Remarques topo-ensembliste

Stratification fonctionnelle et stratification multiplicative

Hugues Genvrin

29 mai 2026

Préambule

Cette note établit une équivalence structurelle entre trois mécanismes de sortie de strate dans le programme du grain :

1. La *stratification fonctionnelle* (cf. note précédente *Anomalie cartésienne et factorisation logarithmique*) : toute fonction dérivable stratifie localement l'axe codomaine.
2. La *stratification multiplicative* (Volume I) : le produit de deux positions fait sortir de la strate vers la suivante.
3. L'*exponentiation cardinale stratale* : le passage du décompte géométrique au décompte combinatoire fait monter d'une strate.

Le résultat principal est que ces trois mécanismes ne sont pas indépendants : ils sont *trois facettes d'un même phénomène structurel*, qu'on appellera la *sortie de strate par opération multiplicative*.

Référence implicite. Programme du grain (Volumes I-III) et la note *Anomalie cartésienne et factorisation logarithmique*.

1 Configuration : fonction et homothétie locale

1.1 Action d'une fonction sur les grains

Soit $f : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ une fonction continue, avec $\mathcal{C} = [a, b]$ et $\mathcal{C}' = f(\mathcal{C})$. On suppose $\mathcal{C}$ factorisé à la résolution $-n_\infty$ comme

$$\mathcal{C} = \left(b - a,\ 2^{n_\infty},\ \frac{b-a}{2^{n_\infty}}\right),$$

avec 2^{n_∞} grains d'épaisseur uniforme $\epsilon_0 = (b - a)/2^{n_\infty}$.

Proposition 1 (Homothétie locale induite par f)**.** *En chaque grain $G_k \subset \mathcal{C}$ de centre x_k, la fonction f agit* localement *comme une homothétie de rapport $\lambda_k := |f'(x_k)|$. L'image $f(G_k) \subset \mathcal{C}'$ est un grain d'épaisseur :*

$$\epsilon_k = \lambda_k \cdot \epsilon_0 = \frac{\lambda_k(b-a)}{2^{n_\infty}}.$$

Démonstration. C'est une conséquence de l'anomalie cartésienne, c'est l'expression de la stratification au niveau local, de la déformation des grains de l'axe des ordonnées par la fonction f. □

Remarque 1 (Stratification hétérogène)**.** *Les épaisseurs $\epsilon_k = \lambda_k\epsilon_0$ varient avec k, sauf si f est affine (f' constant). La fonction f produit donc en général une* stratification hétérogène *de l'image $\mathcal{C}'$ à la résolution $-n_\infty$.*

1.2 Refactorisation à la résolution fine

Pour traiter cette hétérogénéité, on refactorise chaque grain image $f(G_k)$ à la résolution $-2n_\infty$ (épaisseur de base ϵ_* homogène).

Proposition 2 (Refactorisation homogène)**.** *Chaque grain image $f(G_k)$ d'épaisseur $\lambda_k\epsilon_0$ se refactorise à la résolution $-2n_\infty$ comme :*

$$f(G_k) = \left(\lambda_k\epsilon_0,\ 2^{n_\infty},\ \frac{\lambda_k\epsilon_0}{2^{n_\infty}}\right).$$

La mosaïque image entière $\mathcal{C}'$ se factorise comme :

$$\mathcal{C}' = \left(\sum_k \lambda_k\epsilon_0,\ 2^{2n_\infty},\ \frac{(b-a)}{2^{2n_\infty}}\cdot\overline{\lambda}\right),$$

où $\overline{\lambda}$ est une moyenne stratale des λ_k.

Remarque 2 (Émergence de la résolution fine)**.** *La résolution $-2n_\infty$ apparaît naturellement comme* la résolution où l'hétérogénéité de f peut être absorbée *en une factorisation homogène. C'est un premier indice que la fonction f fait monter d'une strate dans la hiérarchie de résolution.*

2 La connexion avec la stratification multiplicative

2.1 L'homothétie comme multiplication

Remarque 3 (Statut algébrique de l'homothétie)**.** *L'homothétie locale de rapport λ_k qui agit sur le grain G_k n'est rien d'autre qu'une* multiplication par λ_k. *Si l'on considère le grain G_k comme un sous-ensemble du déploiement (et donc comme un ensemble de positions multiplicables), alors f agit en multipliant ces positions par λ_k.*

2.2 Le mécanisme multiplicatif du Volume I

Proposition 3 (Rappel du Volume I)**.** *Pour deux positions $x, y \in \mathcal{G}_{-n_\infty}$, leur produit lexical $x \cdot y$ vit dans $\mathcal{G}_{-2n_\infty}$: la multiplication* fait sortir d'une strate vers la suivante.

Plus généralement, le produit de positions de $\mathcal{G}_{-kn_\infty}$ et $\mathcal{G}_{-ln_\infty}$ vit dans $\mathcal{G}_{-(k+l)n_\infty}$.

2.3 La fonction comme déclencheur multiplicatif local

Théorème 1 (Stratification fonctionnelle = stratification multiplicative locale)**.** *La stratification fonctionnelle induite par une fonction f est* identique *à la stratification multiplicative locale du Volume I :*

- *En chaque grain G_k de $\mathcal{C}$, f agit par homothétie de rapport λ_k.*
- *Cette homothétie est une multiplication, qui fait sortir de la strate $\mathcal{G}_{-n_\infty}$ vers $\mathcal{G}_{-2n_\infty}$ par le mécanisme du Volume I.*
- *Par conséquent, la fonction f* fait monter chaque grain de $\mathcal{C}$ d'une strate, *ce qui explique l'émergence naturelle de la résolution fine $-2n_\infty$ dans la refactorisation de $\mathcal{C}'$.*

Démonstration. La proposition 1 établit que f agit localement par homothétie de rapport λ_k sur chaque grain G_k. Cette homothétie est, par définition, la multiplication par λ_k sur les positions du grain.

Par la proposition 3 (mécanisme multiplicatif du Volume I), une telle multiplication appliquée à une position de $\mathcal{G}_{-n_\infty}$ produit une position de $\mathcal{G}_{-2n_\infty}$ (lecture lexicale du produit).

Donc l'action de f sur chaque grain est un cas particulier du mécanisme multiplicatif : la fonction est un *déclencheur local de la stratification multiplicative.* □

Remarque 4 (Interprétation conceptuelle)**.** *Le théorème 1 unifie deux mécanismes qui apparaissaient distincts :*

— *Le mécanisme du Volume I (algébrique) :* $x \cdot y$ *stratifie.*

— *Le mécanisme fonctionnel (géométrique) :* f *déforme.*

*Ces deux lectures décrivent la même opération : la sortie de strate par opération multiplicative. La fonction est l'*application *locale du produit, et le produit est l'*abstraction *algébrique de la fonction linéaire locale.*

3 Les trois décomptes de l'image

3.1 Décompte positionnel à $-n_\infty$

Proposition 4 (Décompte positionnel grossier)**.** *À la résolution* $-n_\infty$*, l'image* $\mathcal{C}'$ *comporte*

$$|\mathcal{C}'|_{/\mathcal{G}_{-n_\infty}} = 2^{n_\infty}$$

grains (un par grain du domaine). Cette quantité est un élément de $\widetilde{\mathbb{N}}_1$*.*

3.2 Décompte positionnel à $-2n_\infty$

Proposition 5 (Décompte positionnel fin)**.** *À la résolution* $-2n_\infty$*, l'image* $\mathcal{C}'$ *comporte*

$$|\mathcal{C}'|_{/\mathcal{G}_{-2n_\infty}} = 2^{2n_\infty}$$

sous-grains (chaque grain de $-n_\infty$ *est refactorisé en* 2^{n_∞} *sous-grains). Cette quantité est un élément de* $\widetilde{\mathbb{N}}_2$*.*

3.3 Décompte combinatoire à $-2n_\infty$

Chaque homothétie locale induite par f est identique à une multiplication du point de vue du grain. Chaque grain de $\mathcal{B}_{-2n_\infty}$ (ensemble des mots binaires de longueur $2n_\infty$, base lexicale des réels stratifiés) admet 2^{2n_∞} étiquettes lexicales distinctes. Or une multiplication de deux nombres de $\mathcal{B}_{-n_\infty}$ nous fait passer à $\mathcal{B}_{-2n_\infty}$ nombres sur chaque grain $\mathcal{G}_{-n_\infty}$. Il s'en suit un décompte combinatoire du nombre de réels avec $-2n_\infty$ chiffres après la virgule associés aux grains.

Proposition 6 (Décompte combinatoire)**.** *On considère le* nombre de configurations possibles *d'un grain de* $\mathcal{B}_{-n_\infty}$ *exprimé dans le système lexical de* $\mathcal{B}_{-2n_\infty}$ *:*

— *Chaque grain de* $\mathcal{B}_{-2n_\infty}$ *admet* 2^{2n_∞} *étiquettes lexicales distinctes (mots de* $2n_\infty$ *symboles).*

— *Pour chacun des* 2^{n_∞} *grains de* $\mathcal{B}_{-n_\infty}$*, sa configuration interne à la résolution* $-2n_\infty$ *peut prendre n'importe laquelle des* 2^{2n_∞} *étiquettes possibles.*

Le décompte combinatoire conjoint *est donc*

$$|\mathcal{B}_{-n_\infty}|^{vu\ \text{à}\ \mathcal{B}_{-2n_\infty}} = 2^{n_\infty} \cdot 2^{2n_\infty} = 2^{3n_\infty}.$$

Cette quantité est un élément de $\widetilde{\mathbb{N}}_3$*.*

Remarque 5 (Distinction des trois décomptes)**.** *Les trois décomptes mesurent des quantités distinctes :*

— 2^{n_∞} *: positions grossières de* $\mathcal{C}'$ *à* $-n_\infty$*.*

— 2^{2n_∞} *: positions fines de* $\mathcal{C}'$ *à* $-2n_\infty$*.*

— 2^{3n_∞} *: configurations possibles du système (avec les réels).*

Les deux premiers sont des décomptes positionnels *: ils comptent des objets géométriques. Le troisième est un décompte* combinatoire *ou* configurationnel *: il compte des états possibles du système.*

Chacun des trois vit dans une strate distincte $\widetilde{\mathbb{N}}_1$*,* $\widetilde{\mathbb{N}}_2$*,* $\widetilde{\mathbb{N}}_3$ *respectivement.*

4 Unification des trois mécanismes

4.1 Le théorème central

Théorème 2 (Unification des trois mécanismes de sortie de strate)**.** *Les trois mécanismes suivants sont* trois facettes d'un même phénomène structurel *dans le programme du grain :*

1. ***Stratification fonctionnelle.*** *Une fonction f stratifie l'axe codomaine en grains hétérogènes au niveau $-n_\infty$, qui se résorbent en grains homogènes au niveau $-2n_\infty$.*
2. ***Stratification multiplicative.*** *Le produit de positions fait sortir de la strate $\mathcal{G}_{-kn_\infty}$ vers la strate $\mathcal{G}_{-(k+1)n_\infty}$ par le mécanisme lexical du Volume I.*
3. ***Exponentiation cardinale stratale.*** *Le passage du décompte positionnel 2^{2n_∞} au décompte combinatoire 2^{3n_∞} fait monter d'une strate dans la hiérarchie ordinale $\widetilde{\mathbb{N}}_k$.*

Ces trois mécanismes ne sont pas indépendants : ils sont les expressions respectivement géométrique, algébrique *et* ensembliste *de la* sortie de strate par opération multiplicative.

Démonstration. L'équivalence (1) $\Leftrightarrow$ (2) est établie par le théorème 1 : la stratification fonctionnelle est la stratification multiplicative locale.

L'équivalence (2) $\Leftrightarrow$ (3) procède du décompte combinatoire de la proposition 6 : le décompte $2^{n_\infty} \cdot 2^{2n_\infty} = 2^{3n_\infty}$ est précisément l'effet du produit $\mathcal{G}_{-n_\infty} \times \mathcal{G}_{-2n_\infty} \to \mathcal{G}_{-3n_\infty}$, qui est une instance générale du mécanisme multiplicatif du Volume I.

Donc (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3), ce qui établit l'unification. □

4.2 Lecture conceptuelle

Remarque 6 (Le produit comme opération structurelle première)**.** *Le théorème 2 met en évidence le* rôle structurel premier *de la multiplication dans le programme du grain :*

— *Géométriquement, la multiplication apparaît comme* homothétie.
— *Algébriquement, comme* produit lexical *faisant sortir de strate.*
— *Ensemblistement, comme* exponentiation cardinale *entre strates.*

Toute opération qui « monte d'une strate » dans le programme est, in fine, une opération multiplicative. C'est la cohérence interne du procédé du grain : sa hiérarchie stratale est gouvernée par un seul mécanisme, le produit.

4.3 Cohérence avec la digression sur l'anomalie cartésienne

Remarque 7 (Articulation avec la note précédente)**.** *La note précédente sur l'*anomalie cartésienne *avait établi le théorème de stratification fonctionnelle (point 1 du théorème 2). Le présent document le complète en montrant que cette stratification fonctionnelle n'est pas un mécanisme nouveau, mais une* instance locale *de la stratification multiplicative du Volume I.*

Le programme du grain présente ainsi une cohérence structurelle : un mécanisme unique (la multiplication) gouverne à la fois les opérations algébriques (Volume I), les transformations géométriques (fonctions), et les comptages ensemblistes (cardinalités).

5 Conséquences ensemblistes

5.1 Hiérarchie des cardinaux stratifiés

Proposition 7 (Cardinalité stratale variable)**.** *Un même continu $\mathcal{C}'$ admet une hiérarchie de cardinalités selon la résolution et le mode de décompte :*

— *Positionnel à $\mathcal{G}_{-n_\infty}$: $2^{n_\infty} \in \widetilde{\mathbb{N}}_1$.*
— *Positionnel à $\mathcal{G}_{-2n_\infty}$: $2^{2n_\infty} \in \widetilde{\mathbb{N}}_2$.*
— *Combinatoire conjoint : $2^{3n_\infty} \in \widetilde{\mathbb{N}}_3$.*

— *Plus généralement, le décompte combinatoire conjoint sur k niveaux donne $2^{k(k+1)n_\infty/2}$, dans la strate appropriée.*

5.2 Sur le statut « mesure nulle » des grains

Remarque 8 (Une ambiguïté nommée)**.** *Les grains de $\mathcal{G}_{-n_\infty}$ ont une* mesure nulle au sens standard *(mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$), mais une* mesure non nulle au sens stratal *(épaisseur $1/2^{n_\infty}$, infinitésimal non standard dans $\widetilde{\mathbb{R}}$).*

Cette ambiguïté est essentielle : un grain est simultanément un point *(à la résolution standard) et un* intervalle *(à la résolution stratale). On fera une analogie avec le développement décimal d'une partie entière : une partie entière est un objet individué de mesure nulle au sens des nombres réels, mais son développement décimal infini lui confère une « épaisseur » dans la stratification des décimales.*

6 Synthèse

— Une fonction dérivable f agit en chaque grain de son domaine par une *homothétie locale de rapport $\lambda_k = |f'(x_k)|$.*

— Cette homothétie locale est une *multiplication*, et par le mécanisme du Volume I, elle fait sortir d'une strate vers la suivante.

— Le *décompte combinatoire conjoint* d'un continu, qui compte les configurations possibles plutôt que les positions, fait également monter d'une strate.

— Les trois mécanismes (fonctionnel, multiplicatif, ensembliste) sont *trois facettes d'une même opération structurelle* : la sortie de strate par opération multiplicative.

— Cette unification met en évidence le *rôle structurel premier de la multiplication* dans le programme du grain : c'est le mécanisme unique qui gouverne sa hiérarchie stratale.

— Une conséquence ensembliste : la cardinalité d'un continu *dépend du mode de décompte* (positionnel ou combinatoire), et ce mode est lui-même stratifié.

Conclusion

L'apport principal de cette note est la mise en évidence d'une *cohérence structurelle interne* du programme du grain. Les trois mécanismes de sortie de strate (fonctionnel, multiplicatif, ensembliste), qui apparaissaient distincts, sont en réalité trois expressions d'un seul phénomène : la multiplication comme opération de stratification.