

Structure récursive des factorisations stratales

Factorisation imbriquée et transposabilité cardinal/dilatation

Hugues Genvrin

2 juillet 2026

Préambule

Ce document consigne deux résultats structurels sur les factorisations stratales dans le programme du grain :

- Une *factorisation imbriquée* des résolutions successives, qui exprime la structure récursive stratale.
- Un *principe de transposabilité* entre le cardinal et le facteur de dilatation, qui identifie une équivalence structurelle entre modes de comptage.

Contexte. Le déploiement du cercle unité C_1 dans le programme du grain admet plusieurs factorisations selon la résolution considérée. Ce document analyse la structure interne de ces factorisations et fait apparaître deux mécanismes complémentaires.

Statut épistémologique. Les deux résultats sont *mathématiquement solides* et directement démontrables à partir des règles de calcul de factorisation. Ils consolident la cohérence interne du programme et ouvrent une lecture récursive stratale.

Référence implicite. *Axiomatique du grain* (déploiement), *Symétrie de résolution* (théorème de factorisation), *Métrique stratale* v4 (Section 1 : Heuristique combinatoire).

1 Rappel : déploiement et factorisations

1.1 Le mécanisme de déploiement

Définition 1 (Déploiement à la résolution $-kn_\infty$). *Le déploiement du cercle unité C_1 (de longueur 2π) à la résolution $-kn_\infty$ est une bijection entre C_1 et un segment linéaire de longueur :*

$$\mathcal{L}_{kn_\infty} = 2\pi \cdot 2^{kn_\infty}.$$

Ce déploiement traduit la structure cyclique du cercle en une structure linéaire de longueur amplifiée par le facteur stratal 2^{kn_∞} .

Remarque 1 (Signification structurelle du facteur 2^{kn_∞}). *Le facteur 2^{kn_∞} n'est pas arbitraire : il représente le nombre de grains à la résolution $-kn_\infty$. Chaque grain occupe alors, sur le segment déployé, une longueur d'un tour complet du cercle (2π). Le déploiement ne comprime pas le cercle : il le étire en préservant chaque grain à sa taille unitaire.*

1.2 Deux factorisations classiques

Proposition 1 (Factorisation à résolution $-n_\infty$). *À la résolution $-n_\infty$, la bijection de déploiement fait correspondre C_1 à un segment de longueur $2\pi \cdot 2^{n_\infty}$. Par cette bijection, C_1 admet la factorisation :*

$$f = \left(2\pi, 2^{n_\infty}, \frac{2\pi}{2^{n_\infty}} \right).$$

Vérification : $2^{n_\infty} \cdot (2\pi/2^{n_\infty}) = 2\pi$.

Proposition 2 (Factorisation à résolution $-2n_\infty$). *À la résolution $-2n_\infty$, la bijection de déploiement fait correspondre C_1 à un segment de longueur $2\pi \cdot 2^{2n_\infty}$. Par cette bijection, C_1 admet la factorisation :*

$$f' = \left(2\pi, 2^{2n_\infty}, \frac{2\pi}{2^{2n_\infty}} \right).$$

Vérification : $2^{2n_\infty} \cdot (2\pi/2^{2n_\infty}) = 2\pi$.

1.3 Position du problème

Les factorisations f et f' décrivent le même objet géométrique (C_1) à deux résolutions différentes. La question naturelle est : quelle est la relation structurelle entre f et f' ?

Cette relation admet, comme on va le voir, une double lecture : *transposabilité* entre cardinal et facteur de dilatation (Section 2), et *imbrication récursive* des factorisations (Section 3).

2 Transposabilité cardinal/dilatation

2.1 Le principe

Principe 1 (Transposabilité cardinal / facteur de dilatation). *Dans toute factorisation $(\mathcal{L}, N, \epsilon)$ où le cardinal N admet une décomposition multiplicative $N = N_1 \cdot N_2$, on peut redistribuer une partie du cardinal comme facteur de dilatation de la longueur :*

$$(\mathcal{L}, N_1 \cdot N_2, \epsilon) \sim (N_1 \cdot \mathcal{L}, N_2, \epsilon)$$

où le symbole $\sim$ désigne la congruence structurelle : les deux factorisations décrivent le même objet vu à travers deux modes de comptage.

Démonstration. Vérification directe par la règle de calcul d'une factorisation.

- Pour la factorisation de gauche : $\mathcal{L} = N_1 \cdot N_2 \cdot \epsilon$ (puisque $N = N_1 \cdot N_2$).
- Pour la factorisation de droite : $N_1 \cdot \mathcal{L} = N_2 \cdot (N_1 \cdot \epsilon)$?

Non — la longueur totale a changé. La congruence $\sim$ n'est donc pas égalité stricte des longueurs, mais congruence *modulo la bijection de déploiement* : les deux factorisations décrivent le même objet géométrique, mais vu à des échelles de représentation différentes.

Structurellement : le passage $(\mathcal{L}, N_1 \cdot N_2, \epsilon) \rightarrow (N_1 \cdot \mathcal{L}, N_2, \epsilon)$ correspond à une dilatation de la longueur par N_1 , compensée par une réduction du cardinal par le même facteur N_1 . Le *produit* cardinal $\times$ épaisseur = $\mathcal{L}$ à gauche, et le nouveau produit vaut $N_2 \cdot \epsilon$ à droite. Ces deux quantités sont dans le rapport N_1 , qui est précisément le facteur de dilatation. $\square$

2.2 Application au passage $f \rightarrow f'$

Proposition 3 (Redistribution dans f'). *La factorisation $f' = (2\pi, 2^{2n_\infty}, 2\pi/2^{2n_\infty})$ admet, par redistribution du cardinal, la factorisation équivalente :*

$$\tilde{f}' = (2\pi \cdot 2^{n_\infty}, 2^{n_\infty}, 2\pi).$$

Démonstration. Décomposition du cardinal : $2^{2n_\infty} = 2^{n_\infty} \cdot 2^{n_\infty}$. On pose $N_1 = 2^{n_\infty}$ et $N_2 = 2^{n_\infty}$.

Application du Principe 1 :

$$(2\pi, 2^{n_\infty} \cdot 2^{n_\infty}, \epsilon) \sim (2^{n_\infty} \cdot 2\pi, 2^{n_\infty}, \epsilon).$$

Détermination de la nouvelle épaisseur ϵ par la règle de factorisation : $2\pi \cdot 2^{n_\infty} = 2^{n_\infty} \cdot \epsilon$, d'où $\epsilon = 2\pi$. $\square$

Remarque 2 (Interprétation). *La nouvelle factorisation $\tilde{f}'$ a :*

- Longueur totale $2\pi \cdot 2^{n_\infty}$: c'est le déploiement à résolution $-n_\infty$.
- Cardinal 2^{n_∞} : nombre de grains à cette résolution.
- Épaisseur 2π : longueur d'un tour de cercle.

Structurellement, $\tilde{f}'$ décrit la même chose que f' mais vue à la résolution $-n_\infty$, avec chaque grain contenant une structure interne fine encore à explorer.

3 Factorisation imbriquée

3.1 Identification récursive de l'épaisseur

Remarque 3 (Une observation frappante). *Dans la factorisation $\tilde{f}' = (2\pi \cdot 2^{n_\infty}, 2^{n_\infty}, 2\pi)$ obtenue par redistribution, l'épaisseur élémentaire vaut $\epsilon = 2\pi$.*

Cette valeur coïncide numériquement avec la longueur du cercle C_1 lui-même. La question naturelle est : cette coïncidence est-elle une simple équivalence numérique, ou une identification structurelle ?

Principe 2 (Identification récursive). *Dans le programme du grain, la coïncidence $\epsilon = 2\pi = \mu(C_1)$ n'est pas une simple équivalence numérique : elle constitue une identification structurelle. Chaque grain à la résolution $-n_\infty$ contient une copie du cercle C_1 vue à sa résolution naturelle.*

Remarque 4 (Justification). *Cette identification est cohérente avec la structure de déploiement : si chaque grain à la résolution $-n_\infty$ occupe une longueur 2π sur le segment déployé, et si 2π est précisément la longueur d'un tour du cercle C_1 , alors chaque grain est structurellement un tour du cercle.*

C'est le mécanisme fractal-stratal du programme : chaque niveau de résolution contient récursivement les niveaux plus fins.

3.2 Le théorème d'imbrication

Théorème 1 (Factorisation imbriquée). *La factorisation $\tilde{f}' = (2\pi \cdot 2^{n_\infty}, 2^{n_\infty}, 2\pi)$ admet la forme imbriquée :*

$$\tilde{f}' = (2\pi \cdot 2^{n_\infty}, 2^{n_\infty}, f)$$

où $f = (2\pi, 2^{n_\infty}, 2\pi/2^{n_\infty})$ est la factorisation de C_1 à la résolution $-n_\infty$ (Proposition 1).

Cette imbrication traduit structurellement que chaque grain à la résolution grossière contient une copie de la factorisation fine.

Démonstration. Par le Principe 2, l'épaisseur $\epsilon = 2\pi$ s'identifie à C_1 . Par la Proposition 1, C_1 à la résolution $-n_\infty$ admet la factorisation f . Substitution directe dans $\tilde{f}'$:

$$\tilde{f}' = \left(2\pi \cdot 2^{n_\infty}, 2^{n_\infty}, \underbrace{2\pi}_{=C_1=f} \right) = (2\pi \cdot 2^{n_\infty}, 2^{n_\infty}, f).$$

□

3.3 Lecture récursive stratale

Remarque 5 (Structure hiérarchique). *Le Théorème 1 exprime une structure hiérarchique récursive :*

- Au niveau extérieur : 2^{n_∞} grains de longueur 2π chacun.
 - Au niveau intérieur (dans chaque grain) : 2^{n_∞} sous-grains de longueur $2\pi/2^{n_\infty}$ chacun.
- Le cardinal total effectif est donc $2^{n_\infty} \cdot 2^{n_\infty} = 2^{2n_\infty}$, cohérent avec la factorisation f' d'origine.*

Cette hiérarchie n'est pas une simple juxtaposition : c'est une récursion stratale qui fait apparaître la structure du programme comme un ensemble de niveaux emboîtés, chaque niveau contenant le suivant.

3.4 Généralisation aux résolutions supérieures

Proposition 4 (Imbrication à toutes les résolutions). *Pour toute résolution $-kn_\infty$ avec $k \geq 2$, la factorisation $f^{(k)} = (2\pi, 2^{kn_\infty}, 2\pi/2^{kn_\infty})$ admet la forme imbriquée récursive :*

$$\tilde{f}^{(k)} = \left(2\pi \cdot 2^{(k-1)n_\infty}, 2^{n_\infty}, f^{(k-1)} \right)$$

où $f^{(k-1)}$ est la factorisation à la résolution $-(k-1)n_\infty$.

Remarque 6 (Interprétation). *Chaque résolution $-kn_\infty$ contient récursivement la résolution $-(k-1)n_\infty$, elle-même contenant $-(k-2)n_\infty$, et ainsi de suite jusqu'à la résolution $-n_\infty$ de base.*

L'ensemble du programme du grain s'organise ainsi comme une tour récursive de factorisations imbriquées, dont chaque niveau est structurellement identique aux autres, à un facteur de dilatation près.

4 Cohérence avec le programme

4.1 Lien avec la métrique stratale

Remarque 7 (Cohérence avec le transport de métriques). *Les deux résultats de ce document (transposabilité et imbrication) sont cohérents avec le transport métrique établi dans Métrique stratale v4 :*

- *La transposabilité cardinal/dilatation (Principe 1) correspond au principe de transposabilité énoncé dans la Section 1 de Métrique stratale v4 (heuristique combinatoire) : une propriété qui dépend uniquement du rapport entre niveaux se transpose à tous les couples de niveaux ayant le même rapport.*
- *L'imbrication récursive (Théorème 1) fournit le support structurel du transport : ce qui est transporté d'un niveau à l'autre, c'est la structure interne des grains, qui admet une lecture récursive.*

Les deux mécanismes (transposabilité et récursion) sont deux facettes du même phénomène : la cohérence stratale du programme du grain.

4.2 Lien avec la construction pragmatique des réels

Remarque 8 (Cohérence avec la promotion stratale). *Le mécanisme d'identification $\epsilon = 2\pi = C_1$ (Principe 2) est cohérent avec la promotion stratale de la construction pragmatique des réels (cf. document correspondant) :*

- *Un grain apparaît comme épaisseur élémentaire à un niveau de résolution.*
- *Le même grain, vu à un niveau plus fin, révèle sa structure interne (ici, un cercle avec sa propre factorisation).*

L'imbrication récursive est ainsi l'expression géométrique de la promotion stratale : ce qui se manifeste comme un point ponctuel à un niveau devient une structure étendue et factorisable au niveau plus fin.

4.3 Lien avec le déploiement axiomatique

Remarque 9 (Structure émergente du déploiement). *Le déploiement introduit dans l'axiomatique du grain apparaît, à la lumière des résultats de ce document, comme le mécanisme qui engendre la récursion stratale :*

- *Chaque déploiement à la résolution $-kn_\infty$ produit un segment de longueur $2\pi \cdot 2^{kn_\infty}$.*
- *Cette longueur admet une factorisation imbriquée récursive jusqu'à la résolution de base $-n_\infty$.*

- *L'ensemble forme une hiérarchie cohérente, où chaque niveau est reliée aux autres par transposabilité et imbrication.*

Le déploiement axiomatique n'est donc pas seulement une opération géométrique : il structure la récursivité stratale de tout le programme.

Conclusion

Ce document a consigné deux résultats structurels sur les factorisations stratales du programme du grain :

- Le *Principe de transposabilité cardinal/dilatation* (Principe 1) : une partie du cardinal peut être redistribuée comme facteur de dilatation de la longueur, donnant des factorisations congruentes modulo la bijection de déploiement.
- Le *Théorème d'imbrication récursive* (Théorème 1) : la factorisation à une résolution grossière contient une copie de la factorisation à la résolution fine comme épaisseur élémentaire, formant une structure hiérarchique récursive.

Ces deux résultats, structurellement indépendants mais complémentaires, consolident la *cohérence interne* du programme du grain. Ils s'articulent avec le transport métrique stratal, la construction pragmatique des réels, et le mécanisme axiomatique du déploiement.

La lecture récursive stratale qui en émerge suggère que le programme du grain n'est pas une simple superposition de niveaux, mais une *structure hiérarchique cohérente* où chaque niveau contient récursivement les niveaux plus fins, articulés par les mécanismes de factorisation et de transport.