

Le plan complexe animé d'un mouvement de rotation intrinsèque

Hugues GENVRIN

Mars 2026

Le plan complexe peut être vu comme un plan animé d'un mouvement de rotation sur lui-même, de pas $\frac{\pi}{2}$, qui s'applique sur 4 étapes. Il convient ici de distinguer *les opérations* de rotation, qui forment un groupe, de *ce sur quoi elles agissent*, à savoir les états successifs du plan.

Les rotations, engendrées par l'opérateur $\iota = \text{Rot}(O, \frac{\pi}{2})$, forment le groupe cyclique d'ordre 4

$$G = \langle \iota \rangle = \{\text{Id}, \iota, \iota^2, \iota^3\} \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}.$$

Ce groupe **agit** sur l'ensemble des quatre états du plan

$$E = \{\mathcal{P}_{\mathbb{C}}, \mathcal{P}_{\mathbb{C}_1}, \mathcal{P}_{\mathbb{C}_2}, \mathcal{P}_{\mathbb{C}_3}\},$$

appliquer ι faisant passer d'un état au suivant :

$$\iota \mathcal{P}_{\mathbb{C}} = \mathcal{P}_{\mathbb{C}_1}, \quad \iota^2 \mathcal{P}_{\mathbb{C}} = \mathcal{P}_{\mathbb{C}_2}, \quad \iota^3 \mathcal{P}_{\mathbb{C}} = \mathcal{P}_{\mathbb{C}_3}, \quad \iota^4 \mathcal{P}_{\mathbb{C}} = \mathcal{P}_{\mathbb{C}}.$$

L'orbite de $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}$ sous G étant E tout entier, l'action est **transitive** : un seul état suffit à engendrer les quatre par rotations successives. On peut alors voir le plan complexe comme animé d'un mouvement

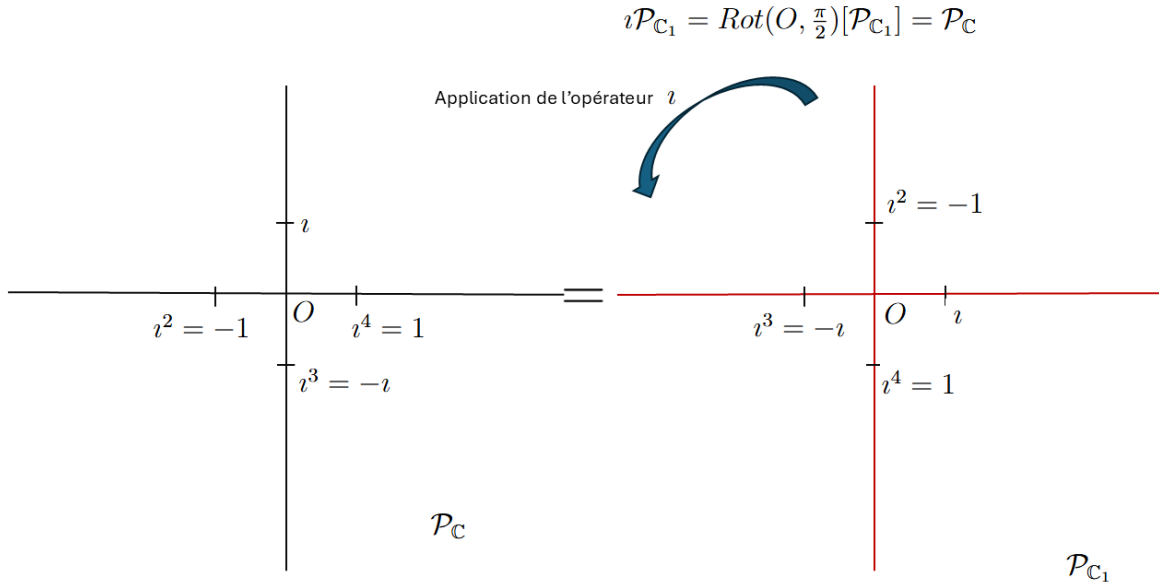


FIGURE 1 – Dynamique du plan complexe.

de rotation intrinsèque à l'image d'une toupie. Les quatre rotations admettent $O = 0$ pour unique point fixe commun : 0 est donc le **pivot** — l'axe de la toupie — autour duquel le plan tourne sans que 0 lui-même ne se déplace. De plus,

$$1 + \iota + \iota^2 + \iota^3 = 1 + \iota - 1 - \iota = 0,$$

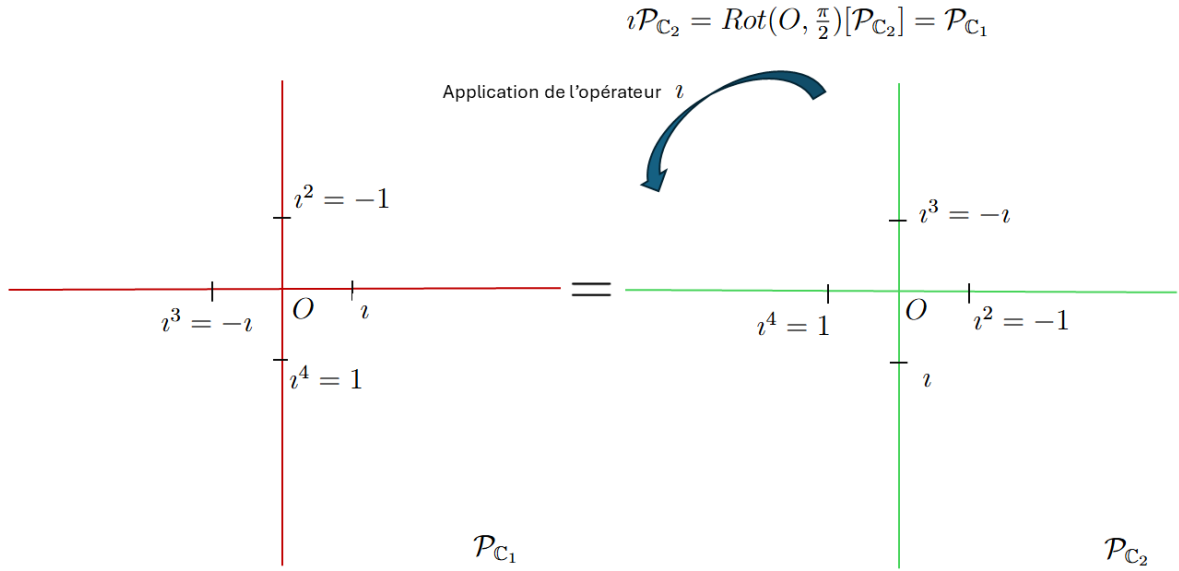


FIGURE 2 – Dynamique du plan complexe.

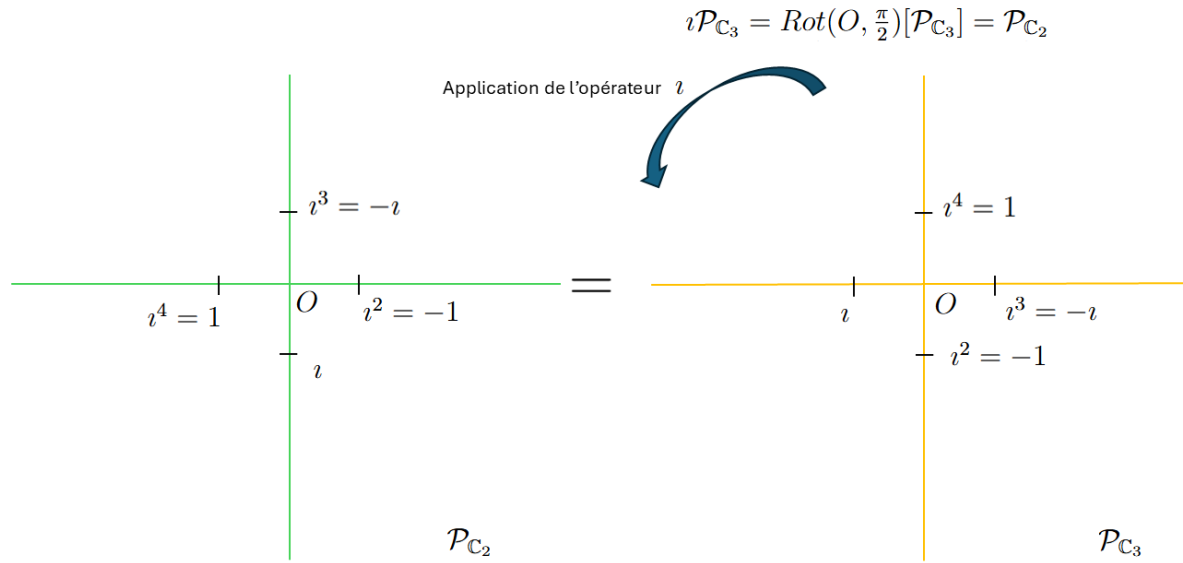


FIGURE 3 – Dynamique du plan complexe.

autrement dit le **centre de gravité de l'orbite** coïncide avec le centre de rotation. Le plan complexe peut ainsi être vu comme animé d'un mouvement de rotation intrinsèque autour de 0, à l'image d'une toupie dont l'axe (0) est à la fois le point fixe des rotations et le barycentre des quatre positions.

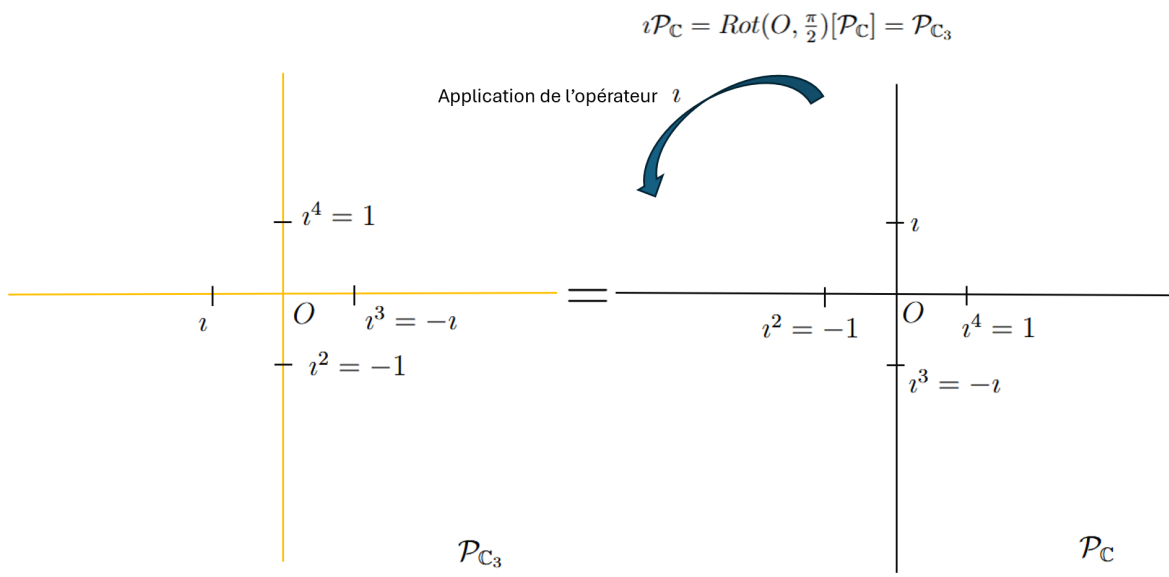


FIGURE 4 – Dynamique du plan complexe.