Vers le plan complexe

De l'échelle exponentielle à l'anti-Dirac

Hugues Genvrin

14 Novembre 2026

Résumé

On construit le plan complexe à partir de la théorie du grain, en trois étapes. Les dilatations d'un grain forment une échelle exponentielle. Transportée sur le cercle aux points équirépartis, cette échelle devient périodique et définit un produit entre les points du cercle ; le quart de tour y est un point de la grille dont le carré est le demi-tour, d'où i. Combinée aux dilatations, elle donne le plan complexe. On montre ensuite que le carré du quart de tour replie l'axe horizontal sur lui-même avec l'orientation opposée : c'est un anti-Dirac. Réciproquement, le plan complexe est la racine carrée de cet anti-Dirac, sous une hypothèse que l'on précise : l'échange des deux droites doit être une isométrie directe. On en déduit qu'un plan à deux niveaux d'observation adjacents est équivalent au plan complexe par la lecture normée, sans lui être égal, qu'il porte un anti-Dirac et qu'il est reconstruit par lui.

Table des matières

1 Cadre et notations **2**

2 L'échelle exponentielle des dilatations **2**

3 L'échelle exponentielle sur le cercle **3**
3.1 Les points équirépartis 3
3.2 Le produit des points du cercle 4
3.3 La notation exponentielle 4

4 Vers i **5**
4.1 Les deux rayons 5
4.2 Le théorème 5

5 Du cercle au plan complexe **6**

6 De l'anti-Dirac au plan complexe **7**
6.1 L'anti-Dirac 7
6.2 Du plan complexe à l'anti-Dirac 7
6.3 De l'anti-Dirac au plan complexe 8

7 Synthèse **9**
7.1 Anti-Dirac et plan complexe 9
7.2 Le plan à deux niveaux d'observation adjacents 9
7.3 Récapitulatif 11

1 Cadre et notations

On se place dans un modèle non standard de l'arithmétique, au sens de Skolem. On fixe un entier illimité n_∞ ; l'entier 2^{n_∞} est alors défini par transfert, et il est lui aussi illimité. Les grandeurs réelles, longueurs et angles, sont prises dans le prolongement correspondant des réels, où les encadrements usuels restent valables par transfert.

Définition 1.1 (Grains et niveaux d'observation)**.** Un *grain* est une étendue prise comme unité à un certain *niveau d'observation*, noté *NO*. On considère quatre grains emboîtés,

$$g_{f-} \;<\; g_f \;<\; g_g \;<\; g_{g+},$$

chacun valant 2^{n_∞} fois le précédent :

$$g_f = 2^{n_\infty}\, g_{f-}, \qquad g_g = 2^{n_\infty}\, g_f, \qquad g_{g+} = 2^{n_\infty}\, g_g. \tag{1}$$

Au niveau d'observation $NO = g$, le grain g est un point : on n'en distingue pas les parties.

Définition 1.2 (Situs)**.** Un grain g_g se place de deux façons par rapport au cercle du niveau d'observation (figure 1) :

— sur le *situs radial*, il est porté par un rayon ;

— sur le *situs circulaire*, il est porté par la circonférence.

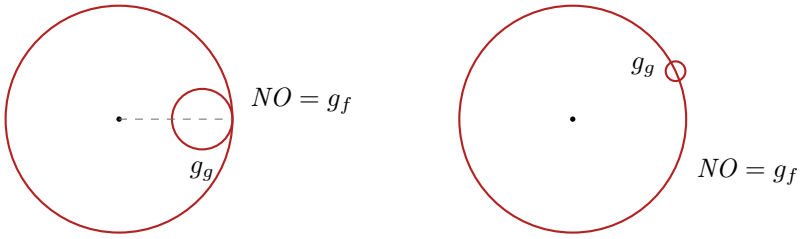


FIGURE 1 – Les deux situs d'un grain g_g relativement au niveau d'observation g_f.

Proposition 1.3 (Deux lectures d'un même grain)**.** *Pour tout entier k, le grain $2^k g_g$ se lit de deux façons équivalentes : comme l'image de g_g par l'homothétie de rapport 2^k, c'est-à-dire une dilatation ; ou comme un grain qui contient davantage de grains g_f. On a*

$$2^k\, g_g = 2^{n_\infty + k}\, g_f, \qquad \textit{et en particulier} \qquad 2^{n_\infty}\, g_g = 2^{2n_\infty}\, g_f.$$

Démonstration. D'après (1), $g_g = 2^{n_\infty}\, g_f$, donc $2^k g_g = 2^k \cdot 2^{n_\infty}\, g_f = 2^{n_\infty + k} g_f$. Le cas $k = n_\infty$ donne la seconde égalité. □

2 L'échelle exponentielle des dilatations

On reprend le raisonnement sur le situs auto-similaire, avec $NO = g_g$. Le grain $g_{g+} = 2^{n_\infty}\, g_g$ est soit l'homothétique de rapport 2^{n_∞} de g_g, qui n'est qu'un point à ce niveau, soit la dilatation d'un point.

Définition 2.1 (Épaisseur)**.** L'*épaisseur* δg d'un grain g est sa mesure lorsque g_{g+} est pris pour unité.

Proposition 2.2 (Échelle exponentielle)**.** *On a* $\delta g_g = 2^{-n_\infty}$, $\delta g_f = 2^{-2n_\infty}$ *et*

$$\delta g_{g+} \;=\; 2^{n_\infty} \cdot 2^{-n_\infty} \;=\; 1.$$

Les épaisseurs forment une échelle exponentielle entre 0 *et* 1 *:*

$$\cdots \;<\; 2^{-2n_\infty} \;<\; 2^{-n_\infty} \;<\; 1.$$

Sur cette échelle, composer deux dilatations revient à additionner leurs exposants :

$$2^{k} \cdot 2^{k'} \;=\; 2^{k+k'}. \tag{2}$$

Démonstration. Par définition $\delta g_{g+} = 1$, et (1) donne $\delta g_g = 2^{-n_\infty}\delta g_{g+}$ puis $\delta g_f = 2^{-n_\infty}\delta g_g$. La loi (2) est celle des puissances de 2, valable par transfert pour des exposants illimités. □

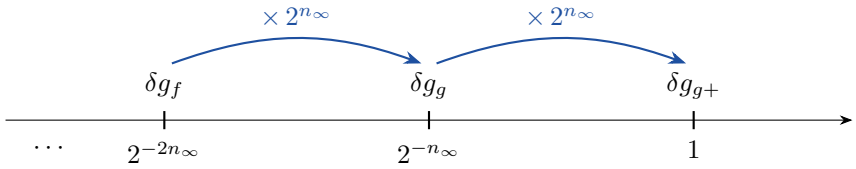


FIGURE 2 – L'échelle exponentielle des épaisseurs : chaque pas est une dilatation de rapport 2^{n_∞}.

Remarque 2.3. Cette échelle ne prend que des valeurs strictement positives, et elle est strictement monotone : une dilatation répétée ne revient jamais à son point de départ. Aucun élément de cette échelle n'a donc un carré négatif. Le signe moins du plan complexe devra venir d'ailleurs.

3 L'échelle exponentielle sur le cercle

3.1 Les points équirépartis

On considère le cercle unité, de centre O. On y place 2^{n_∞} points équirépartis, notés P_0, P_1, …, $P_{2^{n_\infty}-1}$, en partant de l'extrémité P_0 du rayon horizontal. Le pas angulaire est

$$h \;=\; \frac{2\pi}{2^{n_\infty}},$$

et le point P_m a pour abscisse curviligne $\mu = m\,h$. Chaque point standard du cercle est infiniment proche d'un point de la grille.

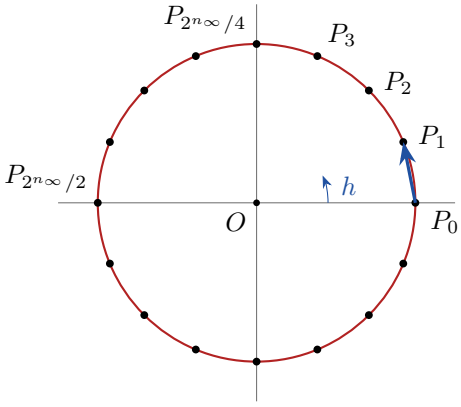


FIGURE 3 – Les points équirépartis sur le cercle (on en a dessiné 16 au lieu de 2^{n_∞}). Le premier pas, de P_0 à P_1, part dans la direction verticale.

3.2 Le produit des points du cercle

On transporte sur le cercle la loi (2) des dilatations : comme le produit de deux dilatations est la dilatation dont l'exposant est la somme des exposants, le produit de deux points du cercle est le point dont l'abscisse curviligne est la somme des abscisses.

Définition 3.1 (Produit sur le cercle)**.** Pour deux points P_a et P_b de la grille, on pose

$$P_a \cdot P_b \;=\; P_{a+b},$$

l'indice étant lu modulo 2^{n_∞}.

Proposition 3.2. *Muni de ce produit, l'ensemble des points de la grille est un groupe commutatif à 2^{n_∞} éléments, d'élément neutre P_0. Le produit par P_a est la rotation de centre O qui amène P_0 sur P_a.*

Démonstration. C'est le transport de l'addition des entiers modulo 2^{n_∞}. La rotation qui amène P_0 sur P_a avance tout point de la grille de a pas, donc envoie P_b sur P_{a+b}. □

Remarque 3.3 (Ce qui change par rapport aux dilatations). La loi est la même, mais l'échelle est devenue *périodique* : $P_{2^{n_\infty}} = P_0$. C'est cette périodicité, absente de l'échelle des dilatations (remarque 2.3), qui rend possible un carré négatif.

3.3 La notation exponentielle

Lemme 3.4 (Le premier pas est vertical)**.** *Soit u le vecteur unitaire vertical. Alors*

$$\overrightarrow{P_0P_1} \;=\; h\,u \;+\; \varepsilon, \qquad \textit{avec } \varepsilon \textit{ infiniment petit devant } h.$$

Démonstration. En coordonnées, $P_1 = (\cos h, \sin h)$, donc $\overrightarrow{P_0P_1} = (\cos h - 1,\ \sin h)$. Par transfert des encadrements usuels, $|\cos h - 1| \le h^2/2$ et $|\sin h - h| \le h^3/6$. Comme h est infiniment petit, ces deux écarts sont infiniment petits devant h. □

L'arc qui part de P_0 avance donc par grains verticaux : une abscisse curviligne θ se compte en grains portés par la direction du rayon vertical, noté $g_g^{\downarrow}$ et précisé à la section 4. On l'écrit $\mu = \theta \cdot g_g^{\downarrow}$.

Définition 3.5 (Exponentielle sur le cercle)**.** Pour $\theta = m\,h$, on note

$$e^{\theta\, g_g^{\downarrow}} \;=\; P_m,$$

le point de la grille d'abscisse curviligne θ.

Cette notation est justifiée par deux propriétés, qui sont exactement celles d'une exponentielle :

$$e^{\theta\, g_g^{\downarrow}} \cdot e^{\theta'\, g_g^{\downarrow}} \;=\; e^{(\theta+\theta')\, g_g^{\downarrow}}, \qquad e^{h\, g_g^{\downarrow}} - e^0 \;=\; h\, g_g^{\downarrow} + \varepsilon. \tag{3}$$

La première est la définition 3.1 ; la seconde est le lemme 3.4, une fois $g_g^{\downarrow}$ identifié au vecteur vertical unitaire (convention 4.1).

4 Vers $\imath$

4.1 Les deux rayons

Deux cercles se superposent. D'après la proposition 1.3, le cercle g_g° se lit comme 2^{n_∞} grains g_f°, ou comme la dilatation du cercle g_f° ; et l'on a aussi $g_g^\circ = 2^{2n_\infty} g_{f-}^\circ$. On considère deux rayons, relativement au couple de niveaux d'observation $NO = (g_f, g_{f-})$: le rayon horizontal g_f^- et le rayon vertical $g_g^|$.

Convention 4.1 (Lecture normée)**.** Chaque rayon sert d'unité à son propre axe. Sur le cercle unité, on pose

$$g_f^- = P_0 = 1,$$

et l'on définit le rayon vertical comme le point de la grille situé au quart de tour :

$$g_g^| \;=\; P_{2^{n_\infty}/4} \;=\; e^{\frac{\pi}{2}\, g_g^|}.$$

Remarque 4.2 (Le grain fait ici son travail). Le point $P_{2^{n_\infty}/4}$ n'existe que si 2^{n_∞} est divisible par 4. C'est le cas puisque 2^{n_∞} est une puissance de 2 d'exposant illimité : le quart de tour tombe *exactement* sur un point de la grille, sans arrondi.

4.2 Le théorème

Théorème 4.3 (Le carré du quart de tour)**.** *Le rayon vertical vérifie*

$$(g_g^|)^2 \;=\; (e^{\frac{\pi}{2} g_g^|})^2 \;=\; e^{\pi\, g_g^|} \;=\; -\,g_f^-.$$

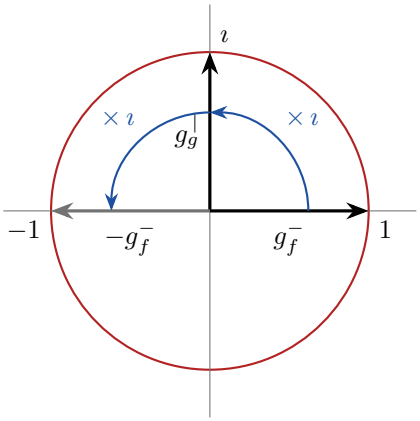
Sur le cercle unité, $g_f^- = 1$*, donc*

$$(g_g^|)^2 = -1, \qquad \textit{d'où} \qquad g_g^| = \imath.$$

Démonstration. Par la définition 3.1, $P_{2^{n_\infty}/4} \cdot P_{2^{n_\infty}/4} = P_{2^{n_\infty}/2}$: deux quarts de tour font un demi-tour. Or $P_{2^{n_\infty}/2}$ est le point diamétralement opposé à P_0, car la symétrie de centre O conserve la grille et avance chaque point de $2^{n_\infty}/2$ pas. Comme vecteur issu de O, on a donc $P_{2^{n_\infty}/2} = -P_0 = -g_f^-$. □

Corollaire 4.4 (Cohérence avec les réels)**.** *On a* $(-1)^2 = 1$, $\imath^3 = -\imath$ *et* $\imath^4 = 1$.

Démonstration. $P_{2^{n_\infty}/2} \cdot P_{2^{n_\infty}/2} = P_{2^{n_\infty}} = P_0$; $P^3_{2^{n_\infty}/4} = P_{3\cdot 2^{n_\infty}/4}$, opposé de $P_{2^{n_\infty}/4}$; et $P^4_{2^{n_\infty}/4} = P_{2^{n_\infty}} = P_0$. □



$NO = (g_f, g_{f-})$

FIGURE 4 – Deux quarts de tour font un demi-tour : $(g_g^|)^2 = -g_f^-$.

Remarque 4.5 (Changement de niveau). Dans la lecture normée, $\imath$ envoie l'unité d'un axe sur l'unité de l'autre. Si l'on veut mesurer les deux rayons avec la même unité fine, le rayon vertical appartient au niveau grossier et il faut ajouter le changement de niveau $2^{n\infty}$: on obtient l'opérateur $\omega = 2^{n\infty}\,\imath$, de carré $\omega^2 = -2^{2n\infty}$. On y retrouve le rapport $2^{2n\infty}$ qui sépare g_g de g_{f-}.

5 Du cercle au plan complexe

Le cercle porte les rotations, l'échelle de la section 2 porte les dilatations. On les combine.

Définition 5.1 (Produit dans le plan)**.** Soit z un point du plan distinct de O. On note M_z la similitude directe de centre O qui envoie $g_f^- = 1$ sur z : c'est la composée d'une dilatation de rapport $\rho = |z|$ et d'une rotation d'angle θ. On écrit

$$z \;=\; \rho\, e^{\theta\,\imath},$$

et l'on pose, pour tout point w du plan, $z \cdot w = M_z(w)$, avec $O \cdot w = O$.

Théorème 5.2 (Le plan complexe)**.** *Le produit de la définition 5.1 a les propriétés suivantes.*

1. *Il prolonge celui du cercle (définition 3.1) et celui des dilatations* (2) *:*

$$\rho\, e^{\theta\imath} \cdot \rho'\, e^{\theta'\imath} \;=\; \rho\rho'\, e^{(\theta+\theta')\imath}.$$

2. *Tout point du plan s'écrit de façon unique $z = x + y\,\imath$, avec x et y réels.*
3. *Il est commutatif, distributif sur l'addition des vecteurs, et*

$$(x + y\,\imath)(x' + y'\,\imath) \;=\; (xx' - yy') + (xy' + x'y)\,\imath.$$

Le plan, muni de l'addition des vecteurs et de ce produit, est le corps des nombres complexes.

Démonstration. Point 1. Composer deux similitudes directes de centre O multiplie les rapports et additionne les angles.

Point 2. Les rayons $g_f^- = 1$ et $g_g^{\downarrow} = \imath$ sont perpendiculaires et unitaires : ils forment une base du plan.

Point 3. Dans cette base, la similitude M_z associée à $z = x + y\,\imath$ a pour matrice

$$M_z = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix},$$

puisqu'elle envoie 1 sur z et, comme les similitudes directes de centre O commutent, $\imath$ sur le point obtenu en tournant z d'un quart de tour, soit $-y + x\,\imath$. L'application M_z est linéaire, d'où la distributivité en w ; et $M_{z+z'} = M_z + M_{z'}$ se lit sur la matrice, d'où la distributivité en z. La formule du produit est le calcul de $M_z(x' + y'\imath)$. Elle est symétrique en z et z', d'où la commutativité. Enfin M_z est inversible dès que $z \neq O$, car son déterminant vaut $x^2 + y^2$. □

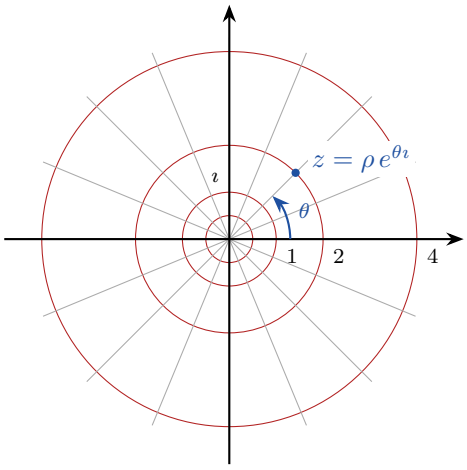


FIGURE 5 – Le plan comme combinaison des deux échelles : cercles en progression géométrique (dilatations), rayons équirépartis (rotations).

6 De l'anti-Dirac au plan complexe

6.1 L'anti-Dirac

Définition 6.1 (Mesure orientée)**.** Une *droite orientée* est un couple (D, u) formé d'une droite D passant par O et d'un vecteur unitaire u de D. Sa *mesure orientée* associe à tout segment orienté $\overrightarrow{pq}$ de D le nombre

$$m_u(\overrightarrow{pq}) \;=\; t_q - t_p, \qquad \text{où } p = t_p\, u,\; q = t_q\, u.$$

Définition 6.2 (Anti-Dirac)**.** L'*anti-Dirac* porté par D est la superposition des deux droites orientées (D, u) et $(D, -u)$. Sa mesure sommatoire est nulle sur tout segment :

$$m_u + m_{-u} \;=\; 0.$$

Le Dirac concentre une masse 1 dans un seul grain ; l'anti-Dirac étale sur toute la droite deux densités opposées dont la somme est nulle en tout point. Il est *équivalent* à zéro par sa mesure, sans lui être égal : les deux droites sont bien là. On parle d'un *zéro d'équivalence*.

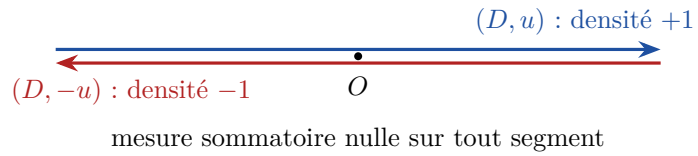


FIGURE 6 – L'anti-Dirac : deux droites superposées de mesures orientées opposées (dessinées légèrement écartées).

6.2 Du plan complexe à l'anti-Dirac

Théorème 6.3. *Soit $H = (D_H, g_f^-)$ l'axe horizontal orienté et $V = (D_V, g_g^|)$ l'axe vertical orienté. Le produit par $g_g^| = \imath$ envoie H sur V, puis V sur la droite orientée $(D_H, -g_f^-)$. Ainsi*

$$H \quad et \quad \left(g_g^|\right)^2 \cdot H \;=\; (D_H, -g_f^-)$$

sont deux droites superposées de mesures orientées opposées : elles forment un anti-Dirac.

Démonstration. Pour t réel, $\imath \cdot (t\, g_f^-) = t\, g_g^|$: la droite D_H est envoyée sur D_V, et le vecteur unitaire g_f^- sur $g_g^|$. Puis $\imath \cdot (t\, g_g^|) = t\, (g_g^|)^2 = -t\, g_f^-$ par le théorème 4.3 : la droite D_V est envoyée sur D_H, et le vecteur unitaire $g_g^|$ sur $-g_f^-$. La mesure orientée de l'image est donc $m_{-g_f^-}$, et $m_{g_f^-} + m_{-g_f^-} = 0$. □

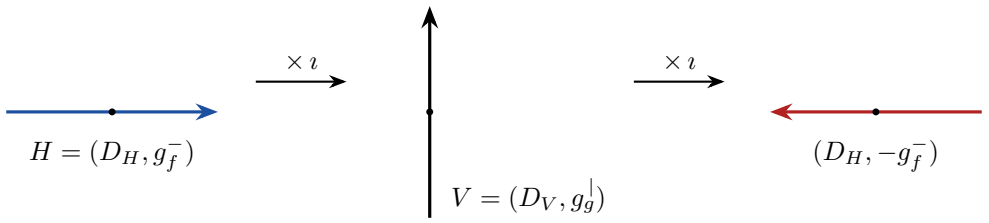


FIGURE 7 – Le quart de tour, appliqué deux fois, replie l'axe horizontal sur lui-même avec l'orientation opposée.

Corollaire 6.4 (À l'échelle des grains)**.** *Soit $g_{g+}^| = 2^{n_\infty}\, g_g^|$ le rayon vertical du niveau supérieur et $g_g^- = 2^{n_\infty}\, g_f^-$ le rayon horizontal grossier. Alors*

$$g_g^| \cdot g_{g+}^| \;=\; 2^{n_\infty}\, (g_g^|)^2 \;=\; -\,2^{n_\infty}\, g_f^- \;=\; -\,g_g^-.$$

Le produit des deux rayons verticaux est l'opposé du rayon horizontal grossier : les droites portées par g_g^- et $-g_g^-$ sont superposées et forment un anti-Dirac au niveau grossier.

Démonstration. On remplace $g_{g+}^|$ par $2^{n_\infty}\, g_g^|$, puis on applique le théorème 4.3 et la définition de g_g^-. Le théorème 6.3 s'applique alors à l'axe horizontal orienté par g_g^-, la dilatation de rapport 2^{n_∞} ne changeant pas l'orientation. □

6.3 De l'anti-Dirac au plan complexe

Dans l'autre sens, on part d'un anti-Dirac (D, u), $(D, -u)$. Passer de l'une des deux droites à l'autre, c'est appliquer le demi-tour -1. Construire le plan complexe, c'est trouver une *racine carrée* de ce demi-tour.

Lemme 6.5. *Il n'existe pas de racine carrée du demi-tour à l'intérieur de la droite D.*

Démonstration. Les seules isométries de D fixant O sont l'identité et le demi-tour, et leurs carrés valent tous deux l'identité. □

Il faut donc sortir de la droite, en la dédoublant : on se donne une seconde droite D' passant par O, perpendiculaire à D, et un *échange* J, c'est-à-dire une isométrie du plan fixant O qui envoie D sur D' et D' sur D.

Théorème 6.6 (Réciproque)**.** *Soit u' un vecteur unitaire de D'. Il existe exactement quatre échanges :*

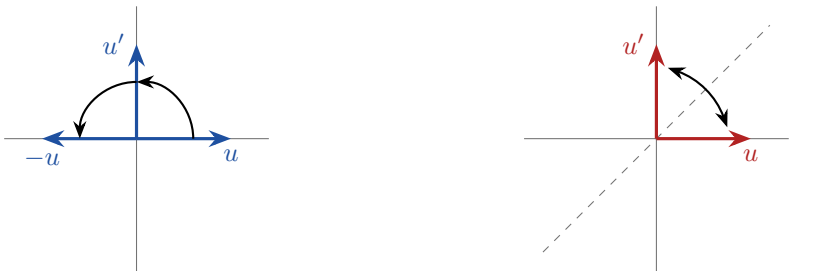
$$J_{a,b} : \quad u \mapsto a\, u', \qquad u' \mapsto b\, u, \qquad a, b \in \{+1, -1\}.$$

Leur carré vaut $J_{a,b}^2 = ab$. Par conséquent :

1. *si l'échange est une isométrie* directe *($ab = -1$), c'est un quart de tour, $J^2 = -1$, et le plan muni de J est le plan complexe, avec $J = \pm\imath$;*
2. *si l'échange est une isométrie* indirecte *($ab = +1$), c'est une symétrie par rapport à une bissectrice, $J^2 = +1$, et l'on n'obtient pas le plan complexe.*

Dans le premier cas, les droites (D, u) et $J^2 \cdot (D, u) = (D, -u)$ redonnent l'anti-Dirac de départ.

Démonstration. Une isométrie conserve les longueurs, donc envoie u sur $\pm u'$ et u' sur $\pm u$: ce sont les quatre cas. On calcule $J^2(u) = J(a\,u') = ab\,u$ et $J^2(u') = J(b\,u) = ab\,u'$, donc $J^2 = ab$. Dans la base (u, u'), le déterminant de J vaut $-ab$: l'échange est direct si et seulement si $ab = -1$. Dans ce cas J est une rotation de carré -1, donc un quart de tour, et le théorème 5.2 s'applique avec $1 = u$ et $\imath = J(u)$. Les deux choix $(a, b) = (1, -1)$ et $(-1, 1)$ donnent $\imath$ et $-\imath$: ils sont échangés par la conjugaison. □



échange direct : $J^2 = -1$ échange indirect : $J^2 = +1$

FIGURE 8 – Les deux types d'échange entre les droites D et D'. Seul l'échange direct est une racine carrée du demi-tour.

Remarque 6.7 (Portée de la réciproque). L'anti-Dirac seul ne suffit donc pas : il fournit le demi-tour, pas sa racine carrée. La donnée supplémentaire est le dédoublement de la droite et le caractère direct de l'échange. Sous cette hypothèse, la construction est unique à la conjugaison près.

7 Synthèse

7.1 Anti-Dirac et plan complexe

Théorème 7.1 (Équivalence)**.** *Les deux données suivantes sont équivalentes :*

1. *le plan complexe, c'est-à-dire le plan muni d'un quart de tour $\imath$;*
2. *un anti-Dirac porté par une droite D, une droite D' perpendiculaire à D, et un échange direct entre D et D'.*

On passe de la première à la seconde par le théorème 6.3, et de la seconde à la première par le théorème 6.6.

7.2 Le plan à deux niveaux d'observation adjacents

Définition 7.2 (Plan à deux niveaux adjacents)**.** On appelle *plan à deux niveaux d'observation adjacents*, noté Π, le plan muni du rayon horizontal g^{-}_{f}, lu au niveau fin, et du rayon vertical $g^{|}_{g}$, lu au niveau grossier, ce dernier étant obtenu à partir du premier par le quart de tour le long du cercle. Tout point de Π s'écrit de façon unique

$$p \;=\; x\,g^{-}_{f} + y\,g^{|}_{g}, \qquad x,\ y \text{ réels.}$$

Ce plan admet deux lectures :

— la *lecture normée* ν, où chaque rayon est l'unité de son axe (convention 4.1) : $\nu(p) = x + y\,\imath$;

— la *lecture commune* κ, où les deux rayons sont mesurés avec l'unité fine (remarque 4.5) : $\kappa(p) = x + y\,\omega$, avec $\omega = 2^{n_\infty}\,\imath$.

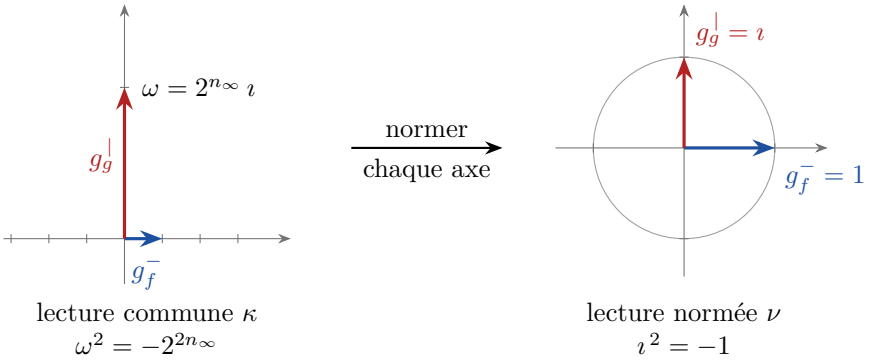


FIGURE 9 – Les deux lectures du plan à deux niveaux adjacents (le rapport 2^{n_∞} entre les deux rayons est dessiné égal à 4).

Théorème 7.3 (Plan à deux niveaux, plan complexe et anti-Dirac)**.** *Soit* Π *un plan à deux niveaux d'observation adjacents.*

1. Équivalence avec le plan complexe. *La lecture normée* ν *est une bijection de* Π *sur le plan complexe, qui respecte la somme et le produit.*
2. Sans égalité. *Les deux lectures diffèrent par l'affinité*

$$A = \kappa \circ \nu^{-1} : \quad x + y\,\imath \longmapsto x + 2^{n_\infty}\,y\,\imath,$$

qui respecte la somme, mais qui n'est ni une isométrie, ni compatible avec le produit. Le plan Π *est donc le plan complexe augmenté d'une donnée, le changement de niveau* 2^{n_∞}.
3. Π porte un anti-Dirac. *L'axe horizontal orienté par* g_f^{-} *et son image par* $(g_g^{|})^2$ *forment un anti-Dirac ; au niveau grossier, il est donné par le produit des rayons verticaux des deux niveaux adjacents,* $g_g^{|} \cdot g_{g+}^{|} = -g_g^{-}$.
4. Π est reconstruit par cet anti-Dirac. *Le plan* Π *fournit les deux compléments demandés par le théorème 6.6 : la seconde droite, qui est l'axe vertical, et l'échange, qui est le produit par* $g_g^{|}$ *et qui est direct. L'anti-Dirac ainsi dédoublé redonne* Π *dans sa lecture normée.*

Démonstration. Point 1. Dans la lecture normée, $g_f^{-} = 1$ et $g_g^{|} = \imath$ (théorème 4.3) : Π est le plan du théorème 5.2, dont le point 2 donne la bijection et le point 3 la somme et le produit.

Point 2. On a $A(z + z') = A(z) + A(z')$ par linéarité. Mais $A(\imath) = \omega$ est de longueur 2^{n_∞} alors que $\imath$ est de longueur 1 : A n'est pas une isométrie. Et $A(\imath \cdot \imath) = A(-1) = -1$, tandis que $A(\imath) \cdot A(\imath) = \omega^2 = -2^{2n_\infty}$: A ne respecte pas le produit. Connaître Π, c'est connaître à la fois ν et κ, donc le plan complexe et le rapport 2^{n_∞} ; inversement, le plan complexe et ce rapport déterminent $\kappa = A \circ \nu$.

Point 3. C'est le théorème 6.3, puis le corollaire 6.4.

Point 4. Le rayon vertical est le point $P_{2^{n_\infty}/4}$ de la grille, et le produit par un point de la grille est une rotation (proposition 3.2). Le produit par $g_g^{|}$ est donc une isométrie directe ; il envoie l'axe horizontal sur l'axe vertical et l'axe vertical sur l'axe horizontal : c'est un échange direct. Le théorème 6.6, point 1, s'applique avec $u = g_f^{-}$ et $J(u) = g_g^{|}$, et redonne le plan complexe, c'est-à-dire Π lu par ν d'après le point 1. □

Remarque 7.4 (Les trois objets ne sont pas équivalents deux à deux). Le plan à deux niveaux contient les deux autres. On passe de Π au plan complexe en oubliant le changement de niveau, et du plan complexe à Π en le choisissant. On passe de Π à l'anti-Dirac par le carré du quart de tour, et de l'anti-Dirac à Π en lui rendant la seconde droite et l'échange direct. L'anti-Dirac seul, porté par une droite, n'est équivalent ni à Π ni au plan complexe.

Remarque 7.5 (Le rôle de l'adjacence). Deux niveaux séparés de k pas donneraient $\omega_k = 2^{kn_\infty}\,\imath$, et les quatre points du théorème resteraient vrais. L'adjacence fixe le facteur d'échelle : c'est elle qui fait tomber le produit $g_g^{\downarrow} \cdot g_{g+}^{\downarrow}$ exactement sur le rayon horizontal du niveau voisin.

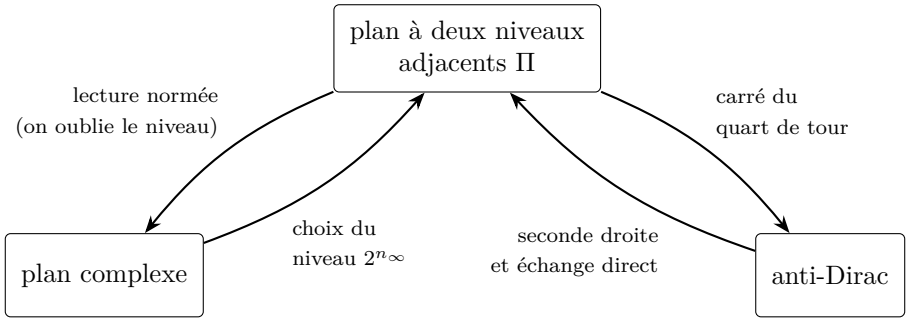


FIGURE 10 – Le plan à deux niveaux adjacents contient le plan complexe et l'anti-Dirac.

7.3 Récapitulatif

Étape	**Ce qui est donné**	**Ce qui est obtenu**
Dilatations	grains $g_{f-} < g_f < g_g < g_{g+}$ de rapport 2^{n_∞}	échelle exponentielle, loi $2^k \cdot 2^{k'} = 2^{k+k'}$, valeurs positives
Cercle	2^{n_∞} points équirépartis, même loi sur les abscisses	produit $P_a \cdot P_b = P_{a+b}$, échelle périodique
Quart de tour	2^{n_∞} divisible par 4	$(g_g^{\downarrow})^2 = -g_f^{-}$, d'où $g_g^{\downarrow} = \imath$
Plan	dilatations et rotations combinées	$z = \rho\, e^{\theta\imath} = x + y\,\imath$, corps des complexes
Anti-Dirac	produit par $\imath$ appliqué deux fois à l'axe horizontal	deux droites superposées de mesures opposées
Réciproque	anti-Dirac, dédoublement, échange direct	$J^2 = -1$, plan complexe
Deux niveaux	plan lu aux niveaux fin et grossier, de rapport 2^{n_∞}	équivalent au plan complexe par la lecture normée ; porte un anti-Dirac

TABLE 1 – Les étapes de la construction.

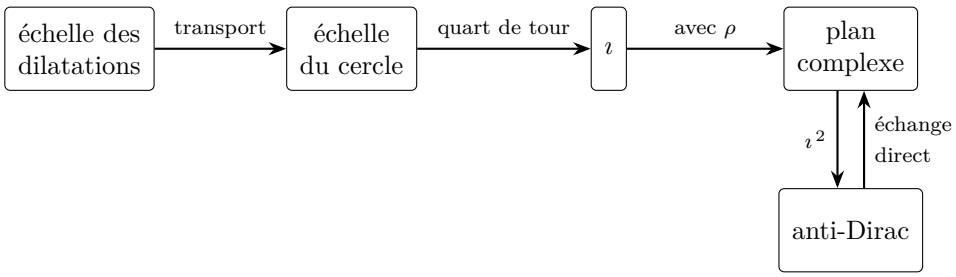


FIGURE 11 – La chaîne complète.

Conclusion. L'échelle exponentielle des dilatations ne produit que des quantités positives. Transportée sur le cercle, elle garde sa loi mais devient périodique, et le quart de tour, qui tombe exactement sur la grille parce que 2^{n_∞} est une puissance de 2, y a pour carré le demi-tour. C'est $\imath$. Les deux échelles réunies donnent le plan complexe. Enfin, le carré de $\imath$ replie l'axe horizontal sur lui-même avec l'orientation opposée : le plan complexe contient un anti-Dirac, et il en est la racine carrée dès que l'échange des deux droites est direct. Le plan à deux niveaux d'observation adjacents réunit ces résultats : par la lecture normée il est équivalent au plan complexe, sans lui être égal puisqu'il garde en plus le changement de niveau ; il porte un anti-Dirac ; et il fournit lui-même la seconde droite et l'échange direct qui permettent de le reconstruire à partir de cet anti-Dirac.