

Structures vectorielles de la néguentropie

Gradient, rotationnel, réversibilité — et le pont vers la force matérielle

Hugues Genvrin — Programme du grain

September 7, 2026

Résumé

Sur l'espace des configurations, la néguentropie $\mathcal{N}$ engendre nativement un *champ de vecteurs* : son gradient. On montre que ce champ est *conservatif* (rotationnel nul, circulation nulle sur tout cycle) si et seulement si la déformation informationnelle dérive d'un potentiel — ce qui est la traduction vectorielle de la *loi de réciprocité* et de la *réversibilité*. Un rotationnel non nul signale au contraire la *dissipation* (Landauer). Enfin, sous couplage physique, le champ *informationnel* (gradient de $\mathcal{N}$) se traduit en un champ de *forces* matériel, $\mathbf{F} = -k_B T \ln 2 \text{ grad } \mathcal{N}$ — dans ce sens, jamais l'inverse. La flèche va du vecteur informationnel (premier) vers la force matérielle (dérivée, sous condition physique).

1 Le gradient de la néguentropie : un champ de vecteurs

Soit un espace de configurations paramétré par $x = (x_1, \dots, x_d)$ (positions stratales, coordonnées d'un système), et $\mathcal{N}(x)$ la néguentropie de composition (chapitre *Information*), fonction lisse de x .

Définition 1 (Champ informationnel). Le *champ informationnel* est le gradient (au signe près) de la néguentropie,

$$\mathbf{V}(x) = - \text{grad } \mathcal{N}(x) = - \left(\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial x_d} \right).$$

C'est un objet *vectoriel* natif : dès que $\mathcal{N}$ varie sur l'espace des configurations, son gradient est un vecteur défini en chaque point.

Remarque 2 (Ce n'est pas une analogie). Le gradient n'est pas plaqué : il apparaît déjà dans le programme. La force sémantique de Klein $\mathbf{F}_s = \{q_X, H\}$ (crochet de Poisson) est un champ de vecteurs hamiltonien ; la déformation informationnelle $\Delta \mathcal{I}_g = \log_2 |g'|$ (chapitre *Dynamique*) est un potentiel local. Le champ $\mathbf{V} = - \text{grad } \mathcal{N}$ en est la lecture vectorielle unifiée.

2 Conservatif $\Leftrightarrow$ réversible

La question centrale : quand le champ $\mathbf{V}$ dérive-t-il d'un potentiel ? La réponse relie trois notions — rotationnel, circulation, réversibilité.

Théorème 3 (Réversibilité = champ conservatif). *Les trois énoncés suivants sont équivalents :*

- (i) $\mathbf{V} = - \text{grad } \mathcal{N}$ *dérive d'un potentiel ($\mathcal{N}$ est ce potentiel) ;*
- (ii) $\text{rot } \mathbf{V} = 0$ *en tout point (champ irrotationnel) ;*
- (iii) la circulation $\oint_\gamma \mathbf{V} \cdot d\ell = 0$ *sur tout cycle fermé γ .*

Dans ce cas, la déformation informationnelle vérifie la loi de réciprocité $\Delta \mathcal{I}_{g^{-1}} = -\Delta \mathcal{I}_g$: le champ est réversible, l'aller-retour ne déforme rien.

Proof. (i) $\Rightarrow$ (ii) : le rotationnel d'un gradient est identiquement nul, $\text{rot}(\text{grad } \mathcal{N}) = 0$. (ii) $\Rightarrow$ (iii) : par le théorème de Stokes, $\oint_{\gamma} \mathbf{V} \cdot d\ell = \iint_S \text{rot } \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} = 0$. (iii) $\Rightarrow$ (i) : une circulation nulle sur tout cycle définit un potentiel $\mathcal{N}(x) = -\int^x \mathbf{V} \cdot d\ell$ indépendant du chemin. Le lien à la réciprocity : une circulation nulle sur le cycle $x \rightarrow g(x) \rightarrow x$ est exactement $\Delta\mathcal{I}_g + \Delta\mathcal{I}_{g^{-1}} = 0$ (chapitre Dynamique). $\square$

Proposition 4 (Rotationnel non nul = dissipation). *Si $\text{rot } \mathbf{V} \neq 0$, le champ n'admet pas de potentiel : la circulation sur un cycle est non nulle, et le cycle $G \rightarrow G' \rightarrow G$ (brisure puis restauration de symétrie) dissipe. Le rotationnel mesure la part non réversible de la déformation informationnelle.*

Proof. $\text{rot } \mathbf{V} \neq 0$ interdit l'existence d'un potentiel (sinon $\text{rot grad } \mathcal{N} = 0$). Par Stokes, il existe un cycle de circulation non nulle : le travail informationnel sur ce cycle ne se referme pas, ce qui, transporté dans un système physique (§4), est une dissipation au sens de Landauer. $\square$

Remarque 5 (Le sens de la métamorphose). Ceci précise l'idée de « réversibilité par métamorphose ». La brisure de symétrie qui *raffine* (passe au sous-groupe, distingue plus) est du côté *composition* : réversible, circulation nulle. La restauration de symétrie qui *ré-identifie* des configurations distinctes *efface* de l'information : c'est une *décomposition*, irrotationnelle seulement si aucune information n'est perdue — sinon $\text{rot} \neq 0$ et le retour dissipe. Il n'y a pas de cycle gratuit : la structure se raffine sans coût, elle ne se dé-raffine qu'en payant.

3 Vérification numérique

Champ	$\text{rot } \mathbf{V}$	circulation (cercle unité)	statut
$\mathbf{V} = -\text{grad}\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)$	0	0	conservatif / réversible
$\mathbf{W} = (-y, x)$ (rotation pure)	2	2π	non conservatif / dissipatif

Le champ de gradient a un rotationnel et une circulation nuls (réversibilité) ; le champ rotationnel pur a une circulation 2π (le cycle coûte ou produit). Code :

```
import numpy as np
h = 1e-5
def curl2d(Vx, Vy, x, y): # rot_z = dVy/dx - dVx/dy
    return ((Vy(x+h,y)-Vy(x-h,y)) - (Vx(x,y+h)-Vx(x,y-h))) / (2*h)

# champ conservatif V = -grad((x^2+y^2)/2) = (-x, -y)
Vx, Vy = (lambda x,y:-x), (lambda x,y:-y)
# champ rotationnel pur W = (-y, x)
Wx, Wy = (lambda x,y:-y), (lambda x,y: x)
print("rot V =", round(curl2d(Vx,Vy,0.3,0.7),6)) # 0 -> conservatif
print("rot W =", round(curl2d(Wx,Wy,0.3,0.7),6)) # 2 -> dissipatif

# circulation sur le cercle unite
th = np.linspace(0,2*np.pi,2000); dth = th[1]-th[0]
def circ(Vx,Vy):
    x,y = np.cos(th),np.sin(th); dx,dy = -np.sin(th)*dth, np.cos(th)*dth
    return np.sum(Vx(x,y)*dx + Vy(x,y)*dy)
print("circ V =", round(circ(Vx,Vy),4)) # ~0
print("circ W =", round(circ(Wx,Wy),4)) # ~6.283 = 2*pi
```

4 Le pont vers la force matérielle (Landauer)

Le champ $\mathbf{V} = -\text{grad } \mathcal{N}$ est *informationnel* (bits par unité de configuration). Sous couplage physique, il se traduit en un champ de *forces* matériel.

Théorème 6 (Du vecteur informationnel à la force matérielle). *Pour un système physique à température T dont la néguentropie de composition est $\mathcal{N}(x)$, l'énergie libre de structuration est $\Delta F(x) = \mathcal{N}(x) k_B T \ln 2$ (Landauer, chapitre Matière), et la force matérielle est*

$$\mathbf{F}(x) = -\text{grad}(\Delta F) = -k_B T \ln 2 \text{ grad} \mathcal{N}(x) = k_B T \ln 2 \mathbf{V}(x).$$

Le champ de forces matériel est le champ informationnel $\mathbf{V}$, multiplié par le facteur de conversion $k_B T \ln 2$.

Proof. $\Delta F = \mathcal{N} k_B T \ln 2$ est l'énergie libre (Landauer). La force généralisée conjuguée à x est $-\text{grad}(\Delta F) = -k_B T \ln 2 \text{ grad} \mathcal{N} = k_B T \ln 2 \mathbf{V}$. $\square$

Le sens de la flèche. Le vecteur est *premier* (informationnel : $\mathbf{V} = -\text{grad} \mathcal{N}$), la force est *dérivée* (matérielle, sous couplage $k_B T \ln 2$). On ne dit pas « la force matérielle se matérialise en vecteur informationnel » — c'est l'inverse : le gradient informationnel *devient* force matérielle *si* le système est physique. Sans température T , il n'y a pas de force, seulement le champ informationnel.

Corollaire 7 (Réversibilité $\Rightarrow$ force conservative). *Si le champ informationnel est conservatif (théorème 3), la force matérielle $\mathbf{F} = k_B T \ln 2 \mathbf{V}$ l'est aussi : elle dérive du potentiel ΔF , et un cycle quasi-statique ne dissipe pas (limite de Landauer atteinte). Un rotationnel informationnel non nul (proposition 4) se traduit par une force non conservative, donc une dissipation matérielle sur le cycle.*

Ordre de grandeur. $k_B T \ln 2 \approx 2,87 \times 10^{-21}$ J/bit à $T = 300$ K. Un gradient informationnel de 1 bit par nanomètre donne une force

$$|\mathbf{F}| = k_B T \ln 2 \times 1 \text{ bit/nm} \approx 2,87 \text{ pN},$$

l'échelle des forces moléculaires — le pont est significatif en biologie moléculaire, négligeable au macroscopique (comme au chapitre Matière).

5 Portée

Remarque 8 (Acquis). La néguentropie engendre un champ de vecteurs (son gradient) ; réversibilité, rotationnel nul et circulation nulle sont *équivalents* (théorème 3), et expriment la loi de réciprocité ; un rotationnel non nul est la signature de la dissipation. Sous couplage physique, ce champ informationnel se traduit en champ de forces matériel par le facteur $k_B T \ln 2$ (théorème 6), dans ce sens unique. Les notions vectorielles (gradient, rotationnel, circulation) sont donc *natives* du cadre, non importées par analogie.

Limites. (i) Le gradient suppose $\mathcal{N}$ lisse sur un espace de configurations continu ; aux points non affins (chapitre Information), il n'est pas défini. (ii) Le pont vers la force exige un système physique à température T ; sur une structure abstraite, on reste au champ informationnel (pas de force). (iii) Tout est *métrique* et *informationnel* : on décrit une dynamique de l'information et, sous condition, sa traduction énergétique — on n'ajoute aucune force fondamentale nouvelle.