadique.

4.2 La bijection hétérogène

Proposition 7 (Bijection partie-tout). *L'application*

$$h = f \circ \tau^{-1} : \mathcal{F}_2^* \rightarrow \mathcal{F}_1, \quad y \mapsto ay,$$

est une bijection qui envoie grain sur grain : elle applique le grain $\tau(g_k)$ sur le grain $f(g_k)$. En particulier, $\mathcal{F}_2^$ et $\mathcal{F}_1$ comptent le même nombre de grains, 2^{n_∞} .*

La partie est donc en bijection avec le tout, *y compris au niveau hyperfini*. Mais cette bijection n'est pas homogène : elle dilate chaque grain du facteur jacobien a . Le nombre de grains est conservé ; les grains, eux, ne le sont pas.

4.3 Le comptage à résolution homogène

Pour comparer honnêtement la partie et le tout, il faut les compter avec la même unité, c'est-à-dire à la même résolution.

Proposition 8 (Comptage homogène). *À la résolution $-n_\infty$, compté en grains dyadiques d'épaisseur 2^{-n_∞} ,*

$$N(\mathcal{F}_2^\star) = 2^{n_\infty}, \quad N(\mathcal{F}_1) = \lfloor a 2^{n_\infty} \rfloor,$$

où $N(\mathcal{F}_1)$ désigne le nombre de grains dyadiques entièrement contenus dans $\mathcal{F}_1 = [0, a[$. De plus, l'écart

$$N(\mathcal{F}_1) - N(\mathcal{F}_2^\star) \geq (a - 1) 2^{n_\infty} - 1$$

est un hyperentier illimité.

Démonstration. Le grain dyadique $[m2^{-n_\infty}, (m+1)2^{-n_\infty}[$ est contenu dans $[0, a[$ si et seulement si $(m+1)2^{-n_\infty} \leq a$, soit $m+1 \leq a 2^{n_\infty}$. Il y a donc $\lfloor a 2^{n_\infty} \rfloor$ tels grains. Comme $\lfloor u \rfloor > u - 1$, on obtient la minoration. Enfin, $a - 1$ est un réel standard strictement positif et 2^{n_∞} est illimité, donc $(a - 1) 2^{n_\infty} - 1$ est illimité. $\square$

La partie entière ne coûte qu'un grain, le dernier, qui est à cheval sur le bord de $\mathcal{F}_1$ lorsque $a 2^{n_\infty}$ n'est pas entier. Cette erreur est négligeable devant l'écart, qui est illimité.

Corollaire 9 (Absence de bijection homogène). *Il n'existe aucune bijection de $\mathcal{F}_2^\star$ sur $\mathcal{F}_1$ qui envoie chaque grain dyadique de $\mathcal{F}_2^\star$ sur un grain dyadique de $\mathcal{F}_1$ de même épaisseur.*

Démonstration. Une telle bijection induirait une bijection entre $\{1, \dots, 2^{n_\infty}\}$ et $\{1, \dots, \lfloor a 2^{n_\infty} \rfloor\}$. Le premier ensemble s'identifie à une partie propre du second, ce qui contredit l'hypothèse 2. $\square$

La proposition 7 et le corollaire 9 ensemble dissolvent le paradoxe au niveau hyperfini : la partie peut être mise en bijection avec le tout, mais seulement par une application qui change l'épaisseur des grains. À grain homogène, le tout est strictement plus grand que la partie, et l'axiome d'Euclide est rétabli.

Remarque 10 (Le rapport des comptages). Le rapport des comptages vérifie

$$\text{st} \left(\frac{N(\mathcal{F}_2^\star)}{N(\mathcal{F}_1)} \right) = \frac{1}{a}.$$

C'est exactement le rapport des longueurs de la partie et du tout. Le comptage homogène des grains encode donc, avant promotion, l'information que la mesure de Lebesgue conserve après promotion, mais que le cardinal perd.

5 Le cas d'un facteur irrationnel

Le cas où a est irrationnel ne pose aucune difficulté pour la construction (proposition 6), mais il met en lumière un phénomène que le cas rationnel masque.

Proposition 11 (Incommensurabilité des grilles). *Si a est un réel standard irrationnel, les bords de grains de $\mathcal{F}_1$ et de $\mathcal{F}_2^\star$ n'ont en commun que le point 0 :*

$$ak 2^{-n_\infty} = m 2^{-n_\infty} \quad (k, m \text{ hyperentiers}) \implies k = m = 0.$$

Démonstration. Si $k \geq 1$, l'égalité donne $a = m/k$. Or l'énoncé standard « pour tous entiers m et $k \geq 1$, $a \neq m/k$ » est vrai puisque a est irrationnel ; par transfert, il reste vrai pour tous hyperentiers m et $k \geq 1$. Donc $k = 0$, puis $m = 0$. $\square$

Il en résulte qu'aucun grain de $\mathcal{F}_2^\star$ n'est réunion de grains de $\mathcal{F}_1$, et réciproquement (figure 2). L'inclusion $\mathcal{F}_2^\star \subset \mathcal{F}_1$ est une inclusion d'ensembles de *points*, et non une inclusion de *grilles*.

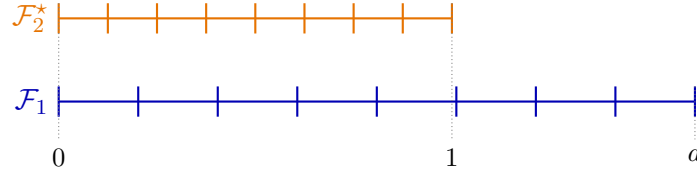


FIGURE 2 – Schéma (avec $2^{n\infty}$ remplacé par 8 et $a \approx 1,618$) : les grains de la partie ne s’emboîtent pas dans ceux du tout. Seul le bord 0 est commun.

Remarque 12 (Lecture). Lorsque a est rationnel, les deux grilles admettent un raffinement commun, et l’on peut croire que la relation « partie/tout » a un sens directement au niveau des grains. Le cas irrationnel montre que ce n’est pas le cas en général : pour comparer la partie et le tout, il faut d’abord choisir une résolution commune, ce que fait la proposition 8. La relation d’inclusion au sens de Galilée et de Bolzano est une relation entre ensembles de points. Elle n’a son plein sens qu’après promotion.

6 La résurgence du paradoxe par la promotion

Théorème 13 (Résurgence). *Après promotion, les grilles de $\mathcal{F}_2^*$ et de $\mathcal{F}_1$ deviennent les continus standards $[0, 1[$ et $[0, a[$, et*

$$|[0, 1[| = |[0, a[| = 2^{\aleph_0}.$$

La bijection hétérogène h de la proposition 7 devient la bijection de Bolzano $y \mapsto ay$, et le paradoxe de la réflexivité réapparaît.

Démonstration. Par [1, th. 63 et prop. 79], la promotion réalise chaque continu comme l’ensemble des classes de suites de grains emboîtés, en bijection avec les suites binaires illimitées ; son cardinal est $2^{\aleph_0}$. Les épaisseurs $2^{-n\infty}$ et $a 2^{-n\infty}$ appartiennent à l’idéal $\mathfrak{m}$ et s’écrasent toutes deux sur 0 :

$$\text{st}(2^{-n\infty}) = \text{st}(a 2^{-n\infty}) = 0.$$

L’écart illimité de la proposition 8 est un écart de nombres de grains ; il disparaît avec les grains eux-mêmes. $\square$

Le mécanisme est donc le suivant. Au niveau hyperfini, deux informations distinguent la partie du tout : le nombre de grains à résolution homogène, et l’épaisseur des grains transportés par h . La promotion efface la seconde en l’écrasant sur 0, et remplace le premier par le cardinal $2^{\aleph_0}$, qui absorbe le facteur a . Le paradoxe est l’ombre, projetée sur le continu, d’une différence d’épaisseur que le continu ne sait plus voir.

7 Comparaison avec la théorie des numérosités

Benci et Di Nasso [7, 8] ont développé une théorie des *numérosités* qui, par des méthodes non standard, attribue aux ensembles infinis des « tailles » respectant le principe d’Euclide : une partie propre a une numérosité strictement plus petite que le tout. Leur construction procède par étiquetage des ensembles et par approximations finies.

La présente approche partage l’objectif de restaurer le principe d’Euclide au niveau non standard, mais elle en diffère par le mécanisme. La distinction entre la partie et le tout est lue ici géométriquement, par le facteur jacobien et l’épaisseur des grains. Elle est reliée à l’anomalie cartésienne, c’est-à-dire au fait que le plan cartésien n’est pas neutre vis-à-vis des

fonctions qu'on y trace. Il serait utile de préciser dans quelle mesure le comptage homogène de la proposition 8 s'identifie à une numérosité au sens de Benci et Di Nasso.

8 Conclusion

Dans la théorie du grain, le paradoxe de la réflexivité se décompose en trois énoncés.

1. La partie est en bijection avec le tout par une application qui dilate les grains du facteur jacobien a (proposition 7).
2. À résolution homogène, la partie contient strictement moins de grains que le tout, et l'écart est illimité (prop. 8 et cor. 9).
3. La promotion écrase les épaisseurs et fait réapparaître l'égalité des cardinaux (th. 13).

La réflexivité n'est donc pas une propriété des étages hyperfinis de la tour des résolutions, mais un effet de la promotion. Le cas irrationnel précise ce constat : la partie et le tout ne sont en relation d'inclusion qu'en tant qu'ensembles de points, ce qui suppose déjà la promotion.

Une extension naturelle consiste à remplacer l'homothétie par une fonction dérivable quelconque f de dérivée $|f'| > 1$. La stratification devient alors non uniforme, et le comptage homogène devrait faire intervenir l'intégrale de $|f'|$, en lien avec la métrique stratale logarithmique de [1, chap. 14].

Références

- [1] H. Genvrin, *Théorie du grain*, manuscrit, 2026.
- [2] G. Galilei, *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, Leyde, 1638.
- [3] B. Bolzano, *Paradoxien des Unendlichen*, Leipzig, 1851.
- [4] R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen ?*, Brunswick, 1888.
- [5] B. Russell, *Introduction to Mathematical Philosophy*, Londres, 1919.
- [6] A. Robinson, *Non-standard Analysis*, North-Holland, 1966.
- [7] V. Benci, M. Di Nasso, « Numerosities of labelled sets : a new way of counting », *Advances in Mathematics* 173 (2003), 50–67.
- [8] V. Benci, M. Di Nasso, *How to Measure the Infinite : Mathematics with Infinite and Infinitesimal Numbers*, World Scientific, 2019.