La construction des entiers à partir du continu

Indexation minimale, prédécesseur et rangs de dichotomie
dans la théorie du grain

Hugues Genvrin

Novembre 2026

Résumé

On propose d'obtenir les nombres entiers à partir du continu, et non l'inverse. Les entiers y sont définis comme le plus petit ensemble de symboles dont l'ensemble des parties suffit à indexer les grains d'un continu de dimension 1. On se place dans le cadre de la théorie du grain : un modèle non standard de l'arithmétique de Peano au sens de Skolem, une numérosité ν infinie, et la trichotomie *fini*, *illimité*, *infini* de l'article *Partie propre et partie partielle chez les entiers*. On montre que ν est la plus petite numérosité qui indexe le continu de base, et que son prédécesseur $\nu - 1$ est l'unique numérosité illimitée non infinie qui devient infinie par l'adjonction d'un seul élément. On montre ensuite que la descente $\nu, \nu - 1, \nu - 2, \ldots$ ne franchit jamais, en un pas, la frontière entre l'illimité et le fini : la fenêtre $[1, \nu]$ ne s'engendre pas par la descente, elle est donnée d'un coup. On propose enfin une lecture géométrique où chaque entier est le rang d'une dichotomie du continu, ce qui fournit à la fois la minimalité, la bijection entre parties et grains, et l'ordre des entiers. Le choix de ν apparaît comme un choix de niveau d'observation : au niveau $k\nu$, l'ensemble minimal devient $[1, k\nu]$.

Table des matières

1 Introduction **2**

2 Cadre **2**
2.1 Le modèle et la numérosité 2
2.2 Le continu de base 3
2.3 Fini, illimité, infini 3

3 L'ensemble minimal **4**

4 Le prédécesseur de ν **4**
4.1 La descente 4

5 La descente ne se parcourt pas **5**
5.1 Conséquence : la fenêtre est actuelle 6

6 Les entiers comme rangs de dichotomie **6**
6.1 Grains et adresses binaires 6
6.2 Chaque rang est nécessaire 7
6.3 Le sens géométrique du prédécesseur 7
6.4 L'ordre des entiers 7

7 Niveaux d'observation plus fins **7**

8 Discussion : statut de la construction **8**
8.1 Ce qui est primitif 8
8.2 En quel sens la construction est non axiomatique 8
8.3 Descente et ascension 8
8.4 Le statut du continu 9

9 Conclusion **9**

1 Introduction

Dans la tradition issue de Dedekind [3], les entiers viennent d'abord. On les obtient en montant : on part de 1, on applique le successeur, et l'on prend la plus petite chaîne close pour cette opération. Les rationnels et les réels sont construits ensuite, et le continu arrive en dernier, comme ensemble des coupures. L'infini, chez Dedekind, est d'ailleurs défini par une propriété interne de l'ensemble : être en bijection avec une de ses parties strictes.

Nous adoptons le point de vue inverse. Le point de départ est le continu de dimension 1, supposé donné en acte. L'infini est défini, non par une bijection interne, mais par la capacité d'indexer ce continu [7] :

> *un ensemble est infini si l'ensemble de ses parties permet d'indexer tous les points d'un continu.*

Le continu lui-même vérifie cette définition, puisque ses singletons l'indexent. La question naturelle est alors celle de l'ensemble *minimal* capable de l'indexer. Nous appelons *nombres entiers* les éléments de cet ensemble minimal, et nous les décrivons en *descendant* : à partir de sa numérosité ν, on définit son prédécesseur $\nu - 1$, puis $\nu - 2$, et ainsi de suite jusqu'à $1 = \#\{\emptyset\}$.

Ce programme soulève trois questions, auxquelles cet article répond.

(i) *Que veut dire « minimal » ?* La réponse dépend du grain du continu de référence. Nous fixons ce grain (section 2) et montrons que la minimalité caractérise ν (section 3).

(ii) *La descente atteint-elle* 1 *?* Elle l'atteint, mais pas pas à pas : il n'y a pas de dernier entier illimité ni de premier entier fini sur le chemin (section 5). Cela conduit à lire $[1, \nu]$ comme un ensemble actuel, décrit par la descente plutôt qu'engendré par elle.

(iii) *D'où vient l'ordre des entiers ?* Il est donné par l'ordre des dichotomies du continu (section 6).

La section 7 examine les niveaux d'observation plus fins $k\nu$, et la section 8 discute le statut de la construction : ce qu'elle suppose, et en quel sens elle est, ou n'est pas, axiomatique.

2 Cadre

2.1 Le modèle et la numérosité

On se place dans un modèle non standard $\mathcal{M}$ de l'arithmétique de Peano, au sens de Skolem [5] : $\mathcal{M}$ satisfait tous les énoncés arithmétiques vrais dans $\mathbb{N}$ (principe de *transfert*), et contient des éléments plus grands que tout entier standard. On note $\mathbb{N} \subset \mathcal{M}$ la partie standard. On fixe un entier non standard H et l'on pose

$$\nu = H!\,,$$

de sorte que ν est divisible par tout entier standard.

Définition 2.1 (Ensembles internes, numérosité)**.** Un *ensemble interne* est une partie de $\mathcal{M}$ de la forme $\{i \in \mathcal{M} : \text{le } i\text{-ième chiffre binaire de } c \text{ vaut } 1\}$, pour un $c \in \mathcal{M}$ (codage d'Ackermann). Ce sont les ensembles « finis du point de vue de $\mathcal{M}$ ». Le nombre de leurs éléments, calculé dans $\mathcal{M}$, est leur *numérosité*, notée $\#E$, au sens élémentaire inspiré de [1]. Pour une partie $F \subset \mathbb{N}$ définissable, on pose $\#F = \#\big({}^*F \cap [1, \nu]\big)$, où ${}^*F$ est l'interprétation de F dans $\mathcal{M}$.

Par transfert, toutes les propriétés de dénombrement des ensembles finis valent pour les ensembles internes. En particulier, si $\#E = n$, l'ensemble de ses parties internes $\mathcal{P}(E)$ a 2^n éléments, et il existe une surjection interne d'un ensemble interne A sur un ensemble interne non vide B si et seulement si $\#A \geq \#B$.

2.2 Le continu de base

Hypothèse (C) (Continu actualisé)**.** Il existe un continu de dimension 1, donné en acte, dont le grain d'individuation a l'épaisseur $2^{-\nu}$.

Concrètement, on représente ce continu par le segment $[0, 1]$ découpé à la résolution $-\nu$.

Définition 2.2 (Continu de base)**.** Le *continu de base* $\mathscr{C}_\nu$ est l'ensemble interne des 2^ν grains

$$g_k = \left[k\,2^{-\nu}, (k+1)\,2^{-\nu}\right], \qquad 0 \leq k < 2^\nu.$$

Plus généralement, pour $m \in \mathcal{M}$, $m \geq 1$, on note $\mathscr{C}_m$ le continu à la résolution $-m$, formé des 2^m grains d'épaisseur 2^{-m}.

Un grain est repéré par son indice k : les bornes $k\,2^{-\nu}$ sont des rationnels de $\mathcal{M}$, et l'on n'a pas besoin de nombres réels pour énoncer ce qui suit. Le statut de l'hypothèse (C) est discuté à la section 8.

2.3 Fini, illimité, infini

Nous reprenons la trichotomie de [7], dans sa forme corrigée, où l'infini est un cas particulier de l'illimité.

Définition 2.3 (Fini, illimité, infini)**.** Un ensemble interne E est :

- *fini* si $\#E$ est un entier standard ;
- *illimité* s'il n'est pas fini ;
- *infini* s'il est illimité et si l'ensemble de ses parties permet d'indexer les grains du continu de base, c'est-à-dire s'il existe une surjection interne $\mathcal{P}(E) \to \mathscr{C}_\nu$.

D'après la remarque qui suit la définition des ensembles internes, E est infini si et seulement si $2^{\#E} \geq 2^\nu$. La condition « illimité » y est d'ailleurs automatique, puisque ν n'est pas standard.

Remarque 2.4 (Partie partielle, partie propre). Une partie F de $\mathbb{N}$ peut être regardée comme *partie partielle*, c'est-à-dire incluse dans la fenêtre $[1, \nu]$ au grain des entiers, ou comme *partie propre*, c'est-à-dire renumérotée comme un tout par une bijection avec $\mathbb{N}$ [7]. Comme partie partielle, F est infinie si et seulement si ${}^*F \cap [1, \nu] = [1, \nu]$. Comme partie propre, elle redevient infinie. Dans cet article, c'est le regard de la partie partielle qui sert à définir la minimalité : on compte les éléments dans une fenêtre fixée, au grain fixé.

3 L'ensemble minimal

Définition 3.1. Un ensemble interne E *indexe* $\mathscr{C}_m$ s'il existe une surjection interne $\mathcal{P}(E) \to \mathscr{C}_m$.

Proposition 3.2 (Minimalité)**.** *Soit $m \in \mathcal{M}$, $m \geq 1$. Un ensemble interne E indexe $\mathscr{C}_m$ si et seulement si $\#E \geq m$. En particulier, la plus petite numérosité d'un ensemble qui indexe le continu de base est ν, et elle est atteinte par la fenêtre*

$$\mathbb{N}_\nu = [1, \nu] = \{n \in \mathcal{M} : 1 \leq n \leq \nu\}.$$

Démonstration. L'ensemble $\mathcal{P}(E)$ a $2^{\#E}$ éléments et $\mathscr{C}_m$ en a 2^m. Une surjection interne existe si et seulement si $2^{\#E} \geq 2^m$. La fonction $x \mapsto 2^x$ est strictement croissante dans $\mathbb{N}$, donc dans $\mathcal{M}$ par transfert, et cette condition équivaut à $\#E \geq m$. Enfin $\#\mathbb{N}_\nu = \nu$. □

Nous appelons *entiers au niveau d'observation* ν les éléments de $\mathbb{N}_\nu$. C'est l'ensemble que l'on notait $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots, \nu\}$; la notation $\mathbb{N}_\nu$ évite la confusion avec la partie standard $\mathbb{N}$.

Remarque 3.3 (Le pendant cantorien). Dans le cadre de Cantor [2], le plus petit cardinal κ tel que $2^\kappa \geq \mathfrak{c}$ est $\aleph_0$: si κ est fini, 2^κ est fini, et $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. La définition des entiers par l'indexation minimale du continu retrouve donc la bonne taille dans les deux cadres. Mais chez Cantor elle ne fournit qu'un cardinal, sans ordre ni successeur. La descente (section 4) et les dichotomies (section 6) apportent cet ordre.

4 Le prédécesseur de ν

Proposition 4.1 (Caractérisation de $\nu - 1$)**.** *Soit $n \in \mathcal{M}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) un ensemble interne de numérosité n est illimité non infini, et devient infini dès qu'on lui adjoint un élément ;

(b) $n = \nu - 1$.

Démonstration. (a)⇒(b). Soit E de numérosité n, et $x \notin E$. Comme E n'est pas infini, $n < \nu$ par la proposition 3.2. Comme $E \cup \{x\}$ est infini, $n + 1 \geq \nu$. Donc $n = \nu - 1$.

(b)⇒(a). Si $\nu - 1$ était standard, $\nu = (\nu - 1) + 1$ le serait aussi ; donc $\nu - 1$ est non standard, et un ensemble de numérosité $\nu - 1$ est illimité. Il n'est pas infini, puisque $\nu - 1 < \nu$. Après adjonction d'un élément, sa numérosité est ν, et il devient infini. □

On retrouve ainsi, lue à l'envers, la remarque de [7] selon laquelle $\mathbb{N} \setminus \{1\}$, de numérosité $\nu - 1$, est illimitée et non infinie. La proposition 4.1 donne au prédécesseur de ν une caractérisation intrinsèque, par le seuil de l'infini, et non par une opération arithmétique posée d'avance.

4.1 La descente

On définit ensuite, par récurrence, $\nu - k$ comme le prédécesseur de $\nu - (k - 1)$. Pour $k \geq 2$, la caractérisation par le seuil ne s'applique plus telle quelle : un ensemble de numérosité $\nu - 2$ ne devient pas infini par l'adjonction d'un seul élément. La bonne généralisation est la suivante.

Définition 4.2 (Défaut d'infinité)**.** Pour une partie interne E de $\mathbb{N}_\nu$, on appelle *défaut d'infinité* de E le nombre

$$d(E) = \nu - \#E.$$

Proposition 4.3. *Soit $E \subset \mathbb{N}_\nu$ interne. Le défaut $d(E)$ est le plus petit nombre d'éléments de $\mathbb{N}_\nu \setminus E$ qu'il faut adjoindre à E pour qu'il devienne infini. De plus :*

— *E est infini si et seulement si $d(E) = 0$, c'est-à-dire $E = \mathbb{N}_\nu$;*

— *E est fini si et seulement si $\nu - d(E)$ est standard ;*

— *E est illimité non infini si et seulement si $d(E) \geq 1$ et $\nu - d(E)$ est non standard.*

Démonstration. Adjoindre j éléments donne la numérosité $\#E + j$, et l'ensemble obtenu est infini si et seulement si $\#E + j \geq \nu$, soit $j \geq d(E)$. Les trois points découlent de la définition 2.3 et de $\#E = \nu - d(E)$. □

Le terme $\nu - k$ de la descente est donc la numérosité des parties de défaut k. Le nombre k mesure la distance à l'infini, et la descente ordonne les parties de la fenêtre par leur éloignement du seuil. Elle se termine en

$$\nu - (\nu - 1) = 1 = \#\{\emptyset\},$$

numérosité d'un singleton, de défaut $\nu - 1$. Si l'on veut inclure $0 = \#\emptyset$, c'est la numérosité de la partie vide, de défaut maximal ν.

5 La descente ne se parcourt pas

La descente part de ν, qui est illimité, et aboutit à 1, qui est fini. Il est naturel de chercher l'étape où elle passe de l'un à l'autre. Il n'y en a pas.

Proposition 5.1 (Pas de passage en un pas)**.** *Il n'existe aucun $k \in \mathcal{M}$ tel que $\nu - k$ soit illimité et $\nu - (k+1)$ fini.*

Démonstration. Si $\nu - (k+1) = m$ est standard, alors $\nu - k = m + 1$ est standard aussi. □

Corollaire 5.2. *Toute descente de longueur standard à partir de ν reste dans les illimités : pour tout k standard, $\nu - k$ est illimité.*

Démonstration. Si $\nu - k$ était standard pour un k standard, $\nu = (\nu - k) + k$ serait standard. □

La frontière entre le fini et l'illimité n'est donc pas un point de la descente : c'est une *coupure*, sans dernier élément du côté illimité ni premier élément du côté fini. Le lemme suivant, classique dans les modèles de l'arithmétique [4], montre que cette coupure n'est même pas visible de l'intérieur de $\mathcal{M}$.

Lemme 5.3 (Débordement)**.** *Aucune partie de $\mathcal{M}$ définissable dans $\mathcal{M}$ (avec paramètres) n'est égale à la partie standard $\mathbb{N}$.*

Démonstration. Soit D définissable, et supposons $D = \mathbb{N}$. Alors $1 \in D$, et $n \in D$ entraîne $n + 1 \in D$. Le schéma de récurrence, valide dans $\mathcal{M}$, donne $D = \mathcal{M}$, ce qui contredit l'existence d'éléments non standard. □

Le prédicat « fini », au sens de la définition 2.3, est donc *externe* : il n'est exprimable par aucune formule de l'arithmétique. Un observateur placé dans $\mathcal{M}$ voit la descente $\nu, \nu - 1, \ldots, 2, 1$ comme une suite interne de ν termes, sans y discerner le moment où l'illimité devient fini. La figure 1 résume la situation.

Remarque 5.4 (L'ascension rencontre la même coupure). Symétriquement, en partant de 1 et en appliquant le successeur un nombre standard de fois, on ne quitte jamais le fini, et l'on n'atteint jamais ν. Ni la descente ni l'ascension ne parcourent la fenêtre pas à pas.

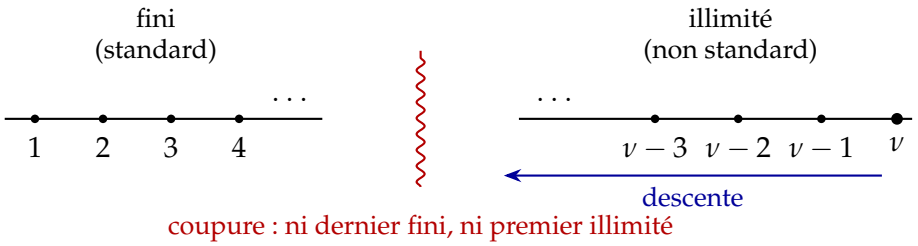


FIGURE 1 – La descente à partir de ν. Chaque pas de longueur standard reste du côté illimité ; la frontière avec le fini est une coupure, qui n'est pas un point de la fenêtre.

5.1 Conséquence : la fenêtre est actuelle

L'induction qui mène de ν à 1 comporte $\nu - 1$ étapes, nombre non standard. Elle est légitime, mais comme *induction interne* : la suite $(\nu - k)_{0 \le k \le \nu - 1}$ existe dans $\mathcal{M}$ en vertu du schéma de récurrence et du transfert. Elle ne peut pas être exécutée de l'extérieur, étape après étape.

Nous en tirons l'interprétation suivante. La descente n'*engendre* pas l'ensemble $\mathbb{N}_\nu$: elle le *décrit*. La fenêtre $[1, \nu]$ est donnée d'un coup, avec le continu qu'elle indexe, et la descente en est une lecture ordonnée. Loin d'être une faiblesse, cette impossibilité de parcourir la fenêtre exprime exactement la thèse d'un infini actualisé : un infini potentiel serait celui qu'on parcourt, et celui-ci ne se parcourt pas.

6 Les entiers comme rangs de dichotomie

La descente fournit un ordre, mais elle le fait au moyen du prédécesseur, c'est-à-dire d'une opération arithmétique. On peut lire cet ordre directement dans le continu.

6.1 Grains et adresses binaires

Couper $[0, 1]$ en deux, puis chaque moitié en deux, et ainsi de suite, produit au rang i des cellules d'épaisseur 2^{-i}. Un grain de $\mathscr{C}_\nu$ est déterminé par la suite de ses choix, gauche ou droite, aux rangs $1, 2, \ldots, \nu$: c'est son *adresse binaire*. Une adresse est elle-même déterminée par l'ensemble des rangs où l'on a choisi la droite.

Proposition 6.1 (Parties et grains)**.** *L'application*

$$\beta : \mathcal{P}(\mathbb{N}_\nu) \longrightarrow \mathscr{C}_\nu, \qquad A \longmapsto g_{k_A}, \qquad k_A = \sum_{i \in A} 2^{\nu - i},$$

est une bijection interne. Le grain $\beta(A)$ a pour borne gauche $\displaystyle\sum_{i \in A} 2^{-i}$.

Démonstration. Tout entier k tel que $0 \le k < 2^\nu$ s'écrit de manière unique $k = \sum_{i=1}^{\nu} a_i \, 2^{\nu - i}$ avec $a_i \in \{0, 1\}$: c'est l'écriture en base 2 sur ν chiffres, valide dans $\mathcal{M}$ par transfert. On associe à k la partie $A = \{i : a_i = 1\}$. Enfin $k_A \, 2^{-\nu} = \sum_{i \in A} 2^{-i}$. □

À l'ordre des chiffres près, la bijection β est le codage d'Ackermann des ensembles internes, lu géométriquement. L'indexation du continu par les parties des entiers, qui définit l'infini, se réalise donc de la façon la plus directe : *une partie de $\mathbb{N}_\nu$ est l'adresse d'un grain*. La figure 2 l'illustre avec trois rangs.

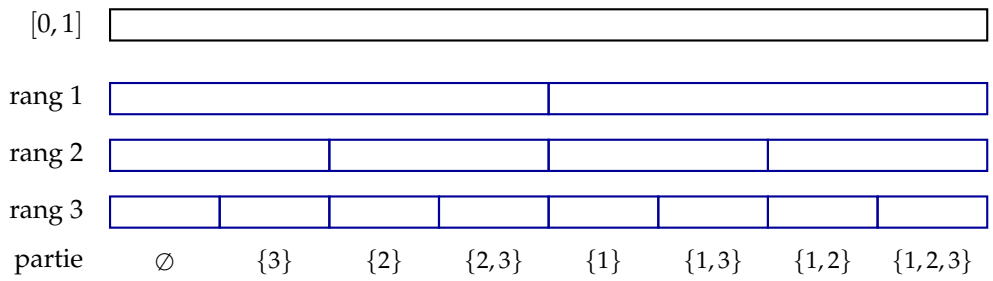


FIGURE 2 – Les dichotomies successives de $[0,1]$, dessinées avec trois rangs au lieu de ν, à titre d'image seulement. Chaque grain du dernier rang a pour adresse l'ensemble des rangs où l'on a pris la moitié droite : les huit parties de $\{1,2,3\}$ indexent les huit grains.

6.2 Chaque rang est nécessaire

Proposition 6.2 (Minimalité des rangs)**.** *Pour toute partie interne $R \subsetneq \mathbb{N}_\nu$, l'application qui associe à un grain la restriction de son adresse aux rangs de R n'est pas injective. Autrement dit, aucun ensemble strict de rangs n'individue les grains.*

Démonstration. Soit $j \in \mathbb{N}_\nu \setminus R$. Pour toute partie A, les grains $\beta(A)$ et $\beta(A \triangle \{j\})$ sont distincts, et leurs adresses coïncident sur tous les rangs autres que j, donc sur R. □

La proposition 6.2 donne une version géométrique de la proposition 3.2. Les entiers $1, \dots, \nu$ sont les *dichotomies indépendantes* qu'il faut effectuer pour individuer un grain, et il n'y en a aucune de trop.

6.3 Le sens géométrique du prédécesseur

Les rangs $1, \dots, \nu - 1$ individuent les cellules d'épaisseur $2^{-(\nu-1)} = 2 \cdot 2^{-\nu}$, c'est-à-dire les grains du continu $\mathscr{C}_{\nu-1}$. Chacune de ces cellules contient exactement deux grains de $\mathscr{C}_\nu$. Ainsi $[1, \nu - 1]$ indexe le continu à un grain double, sans indexer le continu de base. C'est la traduction géométrique de la proposition 4.1 : un ensemble de numérosité $\nu - 1$ est illimité non infini parce qu'il lui manque exactement une dichotomie.

6.4 L'ordre des entiers

L'ordre des rangs est l'ordre de raffinement : $i < j$ si et seulement si la dichotomie de rang i est plus grossière que celle de rang j, et $j = i + 1$ si et seulement si les cellules de rang j sont les moitiés de celles de rang i. L'ordre et le successeur des entiers sont donc lus dans la structure emboîtée du continu, au lieu d'être posés. Ce que cette lecture suppose, c'est cette structure dyadique emboîtée elle-même, avec son dernier rang ν.

7 Niveaux d'observation plus fins

Rien n'oblige à arrêter les dichotomies au rang ν. Pour $k \in [1, \nu]$, on peut considérer le continu $\mathscr{C}_{k\nu}$, dont les grains ont l'épaisseur $2^{-k\nu}$.

Proposition 7.1. *Soit $k \in \mathcal{M}$ avec $1 \leq k \leq \nu$.*

(a) Le plus petit ensemble interne qui indexe $\mathscr{C}_{k\nu}$ a pour numérosité $k\nu$; il est atteint par la fenêtre $[1, k\nu]$.

(b) Si $k \geq 2$, la fenêtre $\mathbb{N}_\nu$, considérée comme partie partielle de $[1, k\nu]$, est illimitée non infinie relativement à $\mathscr{C}_{k\nu}$.

(c) Chaque grain de $\mathscr{C}_\nu$ est réunion de $2^{(k-1)\nu}$ grains de $\mathscr{C}_{k\nu}$.

Démonstration. (a) est la proposition 3.2 avec $m = k\nu$. (b) découle de (a), puisque $\nu < k\nu$ dès que $k \geq 2$. (c) vient de $2^{-\nu} = 2^{(k-1)\nu} \cdot 2^{-k\nu}$. □

niveau	épaisseur du grain	ensemble minimal	statut de $\mathbb{N}_\nu$
ν	$2^{-\nu}$	$[1, \nu]$	infini
2ν	$2^{-2\nu}$	$[1, 2\nu]$	illimité non infini
$k\nu$	$2^{-k\nu}$	$[1, k\nu]$	illimité non infini ($k \geq 2$)
ν^2	$2^{-\nu^2}$	$[1, \nu^2]$	illimité non infini

TABLE 1 – L'ensemble minimal selon le niveau d'observation. Le niveau ν^2 est celui de $\mathbb{N}^2$, qui sert pour les rationnels [8].

Le choix de ν n'est donc pas imposé par le continu seul : c'est un choix de niveau d'observation. L'énoncé exact de la construction est celui-ci : *les entiers au niveau d'observation ν sont les éléments du plus petit ensemble qui indexe le continu dont le grain a l'épaisseur $2^{-\nu}$.* Aucun ensemble d'entiers n'est infini dans l'absolu ; il l'est relativement à un grain. On retrouve la relativité déjà observée pour les rationnels [8], où un même ensemble est infini au grain de $\mathbb{N}$ et illimité au grain de $\mathbb{N}^2$.

8 Discussion : statut de la construction

8.1 Ce qui est primitif

La construction ne part pas de rien. Elle suppose :

— l'hypothèse (C), qui donne le continu et son grain d'épaisseur $2^{-\nu}$;

— le modèle $\mathcal{M}$, qui fournit le nombre ν, les ensembles internes, et les propriétés de dénombrement par transfert.

Le nombre ν intervient dès la définition du continu de base, et donc dès la définition de l'infini. Les entiers de la fenêtre ne sont pas construits sans les entiers de $\mathcal{M}$: ils sont *réinterprétés* comme indices du continu. Ce qui change, c'est l'ordre de priorité : les entiers n'y sont pas posés comme primitifs, puis utilisés pour bâtir le continu ; ils sont obtenus comme ce dont le continu a besoin pour être indexé.

8.2 En quel sens la construction est non axiomatique

On ne peut pas dire que la construction se passe d'axiomes. Elle utilise l'ensemble des parties, la numérosité, l'adjonction d'un élément, la récurrence interne et le transfert, qui relèvent tous du cadre de l'arithmétique de Peano et de son modèle non standard. La formulation juste est plus restreinte : *la construction n'ajoute aucun axiome propre aux entiers*. Elle ne postule ni le successeur, ni l'ordre, ni la minimalité au sens de Dedekind ; elle les déduit de la seule exigence d'indexer un continu donné, au grain donné.

8.3 Descente et ascension

Chez Dedekind, la minimalité est celle d'une chaîne close pour le successeur, et l'on monte à partir de 1. Ici, la minimalité est celle d'un ensemble qui indexe le continu, et l'on descend à partir de ν. La proposition 5.1 montre que ni l'un ni l'autre mouvement ne parcourt la fenêtre. Mais la descente a un avantage conceptuel : son point de départ, ν, est caractérisé par une propriété (indexer le continu), et son premier pas, $\nu - 1$, par le seuil de l'infini. L'ascension part de 1 sans rien en dire.

8.4 Le statut du continu

L'hypothèse (C) est une hypothèse, et nous la présentons comme telle. D'un point de vue mathématique, l'existence d'un continu est relative au cadre adopté. D'un point de vue physique, les mesures ont toujours une précision finie : aucune expérience ne distingue un continu actuel d'une structure discrète suffisamment fine. Ce qui est remarquable, c'est que la théorie du grain s'accommode des deux lectures, puisque le continu y est toujours pris à une résolution : un grain d'épaisseur $2^{-\nu}$ est infinitésimal, et son ombre réelle est le segment $[0, 1]$ tout entier.

9 Conclusion

Nous avons obtenu les entiers comme l'ensemble minimal qui indexe un continu de dimension 1 au grain $2^{-\nu}$. Trois résultats en précisent le sens.

1. La numérosité ν est la plus petite qui indexe le continu de base, et $\nu - 1$ est l'unique numérosité illimitée non infinie que l'adjonction d'un seul élément rend infinie. Les termes suivants de la descente mesurent un défaut d'infinité.
2. La descente ne franchit jamais en un pas la frontière entre l'illimité et le fini, qui est une coupure externe. La fenêtre $[1, \nu]$ n'est pas engendrée, mais donnée en acte ; la descente en est une description.
3. Chaque entier est le rang d'une dichotomie du continu. Une partie de $[1, \nu]$ est l'adresse d'un grain, aucun rang n'est superflu, et l'ordre des entiers est l'ordre de raffinement.

Enfin, le niveau ν est un niveau d'observation parmi d'autres. Au niveau $k\nu$, l'ensemble minimal devient $[1, k\nu]$, et $[1, \nu]$ n'y est plus qu'illimité. L'infinité des entiers n'est pas une propriété absolue : elle est relative au grain du continu qu'ils indexent.

Références

[1] V. Benci, M. Di Nasso, « Numerosities of labelled sets : a new way of counting », *Advances in Mathematics*, 173 (2003), p. 50–67.

[2] G. Cantor, « Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre », *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 1 (1891), p. 75–78.

[3] R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen ?*, Vieweg, Braunschweig, 1888.

[4] R. Kaye, *Models of Peano Arithmetic*, Oxford Logic Guides 15, Clarendon Press, Oxford, 1991.

[5] T. Skolem, « Über die Nicht-charakterisierbarkeit der Zahlenreihe mittels endlich oder abzählbar unendlich vieler Aussagen mit ausschließlich Zahlenvariablen », *Fundamenta Mathematicae*, 23 (1934), p. 150–161.

[6] H. Genvrin, *Théorie du grain*, manuscrit.

[7] H. Genvrin, « Partie propre et partie partielle chez les entiers », manuscrit, 2026.

[8] H. Genvrin, « Numérosité des rationnels », manuscrit, 2026.