Le groupe de rotation sous-jacent à un trinôme

Du réel au complexe par un quart de tour

Hugues Genvrin

Novembre 2026

Résumé

On montre que tout trinôme réel de marge non nulle possède un *dual* de même centre et de marge opposée, et que le quart de tour autour de ce centre fait passer des racines de l'un à celles de l'autre, donc des racines réelles aux racines complexes et inversement. Le dual s'écrit simplement avec les moyennes : il remplace la moyenne géométrique des racines par leur moyenne quadratique, à moyenne arithmétique fixée. Les quatre racines du trinôme et de son dual sont les sommets d'un carré centré sur le centre des racines. Le groupe des quarts de tour autour de ce centre est le transport, par changement de repère, du groupe de rotation intrinsèque d'ordre 4 du plan complexe ; son sous-groupe d'ordre 2, le demi-tour, permute les racines de chaque trinôme, et les deux autres éléments échangent le trinôme et son dual. On montre qu'aucune rotation d'ordre 2 ne réalise cet échange, mais que deux réflexions le réalisent ; le groupe complet des symétries du carré est le groupe diédral d'ordre 8. On montre enfin que le groupe de Galois du produit des deux trinômes est un sous-groupe de ce groupe diédral, par son action sur les racines : il est contenu dans le groupe de Klein des deux axes, et il rencontre le groupe des rotations au plus en le demi-tour.

Table des matières

1 Introduction **2**

2 Le plan animé d'un mouvement de rotation **2**

3 Forme centrée et marge **3**

4 Le trinôme dual **3**

5 Le carré des racines **5**

6 Le groupe de rotation sous-jacent **5**

7 Les symétries du carré **7**

8 Ce que ce groupe n'est pas : le groupe de Galois **7**

9 Exemples **9**

10 Lecture dans la théorie du grain **10**

11 Bilan **10**

1 Introduction

Le plan complexe peut être vu comme animé d'un mouvement de rotation intrinsèque : le quart de tour $\imath$ autour de l'origine engendre un groupe cyclique d'ordre 4 qui fait passer le plan par quatre états successifs [2]. D'autre part, les racines d'un trinôme réel se disposent symétriquement autour de leur centre, la moyenne arithmétique μ_a : sur une droite horizontale lorsqu'elles sont réelles, sur une droite verticale lorsqu'elles sont complexes [3].

L'idée de ce texte est de relier ces deux faits : le quart de tour, transporté au centre des racines, couche les racines complexes sur l'axe réel et redresse les racines réelles à la verticale. Il faut seulement prendre garde à un point : un même trinôme n'a jamais à la fois des racines réelles et des racines complexes. Le quart de tour fait donc passer d'un trinôme à un autre, que nous appelons son *dual*. Une fois ce dual identifié, l'énoncé devient un théorème, et le groupe de rotation qui le porte se décrit exactement.

Notations. Le trinôme est $P(x) = x^2 - \Sigma x + \Pi$, à coefficients réels, de racines u et v. On note

$$\mu_a = \frac{\Sigma}{2}, \qquad \mu_g^2 = \Pi, \qquad \mu_q^2 = \frac{u^2+v^2}{2} = 2\mu_a^2 - \Pi,$$

la moyenne arithmétique, le carré de la moyenne géométrique et le carré de la moyenne quadratique des racines. La dernière égalité vient de $u^2+v^2 = (u+v)^2 - 2uv$; elle donne une expression de μ_q^2 à partir des seuls coefficients, valable que les racines soient réelles ou non. Les carrés μ_g^2 et μ_q^2 sont manipulés comme des nombres réels quelconques : ils peuvent être négatifs, et l'on n'en prend pas la racine. Le point $A = (\mu_a, 0)$ est le *centre* du trinôme, et

$$D = \mu_a^2 - \mu_g^2$$

est sa *marge* : c'est le quart du discriminant.

Statut. Les énoncés sont démontrés. Les grands théorèmes de la théorie de Galois sont cités sans démonstration [1, 6]. La section 10 propose une lecture dans la théorie du grain, présentée comme telle.

2 Le plan animé d'un mouvement de rotation

On rappelle le cadre de [2]. L'opérateur $\imath = \mathrm{Rot}(O, \pi/2)$ engendre le groupe

$$G = \langle \imath \rangle = \{\mathrm{Id}, \imath, \imath^2, \imath^3\} \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z},$$

qui agit transitivement sur les quatre états du plan. Son unique point fixe est O, et le barycentre de l'orbite de 1 est le centre de rotation, puisque $1 + \imath + \imath^2 + \imath^3 = 0$.

Le changement de repère $\mathcal{R} = (O, 1, \imath) \mapsto \mathcal{R}' = (A, 1, \imath)$ transporte ce mouvement autour de A. Si t_A désigne la translation $z \mapsto z + \mu_a$, le quart de tour de centre A est

$$\rho_A = t_A \circ \imath \circ t_A^{-1} : \qquad z \longmapsto \mu_a + \imath\,(z - \mu_a).$$

Lemme 1. *L'application $g \mapsto t_A \circ g \circ t_A^{-1}$ est un isomorphisme de G sur*

$$G_A = \langle \rho_A \rangle = \{\mathrm{Id}, \rho_A, \rho_A^2, \rho_A^3\}.$$

En particulier $G_A \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, son unique point fixe est A, et ρ_A^2 est le demi-tour $z \mapsto 2\mu_a - z$.

Démonstration. La conjugaison par une bijection fixée respecte la composition : $t_A g g' t_A^{-1} = (t_A g t_A^{-1})(t_A g' t_A^{-1})$. Elle est bijective, d'inverse la conjugaison par t_A^{-1}. Un point z est fixe par $t_A g t_A^{-1}$ si et seulement si $t_A^{-1}(z)$ est fixe par g ; pour $g \neq \mathrm{Id}$, cela donne $t_A^{-1}(z) = 0$, soit $z = A$. Enfin $\rho_A^2(z) = \mu_a + \imath^2(z - \mu_a) = 2\mu_a - z$. □

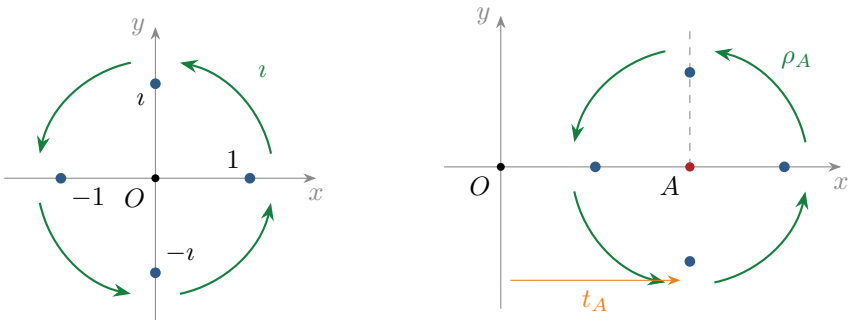


FIGURE 1 – Schéma : le mouvement de rotation intrinsèque autour de O (à gauche) et son transport autour du centre A des racines par le changement de repère (à droite).

3 Forme centrée et marge

Lemme 2 (Forme centrée)**.** *Avec $X = x - \mu_a$, on a $P(x) = P(X + \mu_a) = X^2 - D$. Par suite :*

(a) si $D > 0$, les racines sont réelles : $x = \mu_a \pm \sqrt{D}$;

(b) si $D = 0$, la racine est double : $x = \mu_a$;

(c) si $D < 0$, les racines sont complexes conjuguées : $x = \mu_a \pm \imath\sqrt{-D}$.

Démonstration. $(X + \mu_a)^2 - 2\mu_a(X + \mu_a) + \mu_g^2 = X^2 - \mu_a^2 + \mu_g^2 = X^2 - D$. L'équation $X^2 = D$ se résout dans les trois cas. □

Remarque. Le changement de variable s'écrit $P(X + \mu_a)$ et non $P(x - \mu_a)$: on exprime x en fonction de X. De même, la forme centrée $X^2 + (\mu_g^2 - \mu_a^2)$ donne $X^2 = \mu_a^2 - \mu_g^2$, et non $\mu_g^2 - \mu_a^2$: le signe sous le radical est celui de la marge.

Dans les trois cas, les racines sont symétriques par rapport à A : elles se déduisent l'une de l'autre par le demi-tour ρ_A^2, et leur demi-écart est $\sqrt{|D|}$. Seule leur direction change : horizontale, réduite à un point, ou verticale (figure 2).

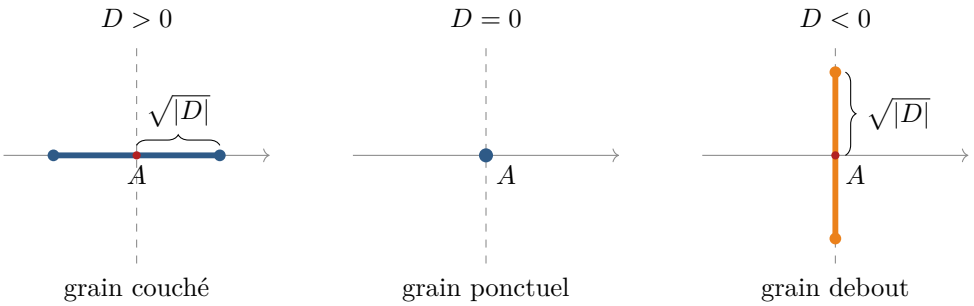


FIGURE 2 – Schéma : les racines d'un trinôme autour de son centre A, selon le signe de la marge.

4 Le trinôme dual

Puisqu'un trinôme a soit des racines réelles, soit des racines complexes, le passage des unes aux autres met en jeu un second trinôme.

Définition 3 (Dual)**.** Le *dual* du trinôme $P = x^2 - \Sigma x + \Pi$ est

$$P^*(x) = x^2 - \Sigma x + (2\mu_a^2 - \Pi).$$

Proposition 4. *(a) P^* a le même centre que P et la marge opposée : $P^* = X^2 + D$.*

(b) En termes de moyennes, $P^*(x) = x^2 - 2\mu_a x + \mu_q^2$: la moyenne géométrique de P^* est la moyenne quadratique de P, et inversement,

$$\mu_a^* = \mu_a, \qquad (\mu_g^*)^2 = \mu_q^2, \qquad (\mu_q^*)^2 = \mu_g^2.$$

(c) La dualité est une involution : $(P^*)^* = P$.

(d) Si $D \neq 0$, exactement l'un des deux trinômes P et P^* a des racines réelles, et l'autre des racines complexes conjuguées.

(e) $P \cdot P^* = X^4 - D^2$.

Démonstration. (a) Les deux trinômes ont la même somme Σ, donc le même centre. La marge de P^* est $\mu_a^2 - (2\mu_a^2 - \Pi) = \Pi - \mu_a^2 = -D$, et le lemme 2 donne $P^* = X^2 + D$.

(b) Le terme constant de P^* est $2\mu_a^2 - \Pi = \mu_q^2$. Pour P^*, la moyenne quadratique vaut $2(\mu_a^*)^2 - (\mu_g^*)^2 = 2\mu_a^2 - \mu_q^2 = \Pi = \mu_g^2$.

(c) Le terme constant de $(P^*)^*$ est $2\mu_a^2 - (2\mu_a^2 - \Pi) = \Pi$.

(d) Les marges D et $-D$ sont non nulles et de signes opposés ; on conclut par le lemme 2.

(e) $(X^2 - D)(X^2 + D) = X^4 - D^2$. □

Le point (b) donne une forme simple au critère de réalité. Une marge positive s'écrit $\mu_a^2 > \mu_g^2$: le trinôme a des racines réelles distinctes exactement quand sa moyenne arithmétique dépasse sa moyenne géométrique, en carrés. Comme $\mu_a^2 = \frac{\mu_g^2 + \mu_q^2}{2}$, la moyenne arithmétique est toujours, en carrés, à mi-chemin des deux autres ; la dualité échange les deux extrêmes et fixe le milieu.

Corollaire 5 (Lecture sur un cercle)**.** *Supposons $\mu_g^2 \geq 0$ et $\mu_q^2 \geq 0$, ce qui équivaut à $|D| \leq \mu_a^2$, et prenons $\mu_g, \mu_q \geq 0$. Le point (μ_g, μ_q) est sur le cercle $s^2 + t^2 = 2\mu_a^2$, de rayon $\sqrt{2}\,|\mu_a|$. La dualité est la symétrie de ce point par rapport à la première bissectrice $s = t$. Son unique point fixe sur le cercle, dans le quart positif, est $(|\mu_a|, |\mu_a|)$: c'est le cas de la racine double.*

Démonstration. $\mu_g^2 + \mu_q^2 = 2\mu_a^2$, et la dualité échange μ_g et μ_q. Sur la bissectrice, $\mu_g^2 = \mu_q^2$ donne $\mu_g^2 = \mu_a^2$, soit $D = 0$. Enfin $\mu_g^2 \geq 0$ et $\mu_q^2 \geq 0$ s'écrivent $\mu_a^2 - D \geq 0$ et $\mu_a^2 + D \geq 0$. □

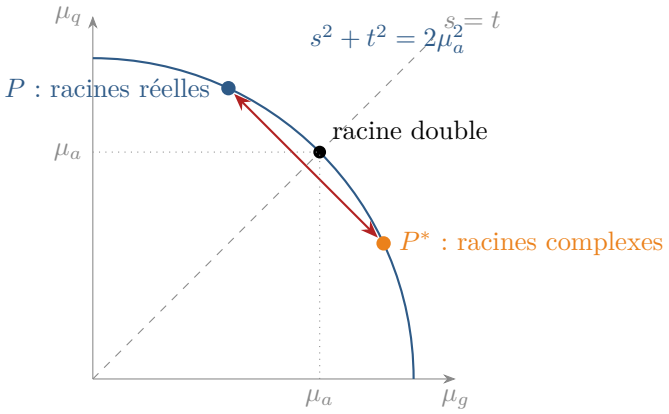


FIGURE 3 – Schéma : le couple des moyennes (μ_g, μ_q) sur le cercle de rayon $\sqrt{2}\,\mu_a$; la dualité est la symétrie par rapport à la bissectrice. Au-dessus de la bissectrice, $\mu_g < \mu_a$ et les racines sont réelles ; au-dessous, $\mu_g > \mu_a$ et elles sont complexes.

Remarque. Les graphes de P et de P^* sont deux paraboles de même axe $x = \mu_a$, de sommets $(\mu_a, -D)$ et (μ_a, D), symétriques par rapport à A ; et $P + P^* = 2X^2$. L'une coupe l'axe réel, l'autre non (figure 4).

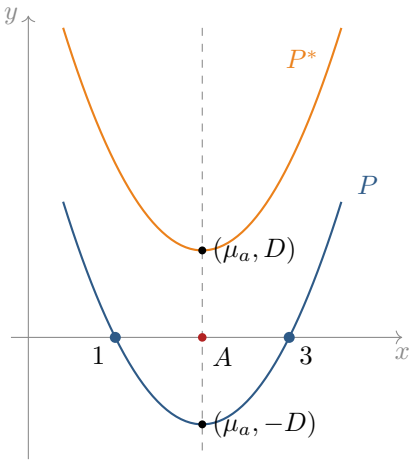


FIGURE 4 – Schéma : $P = x^2 - 4x + 3$ et son dual $P^* = x^2 - 4x + 5$. Les sommets sont symétriques par rapport au centre $A = (2, 0)$.

5 Le carré des racines

Théorème 6 (Carré des racines)**.** *Soit P un trinôme réel de marge $D \neq 0$, et $d = |D|$. Les quatre racines de P et de P^* sont*

$$\mu_a + \sqrt{d}, \qquad \mu_a + \imath\sqrt{d}, \qquad \mu_a - \sqrt{d}, \qquad \mu_a - \imath\sqrt{d}.$$

Ce sont, dans cet ordre, les sommets d'un carré de centre A, de demi-diagonale $\sqrt{d}$ et de côté $\sqrt{2d}$. Ce carré est l'orbite de $\mu_a + \sqrt{d}$ sous le groupe G_A, et son barycentre est A.

Démonstration. D'après la proposition 4, les deux trinômes sont $X^2 - D$ et $X^2 + D$; l'un est $X^2 - d$, de racines $X = \pm\sqrt{d}$, l'autre est $X^2 + d$, de racines $X = \pm\imath\sqrt{d}$. Ce sont les quatre points $X = \imath^k\sqrt{d}$, $k = 0, 1, 2, 3$, c'est-à-dire $x = \mu_a + \imath^k\sqrt{d} = \rho_A^k(\mu_a + \sqrt{d})$. Ils sont à la distance $\sqrt{d}$ de A, et deux sommets consécutifs sont à la distance $|\sqrt{d} - \imath\sqrt{d}| = \sqrt{d}\,|1 - \imath| = \sqrt{2d}$. Le barycentre est $\mu_a + \frac{\sqrt{d}}{4}(1 + \imath + \imath^2 + \imath^3) = \mu_a$. □

Le dernier point est la remarque $1 + \imath + \imath^2 + \imath^3 = 0$ de [2], transportée en A : le centre du trinôme joue le rôle de l'axe de la toupie. En coordonnées, la somme des quatre racines vaut $4\mu_a = 2\Sigma$.

Remarque. Les sommets sont les racines de $X^4 = D^2$, c'est-à-dire les racines quatrièmes de D^2, lues dans le repère $\mathcal{R}'$ centré en A. Si $D = 0$, le carré se réduit au point A, et $P = P^* = X^2$: l'énoncé exige $D \neq 0$.

6 Le groupe de rotation sous-jacent

On note désormais P_r celui des deux trinômes qui a des racines réelles et P_c celui qui a des racines complexes. On pose

$$H = \{\mathrm{Id}, \rho_A^2\} \subset G_A.$$

On dit qu'une transformation *conserve* un trinôme lorsqu'elle envoie l'ensemble de ses racines sur lui-même. Cette conservation est globale, et non point par point : la transformation peut échanger les deux racines. Ainsi le demi-tour conserve chaque trinôme tout en échangeant ses racines, alors que le quart de tour envoie les racines de l'un sur celles de l'autre.

Théorème 7 (Groupe de rotation sous-jacent)**.** *Soit P un trinôme réel de marge $D \neq 0$. Le groupe $G_A \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ agit transitivement sur les quatre racines de $P \cdot P^*$, et :*

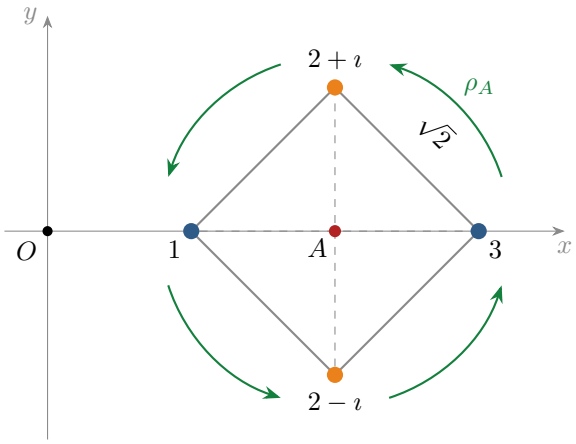


FIGURE 5 – Schéma : le carré des racines pour $P = x^2 - 4x + 3$ (racines 1 et 3, en bleu) et $P^* = x^2 - 4x + 5$ (racines $2 \pm \imath$, en orange). Le quart de tour ρ_A fait le tour des quatre sommets en alternant réel et complexe.

(a) *le demi-tour ρ_A^2 échange les deux racines de chaque trinôme : H conserve P_r et P_c globalement ;*

(b) *les quarts de tour ρ_A et ρ_A^3 envoient les racines de P_r sur celles de P_c, et celles de P_c sur celles de P_r ;*

(c) *le quotient $G_A/H \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ agit sur la paire $\{P_r, P_c\}$ en l'échangeant.*

Démonstration. Avec les notations du théorème 6, ρ_A^m envoie $\mu_a + \imath^k\sqrt{d}$ sur $\mu_a + \imath^{k+m}\sqrt{d}$. Les racines de P_r correspondent à k pair, celles de P_c à k impair. Pour $m = 2$, la parité de k est conservée et $k \neq k + 2$: chaque trinôme voit ses deux racines échangées. Pour m impair, la parité change. L'action est transitive car $\rho_A^m(\mu_a + \sqrt{d})$ parcourt les quatre sommets. Enfin, l'application qui à ρ_A^m associe la parité de m est un morphisme surjectif $G_A \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ de noyau H ; elle décrit exactement l'effet de ρ_A^m sur la paire $\{P_r, P_c\}$. □

On obtient ainsi l'énoncé recherché :

Corollaire 8. *Pour tout trinôme réel de marge non nulle, il existe un groupe de rotation, G_A, de centre le centre A des racines, qui fait passer des racines réelles aux racines complexes et réciproquement. C'est le transport en A du groupe de rotation intrinsèque G du plan complexe, et le groupe des rotations qui conservent chaque trinôme en est le sous-groupe d'ordre 2, H.*

Proposition 9 (Pas de rotation d'ordre 2)**.** *Aucune rotation d'ordre 2 ne fait passer des racines réelles aux racines complexes. Plus précisément, l'ensemble $\{\rho_A, \rho_A^3\}$ des rotations qui réalisent ce passage n'est pas un groupe, et la suite*

$$1 \longrightarrow H \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow G_A \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 1$$

n'est pas scindée.

Démonstration. Une rotation qui envoie le carré sur lui-même fixe son centre A, donc appartient à $\{\mathrm{Id}, \rho_A, \rho_A^2, \rho_A^3\}$. Le seul élément d'ordre 2 est ρ_A^2, qui conserve chaque trinôme. L'ensemble $\{\rho_A, \rho_A^3\}$ ne contient pas l'identité. Une section de $G_A \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ serait un élément d'ordre 2 d'image non triviale ; il n'en existe pas. □

Le passage du réel au complexe est donc porté par le quart de tour, d'ordre 4, et non par un élément d'ordre 2. Pour l'un comme pour l'autre, l'angle $\pi/2$ correspond à l'ordre 4 et l'angle π à l'ordre 2.

7 Les symétries du carré

Si l'on admet aussi les réflexions, le passage du réel au complexe peut être réalisé par un élément d'ordre 2.

Proposition 10. *Le groupe des isométries du plan qui conservent le carré des racines est le groupe diédral D_4 d'ordre 8. Il contient G_A et quatre réflexions :*

$$\begin{aligned}
s_h &: z \mapsto \bar{z} && \text{(axe horizontal, par les racines réelles)},\\
s_v &: z \mapsto 2\mu_a - \bar{z} && \text{(axe vertical, par les racines complexes)},\\
s_+ &: z \mapsto \mu_a + \imath\,\overline{(z-\mu_a)} && \text{(première diagonale)},\\
s_- &: z \mapsto \mu_a - \imath\,\overline{(z-\mu_a)} && \text{(seconde diagonale)}.
\end{aligned}$$

Les réflexions s_h et s_v conservent chaque trinôme ; les réflexions diagonales s_+ et s_-, d'ordre 2, échangent P_r et P_c.

Démonstration. Le groupe des isométries d'un carré est D_4, formé de ses quatre rotations et de ses quatre réflexions. En $X = z - \mu_a$, les quatre réflexions s'écrivent $X \mapsto \bar{X}$, $X \mapsto -\bar{X}$, $X \mapsto \imath\bar{X}$, $X \mapsto -\imath\bar{X}$; ce sont des involutions, car $\imath\,\overline{\imath\bar{X}} = \imath(-\imath)X = X$. Sur $X = \pm\sqrt{d}$ et $X = \pm\imath\sqrt{d}$: $X \mapsto \bar{X}$ fixe les racines réelles et échange les complexes ; $X \mapsto -\bar{X}$ échange les réelles et fixe les complexes ; $X \mapsto \pm\imath\bar{X}$ envoie $\sqrt{d}$ sur $\pm\imath\sqrt{d}$, donc un réel sur un complexe. □

Les trois sous-groupes d'ordre 4 de D_4 contiennent tous le demi-tour (figure 6) :

$$G_A = \{\mathrm{Id}, \rho_A, \rho_A^2, \rho_A^3\}, \qquad V_{\text{axes}} = \{\mathrm{Id}, \rho_A^2, s_h, s_v\}, \qquad V_{\text{diag}} = \{\mathrm{Id}, \rho_A^2, s_+, s_-\}.$$

Le premier est cyclique ; les deux autres sont des groupes de Klein. V_{axes} conserve chaque trinôme ; G_A et V_{diag} contiennent chacun deux éléments qui les échangent.

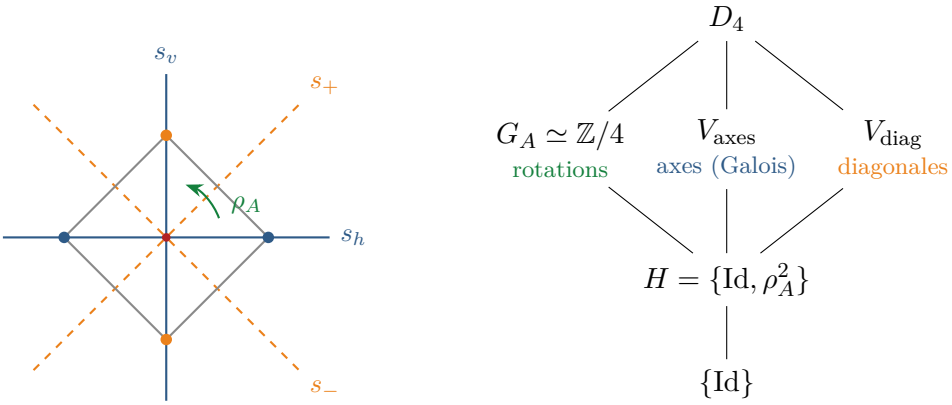


FIGURE 6 – Schéma : les axes de symétrie du carré des racines (à gauche) et une partie du treillis des sous-groupes de D_4 (à droite). Les éléments de V_{axes} conservent chaque trinôme ; les quarts de tour et les réflexions diagonales les échangent.

Remarque. Les réflexions ne sont pas des similitudes directes : elles font intervenir la conjugaison $\bar{z}$. Le quart de tour ρ_A est la seule transformation de ce tableau qui s'écrive comme une multiplication par $\imath$ dans le repère $\mathcal{R}'$; c'est lui qui prolonge le mouvement intrinsèque du plan.

8 Ce que ce groupe n'est pas : le groupe de Galois

Supposons maintenant Σ et Π rationnels ; alors μ_a, D et $d = |D|$ sont rationnels. Le groupe de Galois de $P_r \cdot P_c = X^4 - d^2$ sur $\mathbb{Q}$ est le groupe des permutations des quatre racines qui

respectent toutes les relations à coefficients rationnels [1, 6]. En particulier, il envoie chaque racine sur une racine du même facteur irréductible.

Proposition 11. *(a) Si d n'est pas un carré de $\mathbb{Q}$, le corps des racines est $\mathbb{Q}(\sqrt{d}, \imath)$, de degré 4, et le groupe de Galois de $P_r \cdot P_c$ agit sur le carré comme $V_{\text{axes}} = \{\mathrm{Id}, \rho_A^2, s_h, s_v\}$.*

(b) Si d est un carré de $\mathbb{Q}$, les racines de P_r sont rationnelles, le corps des racines est $\mathbb{Q}(\imath)$, et le groupe de Galois agit comme $\{\mathrm{Id}, s_h\}$.

Dans les deux cas, le groupe de Galois est contenu dans V_{axes}, et son intersection avec G_A est contenue dans H. Le quart de tour ρ_A n'est jamais un élément du groupe de Galois.

Démonstration. Les racines sont $\mu_a \pm \sqrt{d}$ et $\mu_a \pm \imath\sqrt{d}$, et μ_a est rationnel ; le corps qu'elles engendrent est $\mathbb{Q}(\sqrt{d}, \imath)$.

(a) $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ est un corps réel de degré 2 qui ne contient pas $\imath$; le corps des racines est de degré 4. Ses automorphismes sont déterminés par les signes de $\sqrt{d}$ et de $\imath$: $\sigma : (\sqrt{d}, \imath) \mapsto (-\sqrt{d}, \imath)$, $\tau : (\sqrt{d}, \imath) \mapsto (\sqrt{d}, -\imath)$ et $\sigma\tau$. La conjugaison τ fixe $\mu_a \pm \sqrt{d}$ et échange $\mu_a \pm \imath\sqrt{d}$: c'est s_h. L'automorphisme σ envoie $\mu_a + \imath^k\sqrt{d}$ sur $\mu_a - \imath^k\sqrt{d}$: c'est ρ_A^2. Enfin $\sigma\tau$ échange les racines réelles et fixe les complexes : c'est s_v. Le groupe est $\{\mathrm{Id}, \rho_A^2, s_h, s_v\} = V_{\text{axes}} \simeq \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$.

(b) Si $d = r^2$ avec r rationnel, $\mu_a \pm r$ sont rationnelles et fixées ; $P_c = X^2 + r^2$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$ et son corps des racines est $\mathbb{Q}(\imath)$. Le seul automorphisme non trivial est la conjugaison, qui agit comme s_h.

Dans les deux cas, chaque élément conserve P_r et P_c, alors que ρ_A les échange. □

Le groupe de Galois de chaque trinôme irréductible, pris seul, est donc le demi-tour autour de A : sur les deux racines d'un même trinôme, ρ_A^2, s_h et s_v agissent comme l'identité ou comme l'échange des deux racines. Mais sur les quatre racines ensemble, la structure de Galois est celle des deux axes, et non celle du quart de tour. Le groupe cyclique G_A est une structure géométrique du plan, que le changement de repère transporte du groupe intrinsèque G ; il contient le groupe de Galois de chaque trinôme, sans être le groupe de Galois du couple. Ce constat rejoint le fait, établi dans [4], qu'un quart de tour ne respecte pas la multiplication : ρ_O envoie 1 sur $\imath$, mais $1 \cdot 1 = 1$ alors que $\imath \cdot \imath = -1$.

On peut donc dire que le groupe de Galois du couple est un sous-groupe du groupe diédral, à condition de préciser en quel sens : un élément de Galois est un automorphisme de corps, un élément de D_4 une isométrie du plan, et l'on compare les deux par leur action sur les quatre racines.

Proposition 12 (Galois dans le diédral)**.** *Soient Σ, Π rationnels et $D \neq 0$. L'action sur les quatre racines de $P_r \cdot P_c$ définit un morphisme injectif du groupe de Galois dans le groupe D_4 des symétries du carré des racines, et son image vérifie*

$$\mathrm{Gal} \subset V_{\text{axes}} \subset D_4.$$

Démonstration. Le morphisme. Un automorphisme du corps des racines est déterminé par les images des racines, puisqu'elles engendrent ce corps ; l'action sur les racines est donc injective, et elle respecte la composition. Il reste à voir que chaque permutation obtenue est la restriction d'une isométrie du carré, et d'une seule. L'unicité vient de ce qu'une isométrie du plan est déterminée par les images de trois points non alignés. L'existence résulte du calcul de la proposition 11 ; on en donne ci-dessous une raison qui ne demande pas de calcul.

Les diagonales. Les deux diagonales du carré sont les paires de sommets opposés, $\{\mu_a \pm \sqrt{d}\}$ et $\{\mu_a \pm \imath\sqrt{d}\}$: ce sont les racines de P_r et celles de P_c. Une permutation des quatre sommets qui respecte le découpage en deux diagonales est déterminée par trois choix binaires : échanger ou non les deux diagonales, et échanger ou non les extrémités de chacune. Il y en a donc $2^3 = 8$. Toute isométrie du carré envoie une diagonale sur une diagonale, puisque ce sont les paires de sommets à distance maximale $2\sqrt{d}$; les huit éléments de D_4 respectent donc le découpage, et ils

épuisent les huit permutations possibles. Ainsi D_4 est exactement le groupe des permutations des sommets qui respectent les diagonales.

Galois respecte les diagonales. En $X = x - \mu_a$, deux racines d'une même diagonale vérifient $X + X' = 0$, c'est-à-dire $x + x' = 2\mu_a$, relation à coefficients rationnels. Si un élément σ de Galois envoie x sur y, il envoie donc $x' = 2\mu_a - x$ sur $2\mu_a - y$, qui est le sommet opposé à y. Il respecte le découpage, et appartient à D_4.

Galois conserve chaque diagonale. Comme P_r et P_c sont à coefficients rationnels, le lemme des facteurs irréductibles (une symétrie de Galois envoie une racine d'un polynôme rationnel sur une racine du même polynôme) montre que σ envoie chaque diagonale sur elle-même. Les éléments de D_4 qui conservent chaque diagonale sont Id, le demi-tour ρ_A^2, qui retourne les deux, s_h, qui fixe la diagonale horizontale et retourne la verticale, et s_v, qui fait l'inverse : c'est V_{axes}. □

L'argument des diagonales est général : il ne dépend que de la forme bicarrée $X^4 + aX^2 + b$, dont les racines vont par paires opposées. C'est un résultat classique que le groupe de Galois d'un polynôme bicarré irréductible est l'un des trois groupes V_4, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ou D_4, tous contenus dans D_4 [5]. Dans le cas du couple $P_r \cdot P_c = X^4 - d^2$, le polynôme bicarré n'est pas irréductible, puisqu'il se factorise en deux trinômes rationnels, et le groupe tombe dans V_{axes}.

Remarque (Permutations et isométries). Dans le résultat classique, D_4 est un groupe de permutations des racines, et non nécessairement un groupe d'isométries. Le polynôme $x^4 + 4x^2 + 2$, irréductible par le critère d'Eisenstein en 2, a pour groupe de Galois $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$: avec $a = 4$ et $b = 2$, le nombre $b(a^2 - 4b) = 16$ est un carré et b n'en est pas un [5]. Pourtant ses racines, $\pm\imath\sqrt{2 - \sqrt{2}}$ et $\pm\imath\sqrt{2 + \sqrt{2}}$, sont toutes sur l'axe imaginaire : elles ne forment pas un carré, et ce groupe cyclique d'ordre 4 n'est la rotation d'aucune figure visible. Les deux lectures ne coïncident que lorsque les racines forment un vrai carré, ce qui est le cas du couple $P_r \cdot P_c$: le D_4 des permutations est alors le D_4 géométrique, et la proposition 12 est un énoncé de géométrie.

9 Exemples

Le tableau suivant donne quelques couples de trinômes duaux. Les colonnes μ_g^2 et μ_q^2 s'échangent d'une ligne à l'autre de chaque couple, et la somme $\mu_g^2 + \mu_q^2 = 2\mu_a^2$ est constante.

Trinôme	μ_a	μ_g^2	μ_q^2	D	Racines
$x^2 - 4x + 3$	2	3	5	1	$1,\ 3$
$x^2 - 4x + 5$	2	5	3	-1	$2 \pm \imath$
$x^2 - 2$	0	-2	2	2	$\pm\sqrt{2}$
$x^2 + 2$	0	2	-2	-2	$\pm\imath\sqrt{2}$
$x^2 - 6x + 7$	3	7	11	2	$3 \pm \sqrt{2}$
$x^2 - 6x + 11$	3	11	7	-2	$3 \pm \imath\sqrt{2}$
$x^2 - 2x + 5$	1	5	-3	-4	$1 \pm 2\imath$
$x^2 - 2x - 3$	1	-3	5	4	$-1,\ 3$

— Le premier couple est celui des figures 4 et 5.

— Le deuxième est centré en O : $\rho_A = \imath$ lui-même, et le carré des racines est l'orbite de $\sqrt{2}$ sous le groupe intrinsèque G, sans changement de repère. Le groupe de Galois de $x^4 - 4$ sur $\mathbb{Q}$ est le groupe de Klein de $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \imath)$.

— Dans le dernier couple, $\mu_q^2 = -3$ est négatif : on lit les moyennes en carrés, sans en prendre la racine, et le corollaire 5 ne s'applique pas. Ici $d = 4$ est un carré, les racines réelles -1 et 3 sont rationnelles, et le groupe de Galois du couple se réduit à la conjugaison.

10 Lecture dans la théorie du grain

Cette section propose une interprétation ; elle ne contient pas d'énoncé nouveau.

Dans la lecture de [3], les racines réelles forment un *grain couché* de longueur $2\sqrt{d}$ centré en A, la racine double un *grain ponctuel*, les racines complexes un *grain debout* (figure 2). Le théorème 7 se lit alors ainsi : le quart de tour ρ_A redresse le grain couché de P_r en le grain debout de P_c, et couche le grain debout de P_c en le grain couché de P_r ; le demi-tour retourne chaque grain sur lui-même en échangeant ses extrémités. Le grain et son redressement ont la même longueur, puisque ρ_A est une isométrie : le couple (P_r, P_c) est un seul grain, vu dans ses quatre positions successives, à l'image de la toupie de [2].

Dans la lecture à deux résolutions, l'opérateur $\omega = 2^\nu \imath$ combine le quart de tour et un changement de niveau, et envoie le grain fin réel sur le grain grossier imaginaire. Le quart de tour ρ_A seul ne change pas de niveau : P_r et P_c s'expriment dans la même unité, et c'est pourquoi leurs racines forment un carré, et non un rectangle.

Enfin, la dualité échange la moyenne géométrique et la moyenne quadratique en conservant la moyenne arithmétique. Le critère de réalité $\mu_g^2 < \mu_a^2$ se lit : un trinôme a des racines réelles distinctes lorsque sa moyenne géométrique est en deçà de sa moyenne arithmétique, et son dual a alors des racines complexes, puisque sa moyenne géométrique, égale à μ_q, est au-delà.

11 Bilan

1. Un trinôme n'a jamais à la fois des racines réelles et complexes ; le passage des unes aux autres relie un trinôme P à son dual $P^* = x^2 - 2\mu_a x + \mu_q^2$, de même centre et de marge opposée (proposition 4).
2. Les racines de P et de P^* sont les sommets d'un carré de centre A et de côté $\sqrt{2|D|}$, dont le barycentre est A (théorème 6).
3. Le groupe $G_A \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ des quarts de tour de centre A, transport du groupe intrinsèque du plan, agit transitivement sur ce carré ; son sous-groupe d'ordre 2, le demi-tour, conserve chaque trinôme, et les quarts de tour font passer du réel au complexe et réciproquement (théorème 7).
4. Aucune rotation d'ordre 2 ne réalise ce passage ; deux réflexions, les diagonales du carré, le réalisent (propositions 9 et 10).
5. Le groupe de Galois du couple est un sous-groupe du groupe diédral D_4 des symétries du carré, par son action sur les racines ; il est contenu dans le groupe de Klein des deux axes, rencontre G_A au plus en le demi-tour, et ne contient jamais le quart de tour (propositions 11 et 12).

Références

[1] E. Artin, *Galois Theory*, Notre Dame, 1942.

[2] H. Genvrin, *Le plan complexe animé d'un mouvement de rotation intrinsèque*, mars 2026.

[3] H. Genvrin, *Autour des racines d'un trinôme*, octobre 2026.

[4] H. Genvrin, *Rotations, demi-tours et racines. Un regard géométrique sur la théorie de Galois*, octobre 2026.

[5] L.-C. Kappe et B. Warren, « An elementary test for the Galois group of a quartic polynomial », *The American Mathematical Monthly* 96 (1989), 133–137.

[6] I. Stewart, *Galois Theory*, 4e éd., CRC Press, 2015.