Théorème de Klein

Hugues GENVRIN

Janvier 2026

1 Introduction

Soit $\mathcal{G}$ une géométrie sur un espace $\mathcal{E} = Q\mathcal{R}V$. Et $(\tau_i)_{1\leq i\leq n}$ un ensemble de transformations. Á toute transformation s'appliquant sur des variétés de l'espace $\mathcal{E}$, il apparaît de l'information qui correspond à l'action d'une force sémantique $\mathbf{F}_s$. Quelle est la quantité dynamique, prise dans variation, qui lui correspond ? Ce qui a capacité à varier dans une transformation ce sont les mesures prises sur les propriétés $(p_j)_{1\leq j\leq m}$ de les variétés $\mathcal{V}_q$, sous l'action du quantum doté d'information $\mathcal{Q}$. Mais $\mu(p_j)[\mathcal{V}_q]$ est déjà une quantité dynamique. Car les propriétés se distinguent sur toutes les variétés prises entre elles et sur une variété précise en particulier. Et ces mesures dynamique seront prises dans des variations sous l'action de transformations. D'où l'on déduit que $\mathbf{F}_s = \Delta\mu$.

Maintenant, si $\forall \mathcal{V}_q, \circ_{j=1}^{n}\tau_j \mid \mu(p_j)\big(\circ_{j=1}^{n}\tau_j[\mathcal{V}]_q\big) = \mu(p_j)[\mathcal{V}_q] \Leftrightarrow \Delta\mu(p_j)[\mathcal{V}_p] = \mathbf{0}$. On a donc un équilibre sémantique $\mathbf{F}_s = \mathbf{0}$. Toute l'information est préservée par les transformations en jeu. Alors on dit que les τ_i composent le groupe principal de la $\mathcal{G}$. Existe t-il pour toute géométrie un groupe principal ?

2 Qu'il existe un groupe principal pour toute géométrie

Réciproquement, si à une transformation τ_1, aucune information n'apparaît concernant les propriété p_j, alors $\mathbf{F}_s = \mathbf{0} \Leftrightarrow \Delta\mu(p_j) = \mathbf{0}$. Donc, τ laisse invariant l'espace $\mathcal{E} = \mathcal{QRV}$ et τ appartient au groupe principal de la géométrie. L'identité appartient au groupe principal, c'est trivial.

Montrons qu'il existe d'autres transformations qui appartiennent au groupe principal. Si l'on reprend la définition du quantum doté de grandeur informationnelle, il est la mise en relation de correspondance de deux quanta Q_1

et Q_2. On obtient alors $(Q_1\mathcal{R}'Q_2)\mathcal{R}\mathcal{V}$. Or Q_1 et Q_2 définissent l'identique et le non identique, ce sont des représentants de classe de $\mathcal{Q}$. Si l'on reprend la définition du quantum doté de grandeur informationnelle, il est la mise en relation de correspondance de deux quanta Q_1 et Q_2. On obtient alors $(Q_1\mathcal{R}'Q_2)\mathcal{R}\mathcal{V}$. Or Q_1 et Q_2 définissent l'identique et le non identique, ce sont des représentants de classe de $\mathcal{Q}$. Donc, la variété $\mathcal{V}$ sera mise en relation de correspondance avec Q_1 et Q_2. Et les espaces formés $\mathcal{E}_1 = Q_1\mathcal{R}\mathcal{V}$ et $\mathcal{E}_2 = Q_2\mathcal{R}\mathcal{V}$ seront eux-mêmes pris dans une relation intra-classe $\mathcal{R}'$. Donc, on peut distribuer $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$.

Soit une transformation τ_1 de la variété $\mathcal{V}_q$ telle que $\mu(p_j)\big(\tau_1[\mathcal{V}]_q]\big) = \mu(p_j)[\mathcal{V}]_q \Leftrightarrow \Delta\mu(p_j)[\mathcal{V}]_q = \mathbf{0}$. La mesure étant une quantité dynamique sur la variété $\mathcal{V}_q$, il vient $\mathbf{F}_1 = \mathbf{O}$ où $\mathbf{F}_1$ est une force sémantique qui apporte de l'information en sus sur les propriétés (p_j). Donc, il y a τ_1 qui laisse invariant $\mathcal{E}_1 = Q_1\mathcal{R}\mathcal{V}_q$. Par un raisonnement analogue, il existe une transformation τ_2 telle que $\mathcal{E}_2 = Q_2\mathcal{R}\mathcal{V}_q$ soit invariant par l'action de τ_2. Par contre τ_1 ne laisse pas invariantes les propriétés p_j de $\mathcal{V}_q$ dans $\mathcal{E}_2$. Et τ_2 ne laisse pas invariantes les propriétés p_j de $\mathcal{V}_q$ dans $\mathcal{E}_1$.

Or $\tau_2 \circ \tau_1$ s'applique sur $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1\mathcal{R}'\mathcal{E}_2$, qui devient un espace d'équivalence. Donc $\mathcal{Q}$ fait perdre des dotations de propriétés informationnelles à Q_1 et Q_2. On peut écrire par analogie avec le pgcd : $\mathcal{Q} = Q_1 \wedge Q_1 \neq 1$. Toutefois on conservera des transformations $\tau = \tau_2 \circ \tau_1$ qaui laisseront invariantes l'ensemble des propriétés de $\mathcal{V}$, qui sont grandeurs informationnelles dotées par $\mathcal{Q}$. Ces transformations formeront le groupe principal de la géométrie G associées à $\mathcal{E}$. Elles ne se restreignent pas à l'identité.

Théorème 1 (De Klein)**.** *Soit une géométrie $\mathcal{G}$ d'un espace $\mathcal{E}$, alors il existe des transformations qui laissent invariantes toutes les variétés et définissent le groupe principal de la géométrie.*

3 Exemple

Soit $\mathcal{E}^2$ le plan euclidien. On désigne deux quanta dotés de grandeurs informationnelles :

1. Q_1 qui dote d'information sur tous les angles des variétés.
2. Q_2 qui dote d'information de longueur sur toutes les restrictions des variétés.

Alors, les rotations *Rot* modifient l'angulation globale d'une variété sans affecter les angles locaux et les formes des variétés. Et les homothéties externes

h_e modifient les mesures de longueur sans affecter également les formes des variétés. Alors (id, Rot, h_e) constituent le groupe principal de la géométrie euclidienne, qui laisse invariante les formes géométriques (en particulier les angles locaux).