Résolution de l'équation du troisième degré
par factorisation en un facteur linéaire et un trinôme

Hugues GENVRIN

Novembre 2026

1 Position du problème

On cherche les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation

$$P(X) = X^3 + pX + q = 0, \tag{1}$$

où p et q sont des paramètres réels. On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$; on rappelle que $j^3 = 1$, $\bar{j} = j^2$ et

$$1 + j + j^2 = 0.$$

2 Factorisation et système d'identification

Le polynôme P est de degré 3 à coefficients réels : il possède au moins une racine réelle. On peut donc chercher une factorisation de la forme

$$P(X) = (X + \alpha)\,(X^2 - \Sigma X + \Pi), \tag{2}$$

où Σ et Π désignent respectivement la *somme* et le *produit* des deux racines u et v du trinôme $X^2 - \Sigma X + \Pi$:

$$\Sigma = u + v, \qquad \Pi = uv.$$

En développant :

$$(X + \alpha)(X^2 - \Sigma X + \Pi) = X^3 + (\alpha - \Sigma)X^2 + (\Pi - \alpha\Sigma)X + \alpha\Pi.$$

Par identification des coefficients avec $X^3 + 0 \cdot X^2 + pX + q$, on obtient le système

$$\begin{cases} \alpha - \Sigma = 0 \\ \Pi - \alpha\Sigma = p \\ \alpha\Pi = q \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \Sigma \\ \Pi = p + \Sigma^2 \\ \Sigma\,\Pi = q. \end{cases}$$

L'équation de départ s'écrit donc

$$P(X) = X^3 + (\Pi - \Sigma^2)X + \Pi\Sigma,$$

et, en reportant $\Pi = p + \Sigma^2$ dans $\Sigma\Pi = q$, on obtient l'équation à laquelle doit satisfaire Σ :

$$\boxed{\Sigma^3 + p\Sigma - q = 0} \tag{3}$$

3 Interprétation de l'équation en Σ

Proposition 1. *Pour tout $\Sigma \in \mathbb{C}$,*

$$\Sigma^3 + p\Sigma - q = -P(-\Sigma).$$

Ainsi Σ est solution de (3) si et seulement si $-\Sigma$ est racine de P.

Démonstration. $-P(-\Sigma) = -\big(-\Sigma^3 - p\Sigma + q\big) = \Sigma^3 + p\Sigma - q.$ □

Remarque 2. L'équation (3) est donc l'équation de départ, au changement de variable $X \mapsto -X$ près : la factorisation (2) ne fait pas, à elle seule, avancer la résolution. Elle met cependant en évidence une structure très utile, étudiée ci-dessous.

D'après (2), les trois racines de P sont

$$x_1 = u, \qquad x_2 = v, \qquad x_3 = -\alpha = -\Sigma = -(u+v),$$

et l'on a

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, \tag{4}$$

ce qui est aussi conséquence directe des relations de Viète (absence de terme en X^2).

Proposition 3. *Les trois sommes deux à deux x_1+x_2, x_1+x_3, x_2+x_3 sont exactement les trois racines de l'équation (3), c'est-à-dire de $X^3 + pX - q$.*

Démonstration. D'après (4), $x_i + x_j = -x_k$ pour $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$. Or les $-x_k$ sont les racines de $-P(-X) = X^3 + pX - q$ (proposition 1). □

En particulier $x_1 + x_2 = u + v = \Sigma$, $x_1 + x_3 = -v$ et $x_2 + x_3 = -u$: l'équation (3) est valable pour *tous* les couples de racines.

4 Un lemme sur trois nombres complexes

Lemme 4. *Soient $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{C}$ et $s = u_1 + u_2 + u_3$. Les égalités*

$$u_1u_2(u_1+u_2) = u_1u_3(u_1+u_3) = u_2u_3(u_2+u_3)$$

ont lieu si et seulement si l'une des conditions suivantes est réalisée :

(i) $s = 0$;

(ii) $u_1 = u_2 = u_3$;

(iii) au moins deux des u_i sont nuls.

Démonstration. On a les factorisations

$$\begin{aligned}
u_1u_2(u_1+u_2) - u_1u_3(u_1+u_3) &= u_1\big[u_1(u_2-u_3) + (u_2^2 - u_3^2)\big] = u_1(u_2-u_3)\,s,\\
u_1u_3(u_1+u_3) - u_2u_3(u_2+u_3) &= u_3(u_1-u_2)\,s,\\
u_1u_2(u_1+u_2) - u_2u_3(u_2+u_3) &= u_2(u_1-u_3)\,s.
\end{aligned}$$

Si $s = 0$, les trois différences sont nulles. Sinon, on doit avoir $u_1(u_2-u_3) = u_3(u_1-u_2) = u_2(u_1-u_3) = 0$.

— Si $u_1 = 0$, les deux dernières relations donnent $u_2u_3 = 0$: deux des nombres sont nuls.

— Si $u_1 \neq 0$, alors $u_2 = u_3$, puis $u_3(u_1-u_2) = 0$: soit $u_2 = u_3 = 0$, soit $u_1 = u_2 = u_3$.

La réciproque est immédiate. □

Remarque 5. Dans le cas (i), on a $u_iu_j(u_i+u_j) = -u_1u_2u_3$ pour tout couple $i \neq j$. Appliqué aux racines x_1, x_2, x_3 de P (qui vérifient (4)), on obtient

$$x_ix_j(x_i+x_j) = -x_1x_2x_3 = q,$$

ce qui n'est autre que la relation $\Sigma\Pi = q$ du système, valable pour chaque couple de racines.

5 Paramétrage des racines par j

Proposition 6 (Résolvantes de Lagrange)**.** *Soient $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ tels que $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. On pose*

$$a = \frac{x_1 + j^2 x_2 + j x_3}{3}, \qquad b = \frac{x_1 + j x_2 + j^2 x_3}{3}.$$

Alors

$$x_1 = a + b, \qquad x_2 = ja + j^2 b, \qquad x_3 = j^2 a + jb.$$

Démonstration. En utilisant $1 + j + j^2 = 0$ et $j^3 = 1$:

$$a + b = \frac{2x_1 + (j + j^2)x_2 + (j + j^2)x_3}{3} = \frac{2x_1 - x_2 - x_3}{3} = \frac{3x_1}{3} = x_1,$$

car $-x_2 - x_3 = x_1$. De même,

$$ja + j^2 b = \frac{(j + j^2)x_1 + (j^3 + j^3)x_2 + (j^2 + j^4)x_3}{3} = \frac{-x_1 + 2x_2 - x_3}{3} = x_2,$$

puisque $j^4 = j$. Le calcul est identique pour x_3. □

Proposition 7. *Avec les notations précédentes,*

$$x_2 x_3 = a^2 - ab + b^2,$$
$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = -3ab,$$
$$x_1 x_2 x_3 = a^3 + b^3.$$

Démonstration. $x_2 x_3 = (ja + j^2 b)(j^2 a + jb) = j^3 a^2 + j^2 ab + j^4 ab + j^3 b^2 = a^2 + (j + j^2)ab + b^2 = a^2 - ab + b^2$. Ensuite $x_1(x_2 + x_3) = -x_1^2 = -(a + b)^2$, d'où

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = -(a + b)^2 + a^2 - ab + b^2 = -3ab.$$

Enfin $x_1 x_2 x_3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$. □

6 Résolution

6.1 L'équation résolvante du second degré

Les racines x_1, x_2, x_3 de P sont de somme nulle : on peut leur appliquer la proposition 6. Les relations de Viète pour $X^3 + pX + q$ s'écrivent

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = p, \qquad x_1 x_2 x_3 = -q,$$

ce qui, d'après la proposition 7, donne

$$\boxed{ab = -\frac{p}{3}, \qquad a^3 + b^3 = -q} \tag{5}$$

Par conséquent $a^3 b^3 = -\dfrac{p^3}{27}$, et a^3, b^3 sont les deux racines de l'équation du second degré

$$Z^2 + qZ - \frac{p^3}{27} = 0. \tag{6}$$

Définition 8. On pose

$$D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}.$$

Le discriminant de (6) vaut $4D$, et le discriminant de P vaut $\Delta = -(4p^3 + 27q^2) = -108\, D$.

Les solutions de (6) sont

$$a^3 = -\frac{q}{2} + \delta, \qquad b^3 = -\frac{q}{2} - \delta,$$

où δ est une racine carrée (complexe si $D < 0$) de D.

6.2 Choix des racines cubiques

Chacun des nombres a^3 et b^3 admet trois racines cubiques. On choisit une racine cubique a de a^3, puis on prend

$$b = -\frac{p}{3a} \quad (\text{si } a \neq 0),$$

de sorte que la contrainte $ab = -p/3$ soit respectée (elle ne découle pas de $a^3b^3 = -p^3/27$, qui ne fixe ab qu'à un facteur j ou j^2 près). Remplacer a par ja remplace b par j^2b, ce qui ne fait que permuter x_1, x_2, x_3 : le choix initial est sans importance.

Théorème 9 (Formules de Cardan)**.** *Les racines de $X^3 + pX + q$ sont*

$$x_1 = a + b, \qquad x_2 = ja + j^2b, \qquad x_3 = j^2a + jb,$$

où a et b sont des racines cubiques de $-\frac{q}{2} \pm \sqrt{D}$ vérifiant $ab = -\frac{p}{3}$.

6.3 Retour aux inconnues de la méthode

On choisit $\alpha = \Sigma = -x_1$, de sorte que le trinôme ait pour racines $u = x_2$ et $v = x_3$. Alors

$$\Sigma = u + v = (j + j^2)(a + b) = -(a + b),$$
$$\Pi = uv = a^2 - ab + b^2.$$

On vérifie la cohérence avec le système :

— $p + \Sigma^2 = -3ab + (a + b)^2 = a^2 - ab + b^2 = \Pi$;

— $\Sigma\Pi = -(a + b)(a^2 - ab + b^2) = -(a^3 + b^3) = q$.

La factorisation cherchée est donc

$$\boxed{X^3 + pX + q = \big(X - (a + b)\big)\Big(X^2 + (a + b)X + a^2 - ab + b^2\Big)}$$

et le discriminant du trinôme vaut

$$\Sigma^2 - 4\Pi = (a + b)^2 - 4(a^2 - ab + b^2) = -3(a - b)^2.$$

7 Discussion selon le signe de D

On suppose p, q réels.

Cas $D > 0$: une racine réelle, deux racines complexes conjuguées.

On prend pour a et b les racines cubiques *réelles* de $-\frac{q}{2} \pm \sqrt{D}$; on a bien $ab = \sqrt[3]{\frac{q^2}{4} - D} = -\frac{p}{3}$. Alors $x_1 = a + b$ est réelle et

$$x_{2,3} = -\frac{a + b}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}(a - b).$$

Le discriminant du trinôme $-3(a - b)^2$ est strictement négatif.

Cas $D < 0$: trois racines réelles distinctes (*casus irreducibilis*).

Alors $p < 0$, a^3 et b^3 sont complexes conjugués et l'on peut prendre $b = \bar{a}$. Les trois racines $a + \bar{a}$, $ja + \overline{ja}$, $j^2a + \overline{j^2a}$ sont réelles. En écrivant $a = \sqrt{-p/3}\, e^{i\theta}$, on obtient la forme trigonométrique

$$x_k = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\, \cos\left(\theta + \frac{2k\pi}{3}\right), \quad k = 0, 1, 2, \qquad \theta = \frac{1}{3}\arccos\left(\frac{3q}{2p}\sqrt{-\frac{3}{p}}\right).$$

Le discriminant du trinôme $-3(a - \bar{a})^2 = 12\,(\operatorname{Im} a)^2$ est positif : ses deux racines sont réelles.

Cas $D = 0$ et $p \neq 0$: une racine simple et une racine double.

Alors $a^3 = b^3 = -\frac{q}{2}$ et l'on prend $a = b = \sqrt[3]{-q/2}$. Les racines sont

$$x_1 = 2a = \frac{3q}{p}, \qquad x_2 = x_3 = -a = -\frac{3q}{2p}.$$

Le trinôme a pour discriminant 0 : c'est la racine double.

Cas $p = q = 0$.

$P(X) = X^3$: la racine 0 est triple, et $\Sigma = \Pi = 0$.

Remarque 10. Un polynôme de degré 3 possède exactement trois racines dans $\mathbb{C}$, comptées avec leur multiplicité. Les différentes situations rencontrées dans la méthode (racine nulle lorsque $q = 0$, trinôme à racines réelles, complexes ou double) ne fournissent pas de nouvelles racines : ce sont des cas particuliers, selon la valeur de D, des trois racines x_1, x_2, x_3 ci-dessus.

8 Exemples

Exemple 11 ($D > 0$)**.** $X^3 - 6X - 9 = 0$: $p = -6$, $q = -9$, $D = \frac{81}{4} - 8 = \frac{49}{4}$, $\sqrt{D} = \frac{7}{2}$.

On trouve $a^3 = \frac{9}{2} + \frac{7}{2} = 8$, $b^3 = \frac{9}{2} - \frac{7}{2} = 1$, d'où $a = 2$, $b = 1$, et $ab = 2 = -\frac{p}{3}$.

— Racine réelle : $x_1 = 3$.

— $\Sigma = -3$, $\Pi = p + \Sigma^2 = 3$; trinôme $X^2 + 3X + 3$.

— Racines complexes : $x_{2,3} = \dfrac{-3 \pm i\sqrt{3}}{2}$, qui sont bien $2j + j^2$ et $2j^2 + j$.

Factorisation : $X^3 - 6X - 9 = (X - 3)(X^2 + 3X + 3)$.

Exemple 12 ($D < 0$)**.** $X^3 - 3X + 1 = 0$: $p = -3$, $q = 1$, $D = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$.

On trouve $a^3 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $b^3 = \overline{a^3}$. On prend $a = e^{\frac{2i\pi}{9}}$, $b = e^{-\frac{2i\pi}{9}}$; on a bien $ab = 1 = -\frac{p}{3}$. Les racines sont

$$x_1 = 2\cos\frac{2\pi}{9}, \qquad x_2 = 2\cos\frac{8\pi}{9}, \qquad x_3 = 2\cos\frac{14\pi}{9} = 2\cos\frac{4\pi}{9},$$

toutes réelles, bien qu'obtenues en passant par les nombres complexes.

Exemple 13 ($D = 0$)**.** $X^3 - 3X + 2 = 0$: $p = -3$, $q = 2$, $D = 1 - 1 = 0$.

On a $a^3 = b^3 = -1$, d'où $a = b = -1$, $ab = 1 = -\frac{p}{3}$. Racines : $x_1 = -2$ et $x_2 = x_3 = -(j + j^2) = 1$ (racine double).

Factorisation : $X^3 - 3X + 2 = (X + 2)(X - 1)^2$, avec $\Sigma = 2$, $\Pi = 1$.