

# Solides

Hugues GENVRIN

February 2026

## 1 Surface d'un disque

On peut calculer la surface d'un disque à partir d'un cercle muni d'un rayon  $R = OA$ . On considère le triangle élémentaire  $(O, A, M)$  où  $h = [M; H]$  est la hauteur issue de  $M$  relative à la base  $[O; A]$ .  $\overline{AM} = d\ell$ . Soit  $d\mathcal{A}$  l'aire élémentaire du cercle définie par  $(O, A, M)$ . On a  $d\mathcal{A}$  qui est équivalent à  $\frac{B \times h}{2}$  l'aire du triangle élémentaire. Avec  $h = R \sin d\alpha$  avec  $d\alpha = \widehat{HOA}$ . Lorsque  $d\alpha \rightarrow 0$ ,  $\sin d\alpha = d\alpha$ . D'où  $d\mathcal{A} = \frac{R \times R d\alpha}{2}$ . En intégrant par rapport à  $\alpha$ , on en déduit  $d\mathcal{A} = R^2 \times \frac{1}{2} \times \int_0^{2\pi} d\alpha = \pi R^2$ .

## 2 Le cylindre

### 2.1 L'aire d'un cylindre

On construit sur les bases du cylindres deux polygones réguliers de côté  $\Delta p$  et de rayon  $R$  où  $R$  est le rayon du cercle circonscrit. L'aire des rectangles élémentaires définis en joignant les sommets des deux bases deux à deux nous autorise à dire que l'aire latérale du polyèdre inscrit dans le cylindre vaut  $\sum \Delta p \times h$  où  $h$  est la hauteur du cylindre (donc des rectangles élémentaires). Or  $\sum \Delta p = 2\pi r$  lorsque  $\Delta p \rightarrow 0$ , où  $r$  est le rayon des cercles de la base. D'où  $\mathcal{A}_\ell = 2\pi r \times h$ . L'aire totale du cylindre  $\mathcal{A} = 2\pi R \times h + 2\pi R^2$ .

### 2.2 Volume d'un cylindre

On construit à partir des polygones définis ci-dessus des prismes droit. Le volume d'un prisme valant  $V_p = \frac{\Delta p \times h \times R}{2}$ . On rappelle que l'aire d'un prisme droit vaut moitié que celle d'un parallélépipède construit à partir du prisme. Alors par un raisonnement analogue au calcul de l'aire latérale d'un cylindre, le volume du cylindre  $V_{cy} = \sum \frac{\Delta p \times h \times R}{2} = \pi R^2 \times h$ .

## 3 La sphère

### 3.1 Aire d'une sphère

Soit une sphère  $S$  de centre  $O$  et de rayon  $R$ . On appelle  $N$  la pôle Nord, et  $E$  le pôle Est. Soit  $M$  un point de  $[O; N]$ . On peut le repérer par un parallèle défini par l'angle sphérique  $\phi = \widehat{NOM'}$ , où  $M'$  est l'intersection du parallèle et de la sphère. Ce point est situé dans la demi-sphère Est.

L'aire  $\mathcal{A}$  de la sphère est égale au double de celle de la demi-sphère supérieure qu'on note  $\mathcal{A}^*$ . L'aire élémentaire  $d\mathcal{A}^*$  est équivalente à l'aire latérale d'un cylindre élémentaire, de centre  $M$ , de hauteur  $dh$  homogène, tendant vers zéro et de circonférence  $2\pi r$ , où  $r = MM'$ . Or l'aire latérale du cylindre élémentaire vaut  $\Delta\mathcal{A}^* = 2\pi r \times dh$ , avec  $r = R \sin(\phi)$ . Le domaine de définition de  $\phi$  est  $[0; \frac{\pi}{2}]$

Alors, les variations par rapport à  $\phi$  de  $\Delta\mathcal{A}^*$ , soit  $d\Delta\mathcal{A}^* = 2\pi R \cos\phi \, d\phi \, dh$ . Comme  $\sum_{dh} d\Delta\mathcal{A}^* = 2\pi R^2 \cos\phi \, d\phi$ , puisque  $\sum_{dh} dh = R$ ; il vient  $\mathcal{A}^* = 2\pi R^2 \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\phi \, d\phi = 2\pi R^2 [\sin\phi]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi R^2$ .

On a alors  $\boxed{\mathcal{A} = 2 \times \mathcal{A}^* = 4\pi R^2}$ .

### 3.2 Volume d'une boule

Soit une boule élémentaire de centre  $O$  et de rayon  $r$  de surface  $S(r)$ . On sait que l'aire de  $S(r)$  vaut  $\mathcal{A}(r) = 4\pi r^2$ . Tout élément de volume de la boule est égal à un recouvrement de sphère élémentaires  $S(r) \times dr$ . Réciproquement les éléments de volume  $S(r) \times dr$  forment une partition de la boule. Donc, le volume de la boule de centre  $O$  de rayon  $R$  est égal à la surface balayée par la sphère de rayon  $r$  en expansion sur un élément  $dr$ , prise entre 0 et  $R$ . D'où  $\mathcal{V} = \int_0^R \mathcal{A}(r) \, dr = \int_0^R 4\pi r^2 \, dr = \frac{4}{3}\pi R^3$ .