

La stratification du halo de zéro

Relativité fini/infini du zéro selon le grain d'observation

Hugues Genyvin

10 septembre 2026

Préambule

Cette note étend au *halo de zéro* la relativité stratale des grandeurs (« 1 cm = 1 m selon le grain d'observation »). De même qu'une grandeur est finie ou infinie relativement à la finesse du niveau, les infinitésimaux du halo de 0 sont *visibles* ou *invisibles* selon la résolution : le zéro possède une structure interne stratifiée. Tout se déroule dans le cadre de l'analyse non standard (ZFC) ; on ne quitte aucun axiome.

Rappel. $\mathfrak{m} = \{X \in \widetilde{\mathbb{R}}_{\text{fin}} : \forall c \in \mathbb{R}_{>0} \text{ standard, } |X| < c\}$ est l'idéal des infinitésimaux (halo de 0), de partie standard nulle.

1 La filtration du halo

Définition 1 (Strates du halo). *Pour tout entier $k \geq 1$, on pose*

$$\mathfrak{m}_k := \{X \in \widetilde{\mathbb{R}} : |X| \leq 2^{-kn_\infty}\}.$$

$\mathfrak{m}_k$ est l'ensemble des infinitésimaux au moins aussi fins que 2^{-kn_∞} (finesse du niveau $\mathcal{G}_{-kn_\infty}$).

Proposition 1 (Filtration décroissante). *Les strates forment une chaîne décroissante emboîtée :*

$$\mathfrak{m} \supset \mathfrak{m}_1 \supset \mathfrak{m}_2 \supset \mathfrak{m}_3 \supset \cdots, \quad \bigcap_{k \geq 1} \mathfrak{m}_k = \{0\}.$$

Démonstration. Emboîtement : si $|X| \leq 2^{-(k+1)n_\infty}$ alors $|X| \leq 2^{-kn_\infty}$ (car $2^{-(k+1)n_\infty} < 2^{-kn_\infty}$), donc $\mathfrak{m}_{k+1} \subset \mathfrak{m}_k$. Et $\mathfrak{m}_1 \subset \mathfrak{m}$ car 2^{-n_∞} est infinitésimal. Intersection : si $X \in \mathfrak{m}_k$ pour tout k , alors $|X| \leq 2^{-kn_\infty}$ pour tout k , donc $|X|$ est plus petit que toute puissance 2^{-kn_∞} ; le seul élément vérifiant cela est $X = 0$. $\square$

Remarque 1 (Une valuation stratale). *La filtration mesure l'ordre de finesse d'un infinitésimal : X est « d'ordre k » s'il appartient à $\mathfrak{m}_k$ sans appartenir à $\mathfrak{m}_{k+1}$. C'est l'outil qui donne un sens rigoureux aux comparaisons du type $\eta \sim 2^{-4n_\infty} \ll 2^{-2n_\infty}$ (quadrature) : η est d'ordre plus élevé que la finesse 2^{-2n_∞} du grain, donc enfoui plus profond dans le halo.*

2 Zéro-fini et zéro-infini, relatifs au niveau

Définition 2 (Statut relatif d'un infinitésimal). *Soit $X \in \mathfrak{m}$ un infinitésimal et $k \geq 1$ un niveau d'observation. On dit que X est :*

- **zéro-fini au niveau k** si $X \notin \mathfrak{m}_k$, i.e. $2^{-kn_\infty} < |X|$: X est visible à la résolution $\mathcal{G}_{-kn_\infty}$ (non négligeable à ce niveau, bien qu'infinitésimal) ;
- **zéro-infini au niveau k** si $X \in \mathfrak{m}_k$, i.e. $|X| \leq 2^{-kn_\infty}$: X est invisible à la résolution $\mathcal{G}_{-kn_\infty}$ (écrasé sur 0 à ce niveau).

Proposition 2 (Relativité du statut). *Le statut d'un infinitésimal $X \neq 0$ dépend du niveau : il existe des niveaux où X est zéro-fini et des niveaux où il est zéro-infini. Plus précisément, si X est d'ordre k_0 (i.e. $X \in \mathfrak{m}_{k_0} \setminus \mathfrak{m}_{k_0+1}$), alors X est zéro-infini aux niveaux $k \leq k_0$ et zéro-fini aux niveaux $k > k_0$.*

Démonstration. Si $k \leq k_0$: $X \in \mathfrak{m}_{k_0} \subset \mathfrak{m}_k$, donc X est zéro-infini au niveau k . Si $k > k_0$: $X \notin \mathfrak{m}_{k_0+1} \supset \mathfrak{m}_k$, donc $X \notin \mathfrak{m}_k$, i.e. X est zéro-fini au niveau k . $\square$

Remarque 2 (La relativité stratale appliquée au zéro). *C'est l'analogue exact de « 1 cm = 1 m selon le grain » : un même infinitésimal est visible (zéro-fini) à une résolution fine et invisible (zéro-infini) à une résolution grossière. Le statut fini/infini n'est pas absolu ; il est relatif au grain d'observation.*

3 Le vrai zéro et les quasi-zéros

Proposition 3 (Le zéro absolu). *Le seul infinitésimal qui est zéro-infini à tous les niveaux est 0 lui-même :*

$$X \text{ zéro-infini à tout niveau } k \iff X \in \bigcap_k \mathfrak{m}_k \iff X = 0.$$

Tout infinitésimal $X \neq 0$ devient zéro-fini à un niveau assez profond.

Démonstration. Conséquence directe de $\bigcap_k \mathfrak{m}_k = \{0\}$ (Proposition 1) et de la Proposition 2. $\square$

Remarque 3 (Distinction essentielle). *Il faut distinguer :*

- le vrai zéro 0 : nul à toute résolution, zéro-infini absolu, cœur du halo ;
- les quasi-zéros (infinitésimaux $\neq 0$) : de statut relatif, zéro-infini aux niveaux grossiers, zéro-fini aux niveaux fins.

La relativité porte sur les quasi-zéros (le halo), jamais sur le point 0 (toujours nul). C'est la vigilance « infinitésimal $\neq$ zéro » appliquée à la stratification : le halo se raffine, le zéro central reste zéro.

4 Lien avec l'anomalie cartésienne

Proposition 4 (Le grain-origine comme strate du halo). *Le grain-origine de l'anomalie cartésienne, boule d'épaisseur 2^{-kn_∞} à la résolution $\mathcal{G}_{-kn_\infty}$, coïncide avec la strate $\mathfrak{m}_k$ (vue géométriquement). Descendre vers un « zéro plus fin » ($k \rightarrow k+1$) correspond au passage $\mathfrak{m}_k \rightarrow \mathfrak{m}_{k+1}$: le grain se décompose en sous-grains, emboîtés selon la filtration.*

Remarque 4 (Structure emboîtée du zéro). *Le zéro n'est donc pas un point sans structure, mais le sommet d'une tour de strates emboîtées $\mathfrak{m} \supset \mathfrak{m}_1 \supset \dots$, chacune contenant la suivante. À chaque résolution, le grain-origine révèle une sous-structure plus fine ; la promotion (st) écrase toute la tour sur le point 0. Le zéro observé est une classe de grains de finesse relative, conformément à la relativité stratale.*

5 Relativité des grandeurs

Dans le cadre stratal, le statut fini/infini d'une grandeur, et le statut zéro-fini/zéro-infini d'un infinitésimal, sont relatifs au niveau de grain choisi. Un même objet mathématique change de statut selon la résolution. Le zéro (le halo) est stratifié : chaque infinitésimal non nul est visible ou invisible selon le niveau.

On peut spéculer que la structure stratale offre une image de la relativité des échelles : de

même qu'un infinitésimal est « nul » vu de loin et « structuré » vu de près, on peut imaginer que toute échelle d'observation est relative. Ceci est une suggestion philosophique, non un résultat : la construction stratale ne détermine aucun « niveau de référence » physique, et l'identification du monde à un zéro stratal reste une image, non une conséquence.

6 Synthèse

- Le halo de 0 porte une *filtration décroissante* $\mathfrak{m} \supset \mathfrak{m}_1 \supset \mathfrak{m}_2 \supset \dots$, d'intersection $\{0\}$ (Proposition 1).
- Un infinitésimal est *zéro-fini* (visible) ou *zéro-infini* (invisible) *relativement* au niveau d'observation (Définition 2, Proposition 2).
- Seul le vrai zéro est zéro-infini à tous les niveaux ; les quasi-zéros ont un statut relatif (Proposition 3).
- Le grain-origine (anomalie cartésienne) est la strate $\mathfrak{m}_k$; le zéro est une tour de strates emboîtées, écrasée sur $\{0\}$ par promotion (Proposition 4).

Portée. Cette stratification est entièrement interne à l'analyse non standard (ZFC) : elle raffine le halo de 0 sans postuler aucun objet nouveau ni quitter aucun axiome. Elle étend au zéro la relativité stratale déjà établie pour les grandeurs, et donne un cadre rigoureux aux ordres d'infinitésimaux ($\eta \sim 2^{-4n_\infty}$, etc.).