Le grain construit

Une version constructive de « le point absolu est un grain »

Hugues Genvrin

Novembre 2026

Résumé

Dans un précédent article, on a montré qu'un continu ordonné en corps, indexé bijectivement par les parties des parties d'un ensemble dénombrable, est nécessairement non archimédien : ce que l'on prend pour un point y est l'ombre d'un grain. Cette démonstration est indirecte : elle passe par le cardinal $2^{2^{\aleph_0}}$, le théorème de Cantor et celui de Hölder, et elle établit que le grain est inévitable sans le montrer. On propose ici une voie directe. On se place dans un modèle non standard de l'arithmétique de Peano, avec un entier infini $\nu = \#\mathbb{N}$. On décrit le segment $[0, 1[$ à deux niveaux d'observation : par 2^ν grains, puis par $2^{2\nu}$ grains. La non-idempotence, $2^{2\nu} \neq 2^\nu$, suffit à faire apparaître le grain : chaque point du premier niveau devient la mesure inférieure d'un grain du second, qui contient 2^ν points, tous infiniment proches de lui. La longueur se conserve, les grains se divisent, et la division se poursuit sans fin. On montre en outre que les écritures sont uniques, que la hiérarchie des niveaux est stable par addition et par produit, que tout réel, $\frac{1}{3}$ compris, est la mesure inférieure de son grain, et que la division posée depuis le niveau 2ν situe $\frac{1}{3}$ dans le halo, au niveau 2ν, du quotient qu'elle calcule, et que l'on y retrouve, à l'échelle standard, la double écriture des nombres dyadiques.

Table des matières

1 Introduction **2**
1.1 Deux voies vers le grain . . . 2
1.2 Plan . . . 2

2 Le cadre **2**
2.1 Un modèle non standard de Peano . . . 2
2.2 Nombres dyadiques et infinitésimaux . . . 3

3 Grilles, grains et mesure inférieure **3**
3.1 La grille de niveau m . . . 3
3.2 Grains et mesure inférieure . . . 3

4 Le plongement d'un niveau dans le suivant **4**

5 Le théorème principal **5**

6 Unicité des écritures **6**

7 La hiérarchie des niveaux **6**

8 Les opérations **7**
8.1 Addition et produit . . . 7
8.2 La division : $\frac{1}{3}$, mesure inférieure de son grain . . . 7

9 Grain et monade **10**

1 Introduction

1.1 Deux voies vers le grain

La thèse « le point absolu est un grain » peut être établie de deux façons.

La voie par le cardinal. Un continu ordonné en corps qui a $2^{2^{\aleph_0}}$ points ne peut pas être archimédien, car un corps archimédien s'injecte dans $\mathbb{R}$ (Hölder) et $2^{2^{\aleph_0}} > 2^{\aleph_0}$ (Cantor). Il contient donc des infinitésimaux, et chaque réel y est l'ombre d'une monade. Cette voie est rigoureuse, mais indirecte : elle prouve l'existence du grain par l'absurde, sans le décrire, et elle s'appuie sur la théorie des ensembles de Cantor.

La voie par la non-idempotence. On peut au contraire construire le grain. Il suffit de disposer d'un entier infini ν, et d'observer le segment avec ν chiffres binaires après la virgule, puis avec 2ν. Comme $2\nu \neq \nu$, le second niveau d'observation compte $2^{2\nu}$ points au lieu de 2^{ν} : chaque point du premier niveau se dédouble en un grain de 2^{ν} points. Aucun cardinal transfini n'intervient, et tout se fait dans l'arithmétique.

C'est cette seconde voie que l'on développe ici.

1.2 Plan

La section 2 fixe le cadre : un modèle non standard de Peano. La section 3 définit les grilles $\mathbb{G}_m$, les grains et leur mesure inférieure. La section 4 plonge le niveau ν dans le niveau 2ν. La section 5 énonce et démontre le théorème principal. La section 6 montre que les écritures sont uniques. La section 7 étudie la hiérarchie des niveaux, et la section 8 les opérations. La section 9 compare le grain et la monade.

2 Le cadre

2.1 Un modèle non standard de Peano

On note $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ les entiers de Peano. D'après Skolem [10], il existe des structures $\mathcal{M}$ qui satisfont exactement les mêmes énoncés arithmétiques que $\mathbb{N}$, mais qui contiennent des entiers plus grands que tous les entiers usuels [7]. On fixe une telle structure $\mathcal{M}$. Elle contient $\mathbb{N}$ comme segment initial : les éléments de $\mathbb{N}$ sont dits *standard*, les autres *infinis*.

Lemme 1 (Transfert)**.** *Tout énoncé de l'arithmétique vrai dans* $\mathbb{N}$*, y compris s'il mentionne des entiers standard particuliers, est vrai dans* $\mathcal{M}$*.*

On fixe un entier infini $\nu \in \mathcal{M}$, que l'on note aussi $\#\mathbb{N}$: c'est le nombre d'entiers d'une fenêtre infinie $[1, \nu]$.

Lemme 2 (Non-idempotence)**.** *On a* $2\nu \neq \nu$ *et* $2^{2\nu} = 2^{\nu} \cdot 2^{\nu} > 2^{\nu}$*. Plus généralement, si* $m < m'$ *alors* $2^m < 2^{m'}$*.*

Démonstration. Ce sont des théorèmes de Peano : $x + x = x$ entraîne $x = 0$; $2^{a+b} = 2^a \cdot 2^b$; l'exponentielle de base 2 est strictement croissante. Par transfert, ils valent dans $\mathcal{M}$, et $\nu \neq 0$. □

2.2 Nombres dyadiques et infinitésimaux

Définition 3. Un *nombre dyadique* de $\mathcal{M}$ est une fraction $a/2^m$, avec $a, m \in \mathcal{M}$. On note $\mathbb{D}$ leur ensemble. On le munit de l'ordre et des opérations usuelles sur les fractions, définis dans $\mathcal{M}$.

L'ensemble $\mathbb{D}$ est un anneau ordonné : la somme et le produit de deux dyadiques sont dyadiques, puisque $\frac{a}{2^m} \cdot \frac{b}{2^{m'}} = \frac{ab}{2^{m+m'}}$.

Définition 4. Un dyadique q est *infinitésimal* si $|q| < 1/n$ pour tout entier standard $n \geq 1$. Deux dyadiques p, q sont *infiniment proches*, ce que l'on note $p \simeq q$, si $p - q$ est infinitésimal.

Lemme 5. *Si m est un entier infini, alors 2^{-m} est infinitésimal, ainsi que $k \cdot 2^{-m}$ pour tout $k \leq m$.*

Démonstration. Dans $\mathbb{N}$, on a $2^m > m^2$ pour tout $m \geq 5$; par transfert, cela vaut dans $\mathcal{M}$. Pour $k \leq m$ et n standard, on a $n < m$, donc $k \cdot 2^{-m} \leq m \cdot 2^{-m} < m/m^2 = 1/m < 1/n$. □

3 Grilles, grains et mesure inférieure

3.1 La grille de niveau m

Définition 6 (Grille)**.** Pour $m \in \mathcal{M}$, $m \geq 1$, la *grille de niveau m* est

$$\mathbb{G}_m = \left\{ \frac{k}{2^m} : k \in \mathcal{M},\ 0 \leq k < 2^m \right\} \subset [0, 1[.$$

Elle a exactement 2^m éléments. On dit que $\mathbb{G}_m$ décrit le segment au *niveau d'observation m*, ou à la *résolution $-m$*.

Dans les notations des travaux précédents, le niveau ν correspond au niveau d'observation $NO = g_f$, et le niveau 2ν au niveau $NO = g_{f^-}$, plus fin.

Définition 7 (Écriture binaire)**.** Tout k tel que $0 \leq k < 2^m$ s'écrit de façon unique $k = \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i \, 2^{m-i}$, avec $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$. On écrit alors

$$\frac{k}{2^m} = 0{,}\varepsilon_1\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_m,$$

avec exactement m chiffres après la virgule.

L'unicité est un théorème de Peano (division euclidienne itérée), transféré à $\mathcal{M}$. Un élément de $\mathbb{G}_m$ est donc la même chose qu'une suite de m chiffres binaires, c'est-à-dire une partie de $\{1, \ldots, m\}$: la grille de niveau m est en bijection avec les parties de la fenêtre $[1, m]$. C'est la définition de l'infini par l'indexation du continu, lue au niveau m.

3.2 Grains et mesure inférieure

Définition 8 (Grain)**.** Le *grain de niveau m* d'indice k est l'intervalle semi-ouvert de $\mathbb{D}$

$$g_m(k) = \left[\frac{k}{2^m},\ \frac{k+1}{2^m} \right[.$$

Son *épaisseur* est 2^{-m}, et sa *mesure inférieure* est son extrémité gauche :

$$m_{\inf}\big(g_m(k)\big) = \frac{k}{2^m} \in \mathbb{G}_m.$$

On choisit la mesure inférieure, à gauche, pour deux raisons : le premier grain $g_m(0)$ a ainsi une mesure nulle, et le segment semi-ouvert $[0,1[$ est exactement réuni par les grains, sans que le point 1 y figure.

Proposition 9 (Pavage)**.** *Les 2^m grains de niveau m sont deux à deux disjoints, et leur réunion est $\mathbb{D} \cap [0,1[$. Tout dyadique $y \in [0,1[$ appartient au grain d'indice $k = \lfloor 2^m y \rfloor$. La longueur totale vaut*

$$1 = 2^m \cdot 2^{-m}.$$

Démonstration. Pour $y \in \mathbb{D} \cap [0,1[$, l'entier $k = \lfloor 2^m y \rfloor$ est défini dans $\mathcal{M}$ et vérifie $0 \leq k < 2^m$ et $k \leq 2^m y < k+1$, c'est-à-dire $y \in g_m(k)$. Il est unique, car les grains d'indices distincts sont disjoints. La dernière égalité est la relation fondamentale $L = |L| \cdot \varepsilon$ de la théorie du grain, avec $L = 1$, $|L| = 2^m$ et $\varepsilon = 2^{-m}$. □

4 Le plongement d'un niveau dans le suivant

Définition 10 (Plongement par des zéros)**.** On définit $\iota : \mathbb{G}_\nu \to \mathbb{G}_{2\nu}$ en complétant l'écriture par ν zéros :

$$\iota(0{,}\varepsilon_1 \dots \varepsilon_\nu) = 0{,}\varepsilon_1 \dots \varepsilon_\nu \underbrace{0 \dots 0}_{\nu}, \qquad \text{soit} \qquad \iota(x) = x + \sum_{i=\nu+1}^{2\nu} 0 \cdot 2^{-i}.$$

En valeur, $\iota(x) = x$: on a simplement $\dfrac{k}{2^\nu} = \dfrac{k \cdot 2^\nu}{2^{2\nu}}$. Le plongement ne déplace aucun point : il en change la description, en lui ajoutant ν chiffres.

Proposition 11. *(i) ι est injective et respecte l'ordre.*

(ii) Son image est exactement l'ensemble des points de $\mathbb{G}_{2\nu}$ dont les ν derniers chiffres sont nuls :

$$\iota(\mathbb{G}_\nu) = \{\, 0{,}\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{2\nu} \in \mathbb{G}_{2\nu} : \varepsilon_{\nu+1} = \dots = \varepsilon_{2\nu} = 0 \,\}.$$

(iii) $\mathbb{G}_{2\nu}$ contient $2^{2\nu} - 2^\nu$ points qui ne sont pas dans l'image de ι.

Démonstration. (i) ι conserve la valeur, donc l'ordre, et deux valeurs distinctes restent distinctes. (ii) $\frac{j}{2^{2\nu}}$ est de la forme $\frac{k}{2^\nu}$ si et seulement si 2^ν divise j, c'est-à-dire si et seulement si les ν derniers chiffres de j sont nuls. (iii) $\mathbb{G}_{2\nu}$ a $2^{2\nu}$ éléments et l'image en a 2^ν ; la différence est non nulle par le lemme 2. □

Remarque (Une analogie)*.* Un réel est un entier lorsqu'il n'a aucune décimale non nulle. De même, un point du niveau 2ν appartient au niveau ν lorsqu'il n'a que des zéros après la place ν. Le niveau ν est au niveau 2ν ce que $\mathbb{Z}$ est à $\mathbb{R}$: un réseau régulier de points, entre lesquels le niveau plus fin insère de nouveaux points.

Remarque (Ce qui se conserve et ce qui change)*.* Le passage du niveau ν au niveau 2ν conserve la longueur du segment, $2^\nu \cdot 2^{-\nu} = 2^{2\nu} \cdot 2^{-2\nu} = 1$, et conserve chacun des points du niveau ν. Il ne s'agit pas d'un autre segment, mais d'une autre description du même segment. Ce qui change est le grain : chaque grain de niveau ν se divise en 2^ν grains de niveau 2ν. C'est l'opération de regroupement de la théorie du grain, lue en sens inverse :

$$(L,\ 2^\nu,\ 2^{-\nu}) \ \simeq\ (L,\ 2^\nu \cdot 2^\nu,\ 2^{-\nu} \cdot 2^{-\nu}).$$

5 Le théorème principal

Définition 12 (Grain d'un point)**.** Pour $x \in \mathbb{G}_\nu$, on appelle *grain de x au niveau 2ν* l'ensemble

$$\Gamma(x) = \mathbb{G}_{2\nu} \cap \left[x,\ x + 2^{-\nu}\right[.$$

Théorème 13 (Le point est un grain, version constructive)**.** *Soit $x \in \mathbb{G}_\nu$. Alors :*

(i) $\Gamma(x)$ *contient exactement* 2^ν *points, qui sont les nombres* $x + j \cdot 2^{-2\nu}$ *pour* $0 \leq j < 2^\nu$ *;*

(ii) x *est le plus petit élément de* $\Gamma(x)$ *: c'est sa mesure inférieure ;*

(iii) tous les points de $\Gamma(x)$ *sont infiniment proches de* x *;*

(iv) les grains $\Gamma(x)$*, pour* $x \in \mathbb{G}_\nu$*, forment une partition de* $\mathbb{G}_{2\nu}$ *;*

(v) la longueur se conserve : 2^ν *grains, contenant chacun* 2^ν *points d'épaisseur* $2^{-2\nu}$*, recouvrent une longueur* $2^\nu \cdot 2^\nu \cdot 2^{-2\nu} = 1$*.*

Ce qui, au niveau ν, est un point x sans épaisseur est, au niveau 2ν, un grain de 2^ν points.

Démonstration. Écrivons $x = k/2^\nu = k\,2^\nu/2^{2\nu}$.

(i) Un point $j'/2^{2\nu}$ de $\mathbb{G}_{2\nu}$ appartient à $[x, x+2^{-\nu}[$ si et seulement si $k\,2^\nu \leq j' < (k+1)\,2^\nu$, c'est-à-dire $j' = k\,2^\nu + j$ avec $0 \leq j < 2^\nu$. Il y a 2^ν tels indices, et le point correspondant est $x + j \cdot 2^{-2\nu}$.

(ii) C'est le cas $j = 0$.

(iii) Pour $0 \leq j < 2^\nu$, on a $0 \leq j \cdot 2^{-2\nu} < 2^\nu \cdot 2^{-2\nu} = 2^{-\nu}$, qui est infinitésimal par le lemme 5, puisque ν est infini.

(iv) Tout point $j'/2^{2\nu}$ de $\mathbb{G}_{2\nu}$ s'écrit de façon unique $j' = k\,2^\nu + j$ avec $0 \leq j < 2^\nu$ (division euclidienne par 2^ν) ; il appartient alors à $\Gamma(k/2^\nu)$ et à aucun autre grain.

(v) Calcul direct, avec $2^\nu \cdot 2^\nu = 2^{2\nu}$. □

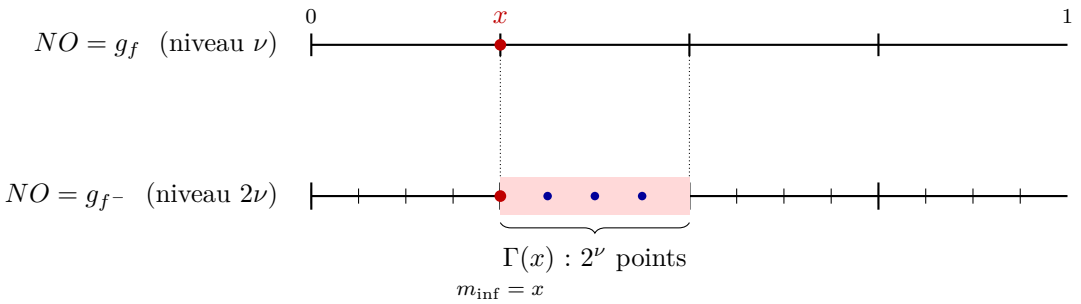


FIGURE 1 – Le point x du niveau ν devient, au niveau 2ν, la mesure inférieure d'un grain $\Gamma(x)$ de 2^ν points. Schéma : les $\#\mathbb{N}$ positions sont représentées par quelques-unes, et les 2^ν points de $\Gamma(x)$ par quatre. Avec $\nu = \#\mathbb{N}$, tous les points de $\Gamma(x)$ sont infiniment proches de x.

Corollaire 14 (Aucun point absolu)**.** *Pour tout niveau $m \geq 1$ et tout $x \in \mathbb{G}_m$, le grain de x au niveau $2m$ contient $2^m \geq 2$ points. Aucun point d'aucune grille n'est indivisible : il n'existe pas de point absolu dans la hiérarchie des grilles.*

Démonstration. On applique le théorème 13 en remplaçant ν par m ; les points (i), (ii), (iv) et (v) n'utilisent pas que m est infini. □

Remarque. Le corollaire vaut pour tout niveau, fini ou infini. Ce que le caractère infini de ν ajoute, c'est le point (iii) : les 2^ν points du grain sont indiscernables à l'échelle standard. Le grain est alors invisible à l'observateur standard, qui le prend pour un point.

6 Unicité des écritures

Dans $\mathbb{R}$, les nombres dyadiques ont deux écritures binaires, par exemple $0{,}1000\ldots = 0{,}0111\ldots$ Dans la hiérarchie des grilles, ce phénomène disparaît.

Proposition 15 (Écriture exacte)**.** *À un niveau m fixé, chaque point de $\mathbb{G}_m$ a une seule écriture à m chiffres. En particulier :*

(i) $0{,}0\underbrace{1\ldots1}_{m-1} = \frac{1}{2} - 2^{-m}$*, qui est distinct de* $0{,}1\underbrace{0\ldots0}_{m-1} = \frac{1}{2}$ *: ce sont les mesures inférieures de deux grains voisins ;*

(ii) $0{,}\underbrace{1\ldots1}_{m} = 1 - 2^{-m}$ *est la mesure inférieure du dernier grain, et* $1 \notin \mathbb{G}_m$*.*

Démonstration. L'unicité de l'écriture binaire d'un entier $k < 2^m$ est un théorème de Peano, transféré à $\mathcal{M}$. Le calcul (i) est la somme géométrique finie $\sum_{i=2}^{m} 2^{-i} = \frac{1}{2} - 2^{-m}$, valable dans $\mathbb{N}$ pour tout m, donc dans $\mathcal{M}$. De même pour (ii). □

On ne raisonne pas ici par convergence : la grille donne une description exacte du segment, avec un nombre déterminé de chiffres, et deux écritures distinctes désignent deux points distincts.

Remarque (La double écriture comme trace)*.* Si m est infini, les deux points $\frac{1}{2} - 2^{-m}$ et $\frac{1}{2}$ sont distincts, mais infiniment proches. Un observateur qui ne distingue que les écarts standard les confond : il ne voit qu'un seul point, $\frac{1}{2}$, auquel il attribue deux écritures. La double écriture des dyadiques dans $\mathbb{R}$ est la trace, à l'échelle standard, de deux grains voisins que le point absolu ne sait plus séparer.

7 La hiérarchie des niveaux

Proposition 16 (Emboîtement)**.** *Si m divise m', ou plus généralement si $m \leq m'$, alors $\mathbb{G}_m \subset \mathbb{G}_{m'}$. En particulier,*

$$\mathbb{G}_\nu \subset \mathbb{G}_{2\nu} \subset \mathbb{G}_{3\nu} \subset \cdots \subset \mathbb{G}_{j\nu} \subset \mathbb{G}_{(j+1)\nu} \subset \cdots$$

et les cardinaux internes sont strictement croissants :

$$2^\nu < 2^{2\nu} < 2^{3\nu} < \cdots$$

Démonstration. $\frac{k}{2^m} = \frac{k\,2^{m'-m}}{2^{m'}}$. La stricte croissance découle du lemme 2. □

Proposition 17 (Auto-similarité : un pas de ν)**.** *Pour tout $j \geq 1$,*

$$\mathbb{G}_{(j+1)\nu} = \bigsqcup_{x \in \mathbb{G}_{j\nu}} \left(x + 2^{-j\nu}\,\mathbb{G}_\nu\right), \qquad \textit{donc} \qquad \#\mathbb{G}_{(j+1)\nu} = 2^{j\nu} \cdot 2^\nu.$$

Chaque grain de niveau $j\nu$ est une copie de $[0,1[$ réduite d'un facteur $2^{-j\nu}$, observée au niveau ν : il contient 2^ν grains du niveau $(j+1)\nu$. L'auto-similarité de rapport 2^ν parcourt donc la hiérarchie pas à pas : $\nu \to 2\nu \to 3\nu \to \cdots$

Démonstration. Soit $\frac{n}{2^{(j+1)\nu}} \in \mathbb{G}_{(j+1)\nu}$. La division euclidienne $n = k\,2^\nu + i$, avec $0 \leq i < 2^\nu$ et $0 \leq k < 2^{j\nu}$, donne $\frac{n}{2^{(j+1)\nu}} = \frac{k}{2^{j\nu}} + 2^{-j\nu}\frac{i}{2^\nu}$, et le couple (k,i) est unique. □

Niveau	Notation	Nombre de points	Épaisseur d'un grain	Chiffres après la virgule
ν	$NO = g_f$	2^ν	$2^{-\nu}$	ν
2ν	$NO = g_{f^-}$	$2^{2\nu}$	$2^{-2\nu}$	2ν
3ν	$NO = g_{f^{--}}$	$2^{3\nu}$	$2^{-3\nu}$	3ν

Cette stratification est celle que l'arithmétique des cardinaux de Cantor ne peut pas produire : on y aurait $2^{2\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$, et les niveaux se confondraient. Ici, chaque niveau est strictement plus fin que le précédent, et chaque grain de niveau $j\nu$ se divise en 2^ν grains du niveau suivant $(j+1)\nu$.

Remarque (Deux pas à ne pas confondre). Le cas $j = 1$ de la proposition 17 est le passage de ν à 2ν sur lequel repose le théorème 13. Ce passage admet un autre prolongement : l'auto-similarité de $\mathbb{G}_m$ par elle-même,

$$\mathbb{G}_{2m} = \bigsqcup_{x \in \mathbb{G}_m} \Big(x + 2^{-m}\, \mathbb{G}_m \Big),$$

de rapport 2^m. Depuis $m = 2\nu$, elle mène directement à 4ν et saute le niveau 3ν : c'est un pas de 2ν, non un pas d'auto-similarité de rapport 2^ν. C'est le pas que fait le produit (section 8), puisque le niveau d'un produit est la somme des niveaux de ses facteurs. La chaîne des doublements $\nu, 2\nu, 4\nu, \ldots$ est extraite de la chaîne $\nu, 2\nu, 3\nu, \ldots$; elle n'en est qu'une sous-suite. Le pas de ν est aussi celui de la similitude $\omega = 2^\nu i$ dans le plan à deux résolutions, et le niveau 3ν est celui où vit la dérivée seconde.

8 Les opérations

8.1 Addition et produit

Proposition 18. *Soient $x, y \in \mathbb{G}_m$.*

(i) Si $x + y < 1$, alors $x + y \in \mathbb{G}_m$: l'addition reste au même niveau.

(ii) $xy \in \mathbb{G}_{2m}$: le produit fait monter d'un niveau, de m à $2m$.

En particulier, le produit de deux points du niveau 2ν est un point du niveau 4ν.

Démonstration. (i) $\frac{k}{2^m} + \frac{k'}{2^m} = \frac{k+k'}{2^m}$. (ii) $\frac{k}{2^m} \cdot \frac{k'}{2^m} = \frac{kk'}{2^{2m}}$, avec $0 \le kk' < 2^{2m}$. □

Une grille isolée n'est donc pas stable par produit, mais la hiérarchie l'est : le produit ne fait pas sortir de la hiérarchie, il fait passer au niveau somme. Le niveau d'un produit est la somme des niveaux des facteurs, comme le nombre de chiffres d'un produit est la somme des nombres de chiffres des facteurs.

Corollaire 19. *La réunion $\mathbb{D}_\nu = \bigcup_{j \ge 1} \mathbb{G}_{j\nu}$, prise sur les entiers standard j, est stable par produit, et par addition tant que la somme reste dans $[0, 1[$.*

8.2 La division : $\frac{1}{3}$, mesure inférieure de son grain

Deux façons d'attacher les grains

La question de la division demande de préciser comment les grains sont attachés aux nombres.

(a) *Grains de la grille.* On découpe $[0, 1[$ d'avance en grains $[k2^{-m}, (k+1)2^{-m}[$. C'est la vue d'un observateur qui ne connaît que les grilles et remonte vers le continu.

(b) *Grains portés par les réels.* On part du continu, donné avec ses points absolus, et l'on remplace chaque point par un grain dont il est la mesure inférieure.

Les sections précédentes utilisaient la lecture (a). C'est la lecture (b) qui exprime la thèse « le point absolu est un grain » lorsqu'on part du continu ; c'est elle que l'on adopte pour la division.

Définition 20 (Grain d'un réel)**.** Pour un réel $x \in [0,1[$, le *grain de x au niveau ν* est

$$g_\nu(x) = \big[\, x,\ x + 2^{-\nu}\big[, \qquad m_{\inf}\big(g_\nu(x)\big) = x.$$

Les réels n'étant pas des éléments de $\mathcal{M}$, cette définition se lit dans le cadre de Robinson [9] ; pour un rationnel comme $\frac{1}{3}$, elle se lit déjà parmi les fractions de $\mathcal{M}$.

Proposition 21 (Les grains des réels sont disjoints)**.** *Si $x \neq y$ sont deux réels de $[0,1[$, alors $g_\nu(x) \cap g_\nu(y) = \varnothing$. Le continu est ainsi remplacé, point par point, par des grains disjoints, chaque point absolu étant la mesure inférieure du sien.*

Démonstration. L'écart $|x - y|$ est un réel strictement positif, donc supérieur à $1/n$ pour un entier standard n, et a fortiori à $2^{-\nu}$, qui est infinitésimal. □

Lemme 22 (Le dernier chiffre)**.** *Soit x un nombre écrit avec un nombre fini de chiffres binaires après la virgule, de partie fractionnaire non nulle. Alors $3x$ a une partie fractionnaire non nulle.*

Démonstration. Soit $p \geq 1$ la position du dernier chiffre non nul de x. Comme $3 = 11_2$, on a $3x = x + 2x$; le chiffre de rang p de $2x$ est nul, et l'addition ne produit aucune retenue au rang p : le chiffre de rang p de $3x$ est 1. □

En particulier, $\frac{1}{3}$ n'appartient à aucune grille $\mathbb{G}_m$: si $\frac{1}{3}$ s'écrivait avec m chiffres, $3 \cdot \frac{1}{3} = 1$ aurait une partie fractionnaire non nulle. Le grain $g_\nu(\frac{1}{3})$ n'est donc pas un grain de la grille : il chevauche deux grains voisins de $\mathbb{G}_\nu$.

La division posée et le halo

Le produit de deux nombres écrits avec ν chiffres s'écrit avec 2ν chiffres, en conservant toute la chaîne, zéros compris : la multiplication monte d'un niveau. La division en est l'inverse : elle s'effectue par la division posée, chiffre par chiffre, et le nombre de chiffres du quotient est le nombre de zéros écrits après le dividende. On note

$$1_{2\nu} = 1,\underbrace{0\ldots0}_{2\nu}, \qquad q_{2\nu} = \Big(\frac{1_{2\nu}}{3_\nu}\Big)_{2\nu} = 0{,}0101\ldots,$$

le quotient obtenu en divisant par 3 le dividende $1_{2\nu}$, écrit avec 2ν chiffres.

Proposition 23 (Le halo de $\frac{1}{3}$)**.** *(i)* $1 = 3\,q_{2\nu} + r \cdot 2^{-2\nu}$*, avec un reste $r \in \{1,2\}$: la division n'est pas exacte sur les points.*

(ii) $0 < \frac{1}{3} - q_{2\nu} < 2^{-2\nu}$ *: la mesure inférieure $m_{\inf}(g_\nu(\frac{1}{3})) = \frac{1}{3}$ se trouve dans le grain de niveau 2ν issu de $q_{2\nu}$, c'est-à-dire dans le* halo *de $q_{2\nu}$ au niveau $\mathbb{G}_{2\nu}$.*

(iii) Au niveau ν, $q_{2\nu}$ et $\frac{1}{3}$ sont indiscernables : leur écart est 2^ν fois plus petit qu'un grain de niveau ν.

Démonstration. (i) Dans la division posée, chaque reste partiel vaut 0, 1 ou 2 ; à l'arrêt, au rang 2ν, on a $1 = 3\,q_{2\nu} + r \cdot 2^{-2\nu}$ avec $r \in \{0,1,2\}$. Si $r = 0$, alors $3\,q_{2\nu} = 1$, ce que le lemme 22 interdit, puisque $q_{2\nu}$ a une partie fractionnaire non nulle. (ii) On divise (i) par 3 : $\frac{1}{3} - q_{2\nu} = \frac{r}{3}\,2^{-2\nu}$, qui est strictement compris entre 0 et $2^{-2\nu}$. (iii) $2^{-2\nu} = 2^{-\nu} \cdot 2^{-\nu}$. □

La figure 2 représente cette situation. La mesure inférieure du grain de $\frac{1}{3}$ existe donc, désignée par le réel lui-même ; elle n'est pas calculable en restant au niveau ν. Le calcul passe par le niveau 2ν : le quotient $q_{2\nu}$ qu'il fournit est exact au niveau ν, et ne diffère de $\frac{1}{3}$ qu'à l'intérieur d'un grain de niveau 2ν. En recommençant depuis le niveau 3ν, l'écart devient inférieur à $2^{-3\nu}$, et ainsi de suite, un pas de ν à la fois : aucun niveau n'épuise le reste, mais chaque niveau le loge dans un grain du niveau suivant.

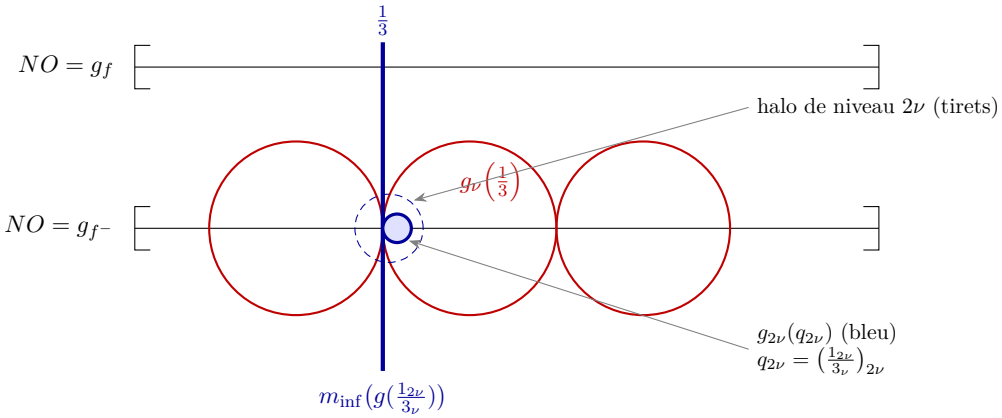


FIGURE 2 – Le halo de $\frac{1}{3}$ (schéma). En rouge, les grains de niveau ν portés par les réels ; celui du milieu est $g_\nu(\frac{1}{3})$, dont la mesure inférieure est $\frac{1}{3}$. En bleu, le grain de niveau 2ν du quotient $q_{2\nu}$ de la division posée ; en tirets, son halo au niveau $\mathbb{G}_{2\nu}$, qui contient $\frac{1}{3}$. Au niveau $NO = g_f$, les deux mesures inférieures se confondent sur la droite verticale. L'écart $0 < \frac{1}{3} - q_{2\nu} < 2^{-2\nu}$ n'est pas visible à l'échelle du schéma : $\frac{1}{3}$ se trouve à l'intérieur du grain bleu.

Remarque (La double écriture, encore). Au niveau 2ν, $3\,q_{2\nu} = 1 - r\cdot 2^{-2\nu}$ et 1 sont deux points distincts, séparés par un ou deux grains. Dans $\mathbb{R}$, la promotion efface cet écart infinitésimal, et l'on écrit $3 \times \frac{1}{3} = 1$, ou $3 \times 0{,}0101\ldots = 0{,}1111\ldots = 1$. C'est la double écriture des dyadiques (section 6), vue de trop loin. En résumé : $\frac{1}{3}$ est *désigné* au niveau ν comme mesure inférieure de son grain, *calculé* depuis le niveau 2ν, et le reste de ce calcul se loge dans son halo.

Remarque (Ce que voit l'observateur des grilles). Dans la lecture (a), $\frac{1}{3}$ n'est la mesure inférieure d'aucun grain de grille : il se trouve à l'intérieur d'un grain, non à son bord. L'observateur des grilles ne l'atteint jamais comme point ; il ne voit que les quotients q_m, qui s'en approchent de niveau en niveau. C'est le seul sens où l'on peut dire que la hiérarchie des *points de grille* est stable par addition et par produit, mais non par division.

Remarque (Les opérations sur les grains). Dans la lecture (b), les opérations sur les mesures inférieures sont les opérations des réels eux-mêmes ; seule l'épaisseur des grains se transforme. Par exemple, $3\cdot g_\nu(\frac{1}{3}) = [\,1,\ 1{+}3\cdot 2^{-\nu}[$ a pour mesure inférieure exactement 1, et son épaisseur est celle de trois grains de niveau ν. Après promotion, lorsqu'on identifie les grains infiniment proches, on retrouve le corps $\mathbb{R}$.

Remarque (Les opérations permises sur 2^ν). On part du continu, et $\nu = \#\mathbb{N}$ est un nombre illimité. On n'utilise de 2^ν que l'ordre et les changements de niveau : comparer, multiplier par une puissance de 2, comme dans $2^\nu \cdot 2^\nu = 2^{2\nu}$. On n'utilise pas sa divisibilité ni sa parité, qui traiteraient 2^ν comme un entier achevé. C'est pourquoi le grain de $\frac{1}{3}$ est désigné par le réel, et que son calcul passe par la division posée, chiffre par chiffre, dont seul le reste final intervient.

Remarque (Lien avec la voie par le cardinal). Pour obtenir un corps au niveau des points, il faut adjoindre toutes les fractions de $\mathcal{M}$; on obtient alors le corps des rationnels de $\mathcal{M}$, qui est un corps ordonné non archimédien. Si le modèle $\mathcal{M}$ est dénombrable, ce que le théorème de Skolem permet, le corps des rationnels de $\mathcal{M}$ est dénombrable lui aussi, et il est pourtant non archimédien. Le grain n'exige donc pas $2^{2^{\aleph_0}}$ points : la voie par le cardinal donne une condition suffisante, la voie par la non-idempotence montre que le grain est déjà présent, de façon constructive, dès qu'on dispose d'un entier infini.

9 Grain et monade

Définition 24. Pour $x \in \mathbb{G}_\nu$, la *monade* de x au niveau 2ν est l'ensemble des points de $\mathbb{G}_{2\nu}$ infiniment proches de x :

$$\mu_{2\nu}(x) = \{y \in \mathbb{G}_{2\nu} : y \simeq x\}.$$

Proposition 25. *Pour tout $x \in \mathbb{G}_\nu$, on a*

$$\Gamma(x) \subsetneq \mu_{2\nu}(x).$$

Démonstration. L'inclusion est le point (iii) du théorème 13. Elle est stricte : si $x < \frac{1}{2}$, le point $x + 2^{-\nu}$ appartient à $\mathbb{G}_{2\nu}$, il est infiniment proche de x par le lemme 5, et il n'est pas dans $\Gamma(x)$, qui s'arrête strictement avant lui. Si $x \geq \frac{1}{2}$, le point $x - 2^{-2\nu}$ convient de même : il est dans $\mathbb{G}_{2\nu}$, infiniment proche de x, et strictement inférieur à x, donc hors de $\Gamma(x)$. □

La monade contient bien davantage que le grain : elle contient les grains voisins $\Gamma(x \pm j\, 2^{-\nu})$ pour tout j standard, et même pour tout $j \leq \nu$ (lemme 5), ainsi que les points situés à gauche de x. Le grain est la part de la monade qui est attribuée à x par la mesure inférieure : c'est un découpage exact et sans recouvrement, alors que les monades de deux points voisins coïncident.

	Grain $\Gamma(x)$	Monade $\mu_{2\nu}(x)$
définition	intervalle $[x, x + 2^{-\nu}[$	points infiniment proches de x
nombre de points	exactement 2^ν	non défini dans $\mathcal{M}$
position de x	mesure inférieure	intérieur
grains de points voisins	disjoints	monades confondues

Le nombre de points de la monade n'est pas défini dans $\mathcal{M}$: la propriété « être infiniment proche de x » fait intervenir tous les entiers standard, et ne s'écrit pas par une formule de l'arithmétique. C'est la même raison qui interdit de raisonner par récurrence sur elle, comme on l'a vu à propos du paradoxe du tas. Le grain, lui, est défini par une formule, et son nombre de points se calcule exactement.

Conclusion

La thèse « le point absolu est un grain » admet une démonstration constructive. Il suffit d'un entier infini ν et de la non-idempotence de l'arithmétique de Peano. Au niveau d'observation ν, le segment $[0, 1[$ est décrit par 2^ν points ; au niveau 2ν, par $2^{2\nu}$. Chaque point du premier niveau y devient la mesure inférieure d'un grain de 2^ν points, tous infiniment proches de lui. La longueur se conserve, les grains se divisent, et la division se poursuit sans fin le long de la hiérarchie $\nu, 2\nu, 3\nu, \ldots$, que l'auto-similarité parcourt pas à pas et que le produit parcourt par sommes de niveaux. Les écritures y sont exactes et uniques ; la double écriture des dyadiques n'apparaît qu'à l'échelle standard, comme la trace de deux grains voisins confondus en un point.

La voie par le cardinal montrait que le grain est inévitable au-delà de $2^{\aleph_0}$ points. La voie par la non-idempotence montre comment il est fait.

Références

[1] Aristote, *Physique*, livre VI.

[2] H. Genvrin, *Ensemble infini, continu et premiers*, 2026.

[3] H. Genvrin, *Que le point absolu est un grain*, 2026.

[4] H. Genvrin, *Partie propre et partie partielle chez les entiers*, 2026.

[5] H. Genvrin, *Théorie du grain*, 2026.

[6] O. Hölder, « Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Mass », 1901.

[7] R. Kaye, *Models of Peano Arithmetic*, Oxford University Press, 1991.

[8] G. Peano, *Arithmetices principia, nova methodo exposita*, Turin, 1889.

[9] A. Robinson, *Non-standard Analysis*, North-Holland, 1966.

[10] Th. Skolem, « Über die Nicht-charakterisierbarkeit der Zahlenreihe mittels endlich oder abzählbar unendlich vieler Aussagen mit ausschliesslich Zahlenvariablen », *Fundamenta Mathematicae* 23, 1934.