Symétrie de résolution et dualité

Hugues Genvrin

25 mai 2026

Table des matières

Le procédé bidirectionnel et la dilatation $\mathcal{F}^{-1}$

Préambule

Ce travail prolonge l'*Axiomatique du grain* en explorant une symétrie structurelle qui y était présente mais non thématisée : le procédé géométrique n'est pas seulement un mécanisme de raffinement (résolution interne du point O), mais aussi un mécanisme de dilatation (résolution externe de l'infini). Les deux directions sont duales, et leur dualité — appelée ici *dualité de résolution* — confère à $\widetilde{\mathbb{R}}$ une structure auto-duale sous l'inversion $X \leftrightarrow 1/X$.

L'objectif de cette première partie est de poser formellement le procédé comme bidirectionnel, de définir l'opération de dilatation $\mathcal{F}^{-1}$ comme réciproque du raffinement $\mathcal{F}$, et de montrer que la *droite à l'infini* apparaît naturellement comme un cercle dont la courbure tombe dans les infinitésimaux non inversibles de $\widetilde{\mathbb{R}}$. Cette droite à l'infini porte une structure stratifiée à deux niveaux, symétrique de celle du déploiement $\widetilde{\mathbb{R}}^{+}$.

Référence implicite. On suppose acquis le contenu de l'*Axiomatique du grain* (procédé géométrique, stratification de $\widetilde{\mathbb{N}}$, arithmétique des positions, corps partiel $\widetilde{\mathbb{R}}$).

Première partie

Le procédé bidirectionnel

1 Rappel : la famille des cercles porteurs

On rappelle (P2) de l'axiomatique : pour chaque $k \in \mathbb{Z}$, le cercle C_k de centre $O_k = (-2^k\rho_0, 0)$ et de rayon $\rho_k = 2^k\rho_0$, avec $\rho_0 = 1$, est tangent à Δ en O. La famille $(C_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ se prolonge naturellement aux niveaux entiers et, par les axiomes 1–3, aux niveaux limites $\pm k \cdot n_\infty$.

Remarque 1 (Niveaux positifs explicités). *Pour $k \geq 2$, C_k a rayon $2^k\rho_0$, donc rayon de plus en plus grand et courbure $1/\rho_k = 2^{-k}$ de plus en plus petite. À la limite $k = n_\infty$, le rayon est 2^{n_∞} et la courbure est 2^{-n_∞}. À $k = 2n_\infty$, le rayon est 2^{2n_∞} et la courbure est 2^{-2n_∞}.*

2 Bidirectionnalité du procédé

Le procédé géométrique (P3) est intrinsèquement bidirectionnel : le doublement d'angle $\theta_{k-1} = 2\theta_k$ peut être lu dans les deux sens.

- **Sens descendant** (raffinement) : passer de C_k à C_{k-1} double le nombre de passages du flot par chaque point. C'est l'opération $\mathcal{F}$.
- **Sens ascendant** (dilatation) : passer de C_k à C_{k+1} divise par deux le nombre de passages, ou symétriquement, double la portion de cercle ambiant nécessaire pour contenir le flot. C'est l'opération $\mathcal{F}^{-1}$.

Définition 1 (Opération de dilatation). *Pour $g \in \mathcal{G}_\nu$ avec $\nu \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{F}^{-1}(g)$ désigne le grain de niveau $\nu + 1$ dont g est un sous-grain par $\mathcal{F}$. Formellement, c'est l'unique $g' \in \mathcal{G}_{\nu+1}$ tel que $g \in \mathcal{F}(g')$.*

Proposition 1 (Réciprocité). *$\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^{-1}$ sont réciproques au sens où, pour tout grain g de niveau entier,*

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(g)) = g \quad \text{et} \quad \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(g)) \ni g.$$

La première égalité est stricte ; la seconde est une appartenance car $\mathcal{F}^{-1}(g)$ contient g parmi ses raffinements possibles.

Démonstration. Pour la première : si g est de niveau ν et $g' \in \mathcal{F}(g)$ est de niveau $\nu - 1$, alors par la définition 1, $\mathcal{F}^{-1}(g')$ est l'unique grain de niveau ν dont g' est un raffinement, c'est-à-dire g lui-même.

Pour la seconde : si g est de niveau ν, $\mathcal{F}^{-1}(g)$ est de niveau $\nu+1$. Le raffinement $\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(g))$ est la famille des grains de niveau ν contenus dans $\mathcal{F}^{-1}(g)$, et g en fait partie par construction. □

Théorème 1 (Stratification ascendante)**.** *Pour tout grain g de niveau $\nu(g) \in \mathbb{Z}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{F}^{-n}(g)$ est un grain de niveau $\nu(g) + n$. Sa multiplicité est divisée par 2^n par rapport à celle de g.*

Démonstration. Par récurrence sur n. Cas $n = 0$: trivial. Hérédité : si $\mathcal{F}^{-n}(g)$ est de niveau $\nu + n$ avec multiplicité $\mu(g)/2^n$, alors $\mathcal{F}^{-(n+1)}(g) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}^{-n}(g))$ est de niveau $\nu + n + 1$ par définition. Pour la multiplicité : par le théorème de doublement de l'axiomatique (passage $\mathcal{F}$), μ double quand le niveau descend de 1 ; donc μ se divise par 2 quand le niveau monte de 1. D'où $\mu(\mathcal{F}^{-(n+1)}(g)) = \mu(\mathcal{F}^{-n}(g))/2 = \mu(g)/2^{n+1}$. □

3 La résolution limite ascendante $+n_\infty$

Axiome 1 (Existence des résolutions ascendantes)**.** *Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, le niveau $+k \cdot n_\infty$ est atteint par le procédé : il existe des grains de niveau $+kn_\infty$, dont le support est un cercle C_{+kn_∞} de rayon 2^{kn_∞} et de circonférence $2\pi \cdot 2^{kn_\infty}$. La courbure de C_{+kn_∞} est $\kappa_{+kn_\infty} = 2^{-kn_\infty}$.*

Remarque 2. *Cet axiome prolonge symétriquement l'axiome 1 de l'axiomatique (existence des résolutions descendantes $-kn_\infty$). Ensemble, ils fixent que le procédé géométrique atteint des niveaux limites dans les deux directions, avec la même structure stratifiée.*

Proposition 2 (Courbure infinitésimale au niveau $+2n_\infty$)**.** *Pour $k = 1$, la courbure $\kappa_{+n_\infty} = 2^{-n_\infty}$ vérifie $\kappa_{+n_\infty} > \frac{1}{2\pi \cdot 2^{n_\infty}}$, donc admet un inverse dans $\widetilde{\mathbb{R}}$: c'est un nombre petit mais standard.*

Pour $k \geq 2$, $\kappa_{+kn_\infty} = 2^{-kn_\infty}$ vérifie $\kappa_{+kn_\infty} < \frac{1}{2\pi \cdot 2^{n_\infty}}$, et est donc un infinitésimal non inversible *de $\widetilde{\mathbb{R}}$.*

Démonstration. Cas $k = 1$. On a $\frac{1}{2\pi \cdot 2^{n_\infty}} = \frac{1}{2\pi} \cdot 2^{-n_\infty}$. Comme $\frac{1}{2\pi} < 1$, on en déduit $\frac{1}{2\pi \cdot 2^{n_\infty}} < 2^{-n_\infty}$, soit $\kappa_{+n_\infty} > \frac{1}{2\pi \cdot 2^{n_\infty}}$. Donc κ_{+n_∞} admet un inverse dans $\widetilde{\mathbb{R}}$, à savoir 2^{n_∞}.

Cas $k = 2$. $\kappa_{+2n_\infty} = 2^{-2n_\infty} = 2^{-n_\infty} \cdot 2^{-n_\infty}$. Comparons à $\frac{1}{2\pi \cdot 2^{n_\infty}} = \frac{1}{2\pi} \cdot 2^{-n_\infty}$: $\kappa_{+2n_\infty} < \frac{1}{2\pi \cdot 2^{n_\infty}}$ ssi $2^{-n_\infty} < \frac{1}{2\pi}$, ce qui est vrai puisque 2^{-n_∞} est infinitésimal et $\frac{1}{2\pi}$ standard.

Cas $k \geq 2$ général. $\kappa_{+kn_\infty} = 2^{-kn_\infty} \leq 2^{-2n_\infty} < \frac{1}{2\pi \cdot 2^{n_\infty}}$, donc infinitésimal non inversible. □

Remarque 3 (Seuil de la droite à l'infini)**.** *La proposition précédente montre que la condition « courbure infinitésimale non inversible » n'est satisfaite qu'à partir du niveau $+2n_\infty$, pas dès $+n_\infty$. C'est à ce niveau $+2n_\infty$ qu'apparaît la* droite à l'infini *Δ_∞ : le cercle porteur C_{+2n_∞} n'est plus distinguable d'une droite par le corps partiel $\widetilde{\mathbb{R}}$.*

Au niveau intermédiaire $+n_\infty$, le cercle C_{+n_∞} est très grand mais sa courbure reste « standard », donc inversible : il a encore une géométrie circulaire effective.

4 La droite à l'infini

Définition 2 (Droite à l'infini)**.** *La* droite à l'infini *Δ_∞ est définie comme le cercle C_{+2n_∞} identifié à sa tangente en O, identification possible puisque sa courbure 2^{-2n_∞} est un infinitésimal non inversible de $\widetilde{\mathbb{R}}$, donc indistinguable de 0 dans le corps.*

Au niveau de résolution $2n_\infty$, nous allons déployer $\mathcal{F}^{-2n_\infty}(C_1)$ où $(C_1 = g_0)$ de multiplicité $\frac{1}{2^{2n_\infty}}$, d'épaisseur $2\pi.2n_\infty$ (équivalente à une super dilatation de 0) sur $2\pi.2^{2n_\infty}$. Nous pouvons factoriser de plusieurs façons ce développement et stratifier la droite Δ_∞. Ce déploiement est extrinsèque et se trouve le symétrique d'un déploiement intrinsèque au niveau de résolution à $-n_\infty$.

Théorème 2 (Structure stratifiée de Δ_∞)**.** *Δ_∞ est de longueur totale $2\pi \cdot 2^{2n_\infty}$. Elle porte une* double mosaïque *:*

- ***niveau grossier** $(+n_\infty)$: 2^{n_∞} copies dilatées de C_1, chacune de longueur $2\pi \cdot 2^{n_\infty}$;*
- ***niveau fin** $(+2n_\infty)$:* 2^{2n_∞} zéros dilatés *(les grains-points g_{-n_∞} originaux de C_1, vus à l'extérieur après double dilatation), chacun de longueur 2π.*

Les deux niveaux sont reliés par dilatation : chaque copie grossière de C_1 contient 2^{n_∞} zéros dilatés fins.

Démonstration. Longueur totale. Par l'axiome 1, C_{+2n_∞} a circonférence $2\pi \cdot 2^{2n_\infty}$. L'identification à sa tangente préserve cette longueur (puisque la courbure est infinitésimale non inversible).

Niveau grossier. Au niveau $+n_\infty$, on a C_{+n_∞} de circonférence $2\pi \cdot 2^{n_\infty}$, qui contient C_1 comme arc rectifié de longueur 2π. En faisant un cran de dilatation supplémentaire $(+n_\infty \to +2n_\infty)$, le cercle ambiant devient C_{+2n_∞} de circonférence $2\pi \cdot 2^{2n_\infty}$, mais la structure de C_{+n_∞} se conserve par mosaïquage : on peut paver C_{+2n_∞} avec $\frac{2\pi \cdot 2^{2n_\infty}}{2\pi \cdot 2^{n_\infty}} = 2^{n_\infty}$ copies de C_{+n_∞}. Comme chaque C_{+n_∞} contenait une copie dilatée de C_1 (de longueur $2\pi \cdot 2^{n_\infty}$), on obtient 2^{n_∞} copies dilatées de C_1 sur Δ_∞, chacune de longueur $2\pi \cdot 2^{n_\infty}$. Vérification : $2^{n_\infty} \cdot 2\pi \cdot 2^{n_\infty} = 2\pi \cdot 2^{2n_\infty}$. ✓

Niveau fin. La dilatation de C_1 n'est plus possible directement au-delà de $+n_\infty$: C_1 a déjà atteint sa rectification. Pour aller plus loin, ce sont les grains-points internes g_{-n_∞} qui composaient C_1 à sa résolution interne qui se dilatent à leur tour. Chacun de ces 2^{n_∞} grains-points internes, par dilatation, devient un arc rectifié de longueur 2π sur Δ_∞. Comme il y a 2^{n_∞} copies dilatées de C_1, et chacune contient 2^{n_∞} grains-points internes, on obtient $2^{n_\infty} \cdot 2^{n_\infty} = 2^{2n_\infty}$ zéros dilatés au total. Vérification : $2^{2n_\infty} \cdot 2\pi = 2\pi \cdot 2^{2n_\infty}$. ✓

Relation entre les deux niveaux. Chaque copie grossière de C_1 (longueur $2\pi \cdot 2^{n_\infty}$) contient $\frac{2\pi \cdot 2^{n_\infty}}{2\pi} = 2^{n_\infty}$ zéros dilatés fins (longueur 2π chacun). C'est l'expression géométrique du fait que chaque C_1 porte 2^{n_∞} grains-points internes à sa résolution $-n_\infty$. □

Corollaire 1 (Symétrie d'architecture)**.** *Le côté descendant ($-2n_\infty$, déploiement $\widetilde{\mathbb{R}}^+$) et le côté ascendant ($+2n_\infty$, droite à l'infini Δ_∞) ont la même architecture stratifiée à deux niveaux :*

	Côté descendant $(-2n_\infty)$	*Côté ascendant $(+2n_\infty)$*
Niveau grossier	2^{n_∞} *grains-points dans C_1*	2^{n_∞} *copies dilatées de C_1*
Niveau fin	2^{2n_∞} *sous-positions du déploiement*	2^{2n_∞} *zéros dilatés*
Longueur élémentaire fine	$\frac{2\pi}{2^{n_\infty}}$	2π
Longueur totale	$2\pi \cdot 2^{n_\infty}$	$2\pi \cdot 2^{2n_\infty}$

Remarque 4 (La vraie symétrie : produit des finesses)**.** *Les deux longueurs totales ne sont pas égales (elles diffèrent d'un facteur 2^{n_∞}). Ce n'est pas la longueur totale qui est l'invariant de la dualité de résolution, mais le* produit des finesses élémentaires *:*

$$\text{(finesse fine descendante)} \times \text{(finesse fine ascendante)} = \frac{2\pi}{2^{n_\infty}} \times 2\pi = \frac{(2\pi)^2}{2^{n_\infty}}.$$

Ce produit est constant, indépendant de la direction (résolution ou dilatation), et c'est lui qui exprime la dualité $\mu \leftrightarrow 1/\mu$ sur les finesses : très fine d'un côté ($\frac{1}{2^{n_\infty}}$), très grossière de l'autre (2π), produit invariant.

On a une version géométrique élémentaire de cette invariance, intrinsèque à la dualité de résolution.

5 Stratification ascendante $\widetilde{\mathbb{N}}_k^{\mathbf{ext}}$

Définition 3 (Strates ascendantes)**.** *Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose*

$$\widetilde{\mathbb{N}}_k^{ext} := \{n : 1 \leq n \leq 2^{kn_\infty}\} \quad \textit{(avec } \widetilde{\mathbb{N}}_0^{ext} = \mathbb{N}\textit{)}.$$

Sémantiquement, $\widetilde{\mathbb{N}}_k^{ext}$ indexe les positions ordinales externes *à profondeur de dilatation k :*

- *pour $k = 1$: copies dilatées de C_1 au niveau $+n_\infty$, ou de manière équivalente, copies grossières sur Δ_∞ ;*
- *pour $k = 2$: zéros dilatés au niveau $+2n_\infty$, copies fines sur Δ_∞ ;*
- *pour $k \geq 3$: niveaux plus profonds (au-delà de Δ_∞, dans des extensions ultérieures).*

Remarque 5. *Comme ensembles ordonnés, $\widetilde{\mathbb{N}}_k^{ext}$ et $\widetilde{\mathbb{N}}_k$ sont isomorphes : ils ont même cardinal 2^{kn_∞} et même structure d'ordre totale. Leur différence est sémantique : le premier compte des copies externes (résolution* ascendante*), le second des positions internes (résolution* descendante*).*

Proposition 3 (Bijection canonique)**.** *Il existe une bijection canonique*

$$\delta_k : \widetilde{\mathbb{N}}_k \longrightarrow \widetilde{\mathbb{N}}_k^{ext}$$

qui envoie la i-ième position ordinale interne à C_1 (au niveau $-kn_\infty$) sur la i-ième copie ordinale externe à la profondeur de dilatation $+kn_\infty$.

Démonstration. Les deux ensembles sont en bijection avec $\{1, \ldots, 2^{kn_\infty}\}$ via leur indexation ordinale (axiome 1 et axiome 1 respectivement). La composition de ces deux bijections donne δ_k, qui préserve l'ordre par construction (les deux ordres sont hérités de $\{1, \ldots, 2^{kn_\infty}\}$). $\square$

Remarque 6. *La bijection δ_k est l'ossature de la dualité de résolution. Elle sera étendue dans la Partie suivante en une bijection géométrique $\delta_k : \mathcal{G}_{-kn_\infty} \to \mathcal{M}_{+kn_\infty}$ compatible avec les structures additives et multiplicatives, et réalisant l'involution $X \leftrightarrow 1/X$ sur $\widetilde{\mathbb{R}}$.*

Partie II : Arithmétique duale et dualité géométrique δ_k

Préambule

La Partie I a établi le procédé géométrique comme bidirectionnel : à chaque résolution descendante $-kn_\infty$ correspond une résolution ascendante $+kn_\infty$, et une bijection canonique $\delta_k : \widetilde{\mathbb{N}}_k \to \widetilde{\mathbb{N}}_k^{\text{ext}}$ préserve l'ordre.

Elle a aussi montré que la droite à l'infini Δ_∞ porte une *double mosaïque* : 2^{n_∞} copies grossières de C_1 et 2^{2n_∞} zéros dilatés fins, en parfaite symétrie d'architecture avec le déploiement $\mathbb{R}^+$. La quantité invariante sous la dualité n'est pas la longueur totale, mais le *produit des finesses élémentaires* : $\frac{(2\pi)^2}{2^{n_\infty}}$.

Cette Partie II développe l'arithmétique sur les multiplicités externes en miroir de l'arithmétique des positions, et étend δ_k en un *isomorphisme stratifié* : il préserve l'addition, et entrelace la multiplication interne (qui descend en stratification) avec la multiplication externe (qui monte).

On y établit également l'*auto-dualité arithmétique* de $\widetilde{\mathbb{R}}$ sous $\iota : X \mapsto 1/X$ comme fait autonome sur le corps partiel. Le lien entre δ_k (combinatoire) et ι (arithmétique) est de nature qualitative et reste à approfondir : il est signalé comme question ouverte.

Référence implicite. On suppose acquis les contenus de l'*Axiomatique du grain* et de la Partie I de ce travail (procédé bidirectionnel, $\mathcal{F}^{-1}$, axiome ascendant, droite à l'infini Δ_∞, double mosaïque, bijection canonique δ_k).

Deuxième partie
Arithmétique externe sur les copies

6 Mosaïques et grains externes

Définition 4 (Mosaïque externe). *Pour $k \geq 1$, la* mosaïque externe à profondeur k*, notée $\mathcal{M}_{+kn_\infty}$, est l'ensemble des 2^{kn_∞} copies ordinales de C_1 rectifié sur le cercle géant C_{+kn_∞} (identifié à Δ_∞ pour $k \geq 2$, voir Partie I).*

On note $m_j^{(k)}$ la j-ième copie dans l'ordre canonique, avec $j \in \widetilde{\mathbb{N}}_k^{ext} = \{1, \ldots, 2^{kn_\infty}\}$.

Remarque 7 (Lien avec la Partie I). *$\mathcal{M}_{+kn_\infty}$ est l'ensemble des grains-copies introduit dans le théorème 1 de la Partie I pour $k = 2$. La généralisation à k quelconque suit la stratification ascendante.*

Définition 5 (Position dans la mosaïque). *La position de la j-ième copie $m_j^{(k)}$ sur le cercle géant C_{+kn_∞} est*

$$X_j^{ext} := (j-1) \cdot 2\pi \in [0, 2\pi \cdot 2^{kn_\infty}[.$$

C'est l'angle au centre O_{+kn_∞} correspondant au début de la j-ième copie.

Proposition 4 (Structure cyclique). *$(\mathcal{M}_{+kn_\infty}, \oplus^{ext})$ est un groupe abélien fini cyclique d'ordre 2^{kn_∞}, où $\oplus^{ext}$ est l'addition modulaire sur le cercle géant : $m_{j_1}^{(k)} \oplus^{ext} m_{j_2}^{(k)} = m_{(j_1+j_2-1) \mod 2^{kn_\infty}}^{(k)}$.*

Démonstration. Les copies $m_j^{(k)}$ sont indexées par $\widetilde{\mathbb{N}}_k^{\mathrm{ext}}$ de cardinal 2^{kn_∞}. L'addition $\oplus^{\mathrm{ext}}$ correspond à la translation circulaire sur C_{+kn_∞} par incréments de 2π. L'élément neutre est $m_1^{(k)}$ (la copie d'origine, à la position 0), l'opposé de $m_j^{(k)}$ est $m_{2^{kn_\infty}-j+2}^{(k)}$ (la copie diamétralement opposée modulo l'indexation). Commutativité et associativité héritées de l'addition modulaire sur $\mathbb{Z}/2^{kn_\infty}\mathbb{Z}$. □

7 Multiplication externe par juxtaposition d'échelles

Définition 6 (Multiplication externe). *Pour $m_{j_1}^{(k_1)} \in \mathcal{M}_{+k_1n_\infty}$ et $m_{j_2}^{(k_2)} \in \mathcal{M}_{+k_2n_\infty}$, le produit externe est :*

$$m_{j_1}^{(k_1)} \odot^{ext} m_{j_2}^{(k_2)} := m_{j_1 \cdot j_2}^{(k_1+k_2)} \in \mathcal{M}_{+(k_1+k_2)n_\infty}.$$

Remarque 8 (Montée en strate). *Comme pour la multiplication interne (lexicale), la multiplication externe* monte *dans la stratification : $\mathcal{M}_{+k_1n_\infty} \odot^{ext} \mathcal{M}_{+k_2n_\infty} \subset \mathcal{M}_{+(k_1+k_2)n_\infty}$.*

Géométriquement, multiplier deux copies de C_1 revient à composer leurs échelles : si $m_{j_1}^{(1)}$ est la j_1-ième copie dans la mosaïque de profondeur 1 et $m_{j_2}^{(1)}$ la j_2-ième, leur produit $m_{j_1j_2}^{(2)}$ est la position dans la mosaïque plus fine de profondeur 2, obtenue en composant les deux indexations.

Proposition 5 (Propriétés de la multiplication externe).

1. *$\odot^{ext}$ est commutative : $m_{j_1}^{(k_1)} \odot^{ext} m_{j_2}^{(k_2)} = m_{j_2}^{(k_2)} \odot^{ext} m_{j_1}^{(k_1)}$.*
2. *$\odot^{ext}$ est associative.*
3. *Élément neutre : $m_1^{(0)} = 1 \in \mathbb{N}$ agit comme neutre.*

4. Distributivité sur $\oplus^{ext}$.

Démonstration. Les quatre propriétés se déduisent directement de celles de la multiplication des indices dans $\mathbb{N}$, puisque la multiplication externe est définie par produit des indices :

(1) $j_1 \cdot j_2 = j_2 \cdot j_1$ dans $\mathbb{N}$, et l'index détermine entièrement la copie.

(2) $(j_1 \cdot j_2) \cdot j_3 = j_1 \cdot (j_2 \cdot j_3)$ dans $\mathbb{N}$.

(3) $j \cdot 1 = j$ dans $\mathbb{N}$.

(4) Pour $j_1 \cdot (j_2 + j_3) = j_1 j_2 + j_1 j_3$, on a la distributivité de $\mathbb{N}$, qui se transporte aux mosaïques. □

8 Le théorème de dualité géométrique

On en arrive au cœur de la Partie II : l'extension de la bijection canonique δ_k en un *isomorphisme stratifié* qui entrelace les deux directions du procédé (descente interne et montée externe).

Théorème 3 (Dualité de résolution, version géométrique)**.** *Pour tout $k \geq 1$, la bijection canonique $\delta_k : \mathcal{G}_{-kn_\infty} \to \mathcal{M}_{+kn_\infty}$ (qui envoie le i-ième grain-point sur la i-ième copie externe) vérifie :*

1. Préservation de l'addition. *Pour tous $g_{i_1}, g_{i_2} \in \mathcal{G}_{-kn_\infty}$ tels que $g_{i_1} \oplus g_{i_2}$ est défini sur C_1,*
$$\delta_k(g_{i_1} \oplus g_{i_2}) = \delta_k(g_{i_1}) \oplus^{ext} \delta_k(g_{i_2}).$$

2. Compatibilité avec la multiplication stratifiante. *Pour tous $g_{i_1} \in \mathcal{G}_{-k_1 n_\infty}$, $g_{i_2} \in \mathcal{G}_{-k_2 n_\infty}$,*
$$\delta_{k_1+k_2}(g_{i_1} \odot g_{i_2}) = \delta_{k_1}(g_{i_1}) \odot^{ext} \delta_{k_2}(g_{i_2}).$$

   La multiplication interne $\odot$ contracte des positions fines en descendant dans la stratification ; la multiplication externe $\odot^{ext}$ dilate des copies grossières en montant dans la stratification. δ_k entrelace les deux mouvements.

Démonstration. (1) Préservation de l'addition. Par la proposition 1 de la Partie I, δ_k envoie la position ordinale $i \in \widetilde{\mathbb{N}}_k$ vers la copie ordinale $i \in \widetilde{\mathbb{N}}_k^{\mathrm{ext}}$. Du côté descendant, $g_{i_1} \oplus g_{i_2}$ est la translation circulaire sur C_1 indexée par $(i_1 + i_2) \mod 2^{kn_\infty}$. Du côté ascendant, $\delta_k(g_{i_1}) \oplus^{\mathrm{ext}} \delta_k(g_{i_2})$ est la translation sur C_{+kn_∞} indexée par le même $(i_1 + i_2) \mod 2^{kn_\infty}$ (par la proposition 4). Les deux indices étant égaux, et δ_k étant la bijection canonique sur les indices, l'égalité tient.

(2) Compatibilité avec la multiplication stratifiante. Du côté descendant, $g_{i_1} \odot g_{i_2}$ est défini dans $\mathcal{G}_{-(k_1+k_2)n_\infty}$ par la multiplication des positions internes (Axiomatique du grain, Partie II) : $g_{i_1} \odot g_{i_2} = g_{i_1 \cdot i_2}$ où $i_1 \cdot i_2 \in \widetilde{\mathbb{N}}_{k_1+k_2}$.

Du côté ascendant, $\delta_{k_1}(g_{i_1}) \odot^{\mathrm{ext}} \delta_{k_2}(g_{i_2}) = m_{i_1}^{(k_1)} \odot^{\mathrm{ext}} m_{i_2}^{(k_2)} = m_{i_1 \cdot i_2}^{(k_1+k_2)}$, qui est précisément $\delta_{k_1+k_2}(g_{i_1 \cdot i_2})$.

D'où l'égalité annoncée. □

Remarque 9. *La résolution limite négative est équivalente à prendre un niveau d'observation plus fin. La résolution limite positive est équivalente à prendre un niveau d'observation dilaté. Si bien que C_1 devient très grand. D'où l'on obtient une dualité de la représentation de C_1 due à la symétrie des résolutions.*

9 Le théorème de factorisation

Théorème 4 (Factorisation)**.** *Tout grain g, déployé à une résolution $\nu \in \{-2n_\infty, -n_\infty, +n_\infty, +2n_\infty\}$, est caractérisé par un triplet $(\mathcal{L}, |\mathcal{L}|, \epsilon)$ où :*

— $\mathcal{L}$ *est la* longueur totale *du déploiement ;*
— $|\mathcal{L}|$ *est le* cardinal *des éléments élémentaires ;*
— ϵ *est la* longueur d'un élément élémentaire *(l'« épaisseur du zéro »).*

Ces trois grandeurs sont contraintes par la relation fondamentale

$$\boxed{\mathcal{L} = |\mathcal{L}| \cdot \epsilon.}$$

Le triplet de référence, à la résolution $-n_\infty$ *de* C_1*, est*

$$(\mathcal{L}, |\mathcal{L}|, \epsilon) = \left(2\pi,\ 2^{n_\infty},\ \frac{2\pi}{2^{n_\infty}}\right).$$

Corollaire 2 (Relativité des grandeurs)**.** *Le déploiement de* C_1 *admet quatre factorisations canoniques, une par résolution limite. Toutes vérifient la relation fondamentale* $\mathcal{L} = |\mathcal{L}| \cdot \epsilon$*.*

Résolution	$\mathcal{L}$	$\lvert\mathcal{L}\rvert$	ϵ	***Objet géométrique***
$-n_\infty$	2π	2^{n_∞}	$\frac{2\pi}{2^{n_\infty}}$	C_1*, résolution de base*
$-2n_\infty$	$2\pi \cdot 2^{n_\infty}$	2^{2n_∞}	$\frac{2\pi}{2^{n_\infty}}$	*Droite déployée* $\widetilde{\mathbb{R}}^+$
$+n_\infty$	$2\pi \cdot 2^{2n_\infty}$	2^{n_∞}	$2\pi \cdot 2^{n_\infty}$	Δ_∞*, copies grossières de* C_1
$+2n_\infty$	$2\pi \cdot 2^{2n_\infty}$	2^{2n_∞}	2π	Δ_∞*, zéros dilatés*

Lecture.

— *Le déploiement de* C_1 *à* $-2n_\infty$ *et la mosaïque grossière de* Δ_∞ *à* $+n_\infty$ *ont* même cardinal *(*2^{n_∞} *ou* 2^{2n_∞} *selon le niveau), mais des* épaisseurs duales *(*$\frac{2\pi}{2^{n_\infty}}$ *vs* $2\pi \cdot 2^{n_\infty}$*).*
— *De manière symétrique,* C_1 *à* $-n_\infty$ *et* Δ_∞ *à* $+2n_\infty$ *(zéros dilatés) ont aussi des épaisseurs duales :* $\frac{2\pi}{2^{n_\infty}}$ *et* 2π*. Leur produit vaut* $\frac{(2\pi)^2}{2^{n_\infty}}$*, soit l'aire élémentaire de la cellule minimale.*

Conséquence principale. *L'infini et le fini sont relatifs à la factorisation choisie : ce qui est élémentaire à une résolution devient total à une autre, et inversement.* Toute factorisation doit conduire à un équilibre des grandeurs en jeu par la relation $\mathcal{L} = |\mathcal{L}| \cdot \epsilon$*, ce qui donne une équivalence des formes selon le niveau de résolution. L'infini se ramène à du fini, et vice versa.*