

La chute libre : une interprétation physique de la théorie du grain

Hugues Genvrin

Septembre 2026

Résumé

L'infini actuel du continu repose, chez Cantor et Hilbert, sur des bases axiomatiques. Il est tentant de lui donner un appui expérimental : un corps en chute libre semble parcourir tous les points de sa trajectoire. Nous montrons d'abord qu'une telle expérience ne peut pas établir la puissance du continu, car le continu est présupposé par le modèle qui décrit la trajectoire, et qu'une grille hyperfinie de grains infinitésimaux est observationnellement indiscernable du continu. Ce constat, loin d'affaiblir la théorie du grain, la rend physiquement admissible. Nous montrons ensuite que la chute libre réalise exactement la stratification fonctionnelle : un temps découpé en grains uniformes produit un espace dont le m -ième grain est la réunion de $2m + 1$ grains de la grille fine, ce qui est la loi des nombres impairs de Galilée. Cette loi est invariante par changement de résolution et compatible avec le raffinement de la tour ; il s'agit d'une invariance d'échelle globale, héritée de l'homogénéité de la loi de chute, et non d'une invariance de jauge au sens de Weyl. La vitesse apparaît comme facteur de stratification, et le rapport des comptages homogènes comme vitesse moyenne. L'expérience historique de Galilée, la bille sur le plan incliné, relève du même théorème, quelle que soit l'inclinaison : le plan incliné réalise physiquement la dilatation du temps qui laisse la loi invariante. La trajectoire continue classique est la promotion de cette grille stratifiée.

1 Introduction

L'infini actuel, admis par Cantor [8] et défendu par Hilbert [9], est un infini achevé, donné comme totalité. Il s'oppose à l'infini potentiel d'Aristote [5], qui n'est jamais qu'un processus toujours prolongeable. Dans les mathématiques contemporaines, l'infini actuel est posé par les axiomes de la théorie des ensembles, en particulier par l'axiome de l'infini.

Il est naturel de chercher à rattacher ce continu à l'expérience. Considérons un corps matériel en chute libre, qui passe de la position 0 à la position 1. On est tenté de dire que, la chute achevée, le corps a parcouru *tous* les points de $[0, 1]$, y compris ceux qui ne sont pas constructibles, et que la trajectoire parcourue est donc un infini actuel ayant la puissance du continu.

Nous examinons ce que cet argument établit réellement. Nos conclusions sont les suivantes :

1. l'expérience ne peut pas prouver la puissance du continu (section 3) ;
2. elle ne peut pas non plus distinguer le continu d'une grille hyperfinie de grains infinitésimaux, ce qui rend la théorie du grain physiquement admissible (section 4) ;
3. la chute libre réalise exactement la stratification fonctionnelle, et retrouve la loi des nombres impairs de Galilée (section 5) ;
4. l'expérience historique de Galilée, la bille sur le plan incliné, relève exactement du même théorème, quelle que soit l'inclinaison (section 6) ;

5. la trajectoire continue est la promotion de la grille stratifiée, et la vitesse y apparaît comme facteur de stratification (section 7).

2 Rappels

Soit n_∞ un hyperentier, $k \geq 1$ un entier, et $\varepsilon = 2^{-kn_\infty}$. La grille de résolution $-kn_\infty$ découpe $[0, 1[$ en 2^{kn_∞} grains $[m\varepsilon, (m+1)\varepsilon[$, d'épaisseur infinitésimale ; leurs extrémités $m\varepsilon$ sont les *jonctions*, qui sont des hyperrationnels dyadiques [1]. La *promotion* $\tilde{\mathbb{R}}_{\text{fin}}/\mathfrak{m} = \mathbb{R}$ est réalisée par la partie standard st .

Théorème 1 (Stratification fonctionnelle, [1, th. 62]). *Une fonction dérivable f envoie l'intervalle uniforme $[x, x + dx]$ de son axe de départ sur l'intervalle $[f(x), f(x) + f'(x) dx]$ de son axe d'arrivée : elle agit sur l'axe d'arrivée comme un facteur de stratification local $|f'(x)|$.*

Dans l'article sur la réflexivité [2], ce facteur était constant ($f(x) = ax$). La chute libre en fournit l'exemple physique le plus simple où il varie.

3 Ce que l'expérience ne peut pas établir

3.1 Un argument circulaire

L'affirmation « le corps a parcouru tous les points de $[0, 1]$ » n'est pas le résultat d'une observation. C'est une conséquence du *modèle* qui décrit la position par une fonction continue $x: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$: par le théorème des valeurs intermédiaires, une telle fonction prend toutes les valeurs entre $x(0)$ et $x(T)$. Le continu est donc supposé dans la description de la trajectoire ; il n'est pas démontré par elle.

3.2 La précision finie des mesures

Toute mesure physique a une précision finie. Une expérience de chute libre fournit un nombre fini de couples (instant, position), chacun connu à une incertitude près. Elle ne peut donc pas attester le passage du corps par un point déterminé, a fortiori par un point non constructible. La question de savoir si l'espace physique reste un continu à toutes les échelles, notamment en deçà de l'échelle de Planck, est ouverte ; l'expérience ne la tranche ni dans un sens ni dans l'autre.

3.3 Le paradoxe de Zénon

L'argument reprend, en sens inverse, le paradoxe de la dichotomie de Zénon : pour aller de 0 à 1, le mobile doit d'abord atteindre $1/2$, puis $3/4$, et ainsi de suite. Aristote y répondait par la distinction entre infini potentiel et infini actuel [5]. Le fait que le mobile arrive effectivement en 1 montre que la chute s'achève ; il ne montre pas que les étapes intermédiaires forment une totalité actuelle de cardinal $2^{\aleph_0}$.

3.4 Peano et l'hypothèse du continu

Remarque 2 (Les entiers de la grille). La suite des grains d'une grille est indexée par

$$\{0, 1, \dots, 2^{kn_\infty} - 1\}.$$

Elle possède un dernier élément, qui n'a pas de successeur dans la grille : l'axiome « tout entier a un successeur » y est faux. La grille modélise un segment initial hyperfini des hyperentiers,

non $\mathbb{N}$ tout entier ; les axiomes de Peano valent dans les hyperentiers par transfert, et non dans la grille. De plus, l'axiome de récurrence porte sur une infinité de propriétés, et aucune expérience finie ne peut le vérifier.

Remarque 3 (L'hypothèse du continu). L'hypothèse du continu affirme qu'il n'existe pas de cardinal strictement compris entre $\aleph_0$ et $2^{\aleph_0}$. Gödel [10] et Cohen [11] ont montré qu'elle est indépendante de ZFC, comme le postulat des parallèles est indépendant des autres axiomes d'Euclide. L'analogie est donc juste, mais l'hypothèse du continu relève de la théorie des ensembles et non de l'arithmétique de Peano. Étant indépendante, elle ne peut être décidée ni par une expérience, ni par un cadre qui ne lui ajoute pas d'axiome.

4 Continu et grille : une indiscernabilité

Ce qui précède n'affaiblit pas la théorie du grain ; au contraire.

Hypothèse 4 (Observations). Une observation est une mesure de position faite à un instant standard, avec une précision standard $\delta > 0$.

Soit $x: [0, T] \rightarrow [0, 1]$ une trajectoire continue standard. On découpe l'intervalle de temps en 2^{kn_∞} grains d'épaisseur $T\varepsilon$, d'instant $t_m = mT\varepsilon$, et on appelle *trajectoire de grille* la suite $x_m = x(t_m)$, $0 \leq m \leq 2^{kn_\infty}$.

Proposition 5 (Indiscernabilité). *Pour tout instant standard $t \in [0, T]$, si t_m est la jonction temporelle la plus proche de t , alors $\text{st}(x_m) = x(t)$. Aucune observation au sens de l'hypothèse 4 ne distingue la trajectoire continue de la trajectoire de grille.*

Démonstration. On a $|t_m - t| \leq T\varepsilon$, qui est infinitésimal. Par continuité de x en t (et transfert), $x_m - x(t)$ est infinitésimal, donc $\text{st}(x_m) = x(t)$. Une mesure de précision standard δ ne peut pas séparer deux valeurs dont l'écart est infinitésimal, puisque cet écart est inférieur à δ . $\square$

L'expérience ne prouve donc pas le continu cantorien : elle montre que le continu et la grille hyperfinie rendent compte des mêmes observations. Ce n'est pas une preuve d'infini actuel, mais c'est un argument de *cohérence physique* pour la théorie du grain.

5 La chute libre comme stratification

5.1 Normalisation

La chute libre sans vitesse initiale suit la loi $x(t) = \frac{1}{2}gt^2$. Si la chute dure T et parcourt la hauteur L , on pose $\tau = t/T$ et $X = x/L$; comme $L = \frac{1}{2}gT^2$, on obtient la loi normalisée

$$X(\tau) = \tau^2, \quad \tau \in [0, 1].$$

5.2 Grains de temps, grains d'espace

Découpons le temps en grains uniformes de la grille de résolution $-kn_\infty$:

$$\tau_m = m\varepsilon, \quad 0 \leq m \leq 2^{kn_\infty}.$$

Pendant le m -ième grain de temps $[\tau_m, \tau_{m+1}[$, le corps parcourt le grain d'espace

$$G_m = [\tau_m^2, \tau_{m+1}^2[= [m^2\varepsilon^2, (m+1)^2\varepsilon^2[.$$

Théorème 6 (Loi des nombres impairs). 1. Les extrémités des grains d'espace G_m sont des jonctions de la grille homogène de résolution $-2kn_\infty$, de pas ε^2 .

2. Le grain d'espace G_m est la réunion d'exactly $2m + 1$ grains consécutifs de cette grille fine.

3. Les M premiers grains de temps couvrent exactement M^2 grains de la grille fine :

$$\sum_{m=0}^{M-1} (2m + 1) = M^2.$$

Démonstration. 1. $m^2 \varepsilon^2 = m^2 2^{-2kn_\infty}$ est une jonction de résolution $-2kn_\infty$. 2. L'épaisseur de G_m est $((m+1)^2 - m^2) \varepsilon^2 = (2m+1) \varepsilon^2$. 3. La somme télescopique vaut M^2 , ce que l'on vérifie aussi directement : $\bigcup_{m < M} G_m = [0, M^2 \varepsilon^2[$. $\square$

C'est exactement la loi découverte par Galilée [6] : les distances parcourues pendant des intervalles de temps égaux successifs sont entre elles comme les nombres impairs $1, 3, 5, 7, \dots$. Dans la théorie du grain, cette loi n'est pas une approximation : elle est exacte au niveau des grains, et elle s'exprime par un comptage d'entiers (hyperentiers).

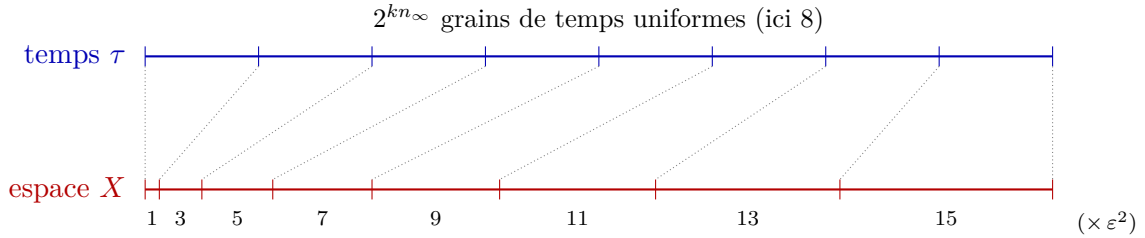


FIGURE 1 – Des grains de temps uniformes produisent des grains d'espace stratifiés. Le m -ième grain d'espace contient $2m + 1$ grains de la grille fine de pas ε^2 : c'est la loi des nombres impairs de Galilée.

5.3 Invariance d'échelle

Le théorème 6 a été énoncé à la résolution $-kn_\infty$. Sa démonstration n'utilise que la forme $\tau_m = m 2^{-N}$ des jonctions ; elle vaut donc à toute résolution $-N$, N entier ou hyperentier. Plus précisément, la loi est compatible avec le raffinement de la tour des résolutions.

Proposition 7 (Compatibilité avec le raffinement). Soit N un entier ou un hyperentier. À la résolution $-N$, le m -ième grain d'espace G_m^N contient $2m + 1$ grains de la grille de résolution $-2N$. Lorsque l'on passe à la résolution $-(N + 1)$:

1. le grain de temps m se coupe en deux grains de temps, d'indices $2m$ et $2m + 1$;
2. les grains d'espace correspondants G_{2m}^{N+1} et G_{2m+1}^{N+1} contiennent respectivement $4m + 1$ et $4m + 3$ grains de la grille de résolution $-(2N + 2)$;
3. leur réunion est G_m^N , et

$$(4m + 1) + (4m + 3) = 4(2m + 1),$$

ce qui est bien le nombre de grains de résolution $-(2N + 2)$ contenus dans les $2m + 1$ grains de résolution $-2N$ de G_m^N .

Démonstration. Les grains de temps de résolution $-(N + 1)$ contenus dans $[m 2^{-N}, (m + 1) 2^{-N}[$ sont ceux d'indices $2m$ et $2m + 1$. Par le théorème 6 appliqué à la résolution $-(N + 1)$,

ils produisent des grains d'espace de $2(2m) + 1 = 4m + 1$ et $2(2m + 1) + 1 = 4m + 3$ grains fins. Leur réunion est $[(2m)^2 2^{-2N-2}, (2m + 2)^2 2^{-2N-2}[= [m^2 2^{-2N}, (m + 1)^2 2^{-2N}[= G_m^N$. Enfin, chaque grain de résolution $-2N$ contient $2^2 = 4$ grains de résolution $-(2N + 2)$. $\square$

La loi des nombres impairs à une résolution se déduit donc exactement de la loi à la résolution suivante : toute la tour est cohérente. Cette cohérence a une raison géométrique.

Proposition 8 (Invariance par dilatation). *La parabole $X = \tau^2$ est invariante par les dilatations anisotropes*

$$D_\lambda: (\tau, X) \mapsto (\lambda\tau, \lambda^2 X), \quad \lambda > 0.$$

Pour $\lambda = 2^{-j}$, D_λ envoie la jonction temporelle $m 2^{-N}$ sur la jonction $m 2^{-(N+j)}$, et la jonction spatiale $m^2 2^{-2N}$ sur la jonction $m^2 2^{-2(N+j)}$: elle envoie la grille de la chute à la résolution $-N$ sur les 2^N premiers grains de la grille de la chute à la résolution $-(N + j)$, en respectant la loi des nombres impairs.

Démonstration. Si $X = \tau^2$, alors $\lambda^2 X = (\lambda\tau)^2$. Les images des jonctions se calculent directement. $\square$

Le temps a le poids 1 et l'espace le poids 2 : c'est pourquoi la grille d'espace est à la résolution $-2N$ quand la grille de temps est à la résolution $-N$. En unités physiques, la transformation $(t, x) \mapsto (\lambda t, \lambda^2 x)$ laisse invariante la loi $x = \frac{1}{2}gt^2$ à g fixé.

Remarque 9 (Invariance d'échelle, et non invariance de jauge). Les propositions 7 et 8 établissent une invariance d'échelle *globale* : on change de résolution partout à la fois. Dans la théorie de Weyl [12], l'invariance de jauge (*Eichinvarianz*) désigne au contraire un changement d'échelle *local*, $g \mapsto e^{2\lambda(x)}g$, où l'unité de longueur est choisie indépendamment en chaque point, la cohérence étant assurée par une connexion. Parler de jauge supposerait ici de choisir une résolution différente dans chaque région du temps et d'exhiber une règle de raccordement qui préserve la loi ; rien de tel n'est construit.

On peut toutefois noter une analogie. L'épaisseur $v(\tau)\varepsilon$ des grains d'espace (proposition 13) varie d'un point à l'autre : la vitesse joue le rôle d'un facteur d'échelle local, comparable au facteur conforme de Weyl. Mais c'est une transformation produite par le mouvement, et non une invariance.

5.4 Les lois de puissance

L'invariance d'échelle ne tient pas à la théorie du grain, mais à l'homogénéité de la loi du mouvement. Elle vaut pour toute loi de puissance.

Proposition 10 (Lois de puissance). *Soit $p \geq 1$ un entier et $X(\tau) = \tau^p$. À la résolution $-N$:*

1. *les extrémités des grains d'espace $G_m^N = [m^p 2^{-pN}, (m + 1)^p 2^{-pN}[$ sont des jonctions de la grille de résolution $-pN$;*
2. *le grain G_m^N contient exactement $(m + 1)^p - m^p$ grains de cette grille ;*
3. *la loi est compatible avec le raffinement :*

$$[(2m + 1)^p - (2m)^p] + [(2m + 2)^p - (2m + 1)^p] = 2^p [(m + 1)^p - m^p],$$

et elle est invariante par les dilatations $(\tau, X) \mapsto (\lambda\tau, \lambda^p X)$.

Démonstration. Même démonstration que pour $p = 2$; la somme télescopique vaut $(2m + 2)^p - (2m)^p = 2^p((m + 1)^p - m^p)$, et chaque grain de résolution $-pN$ contient 2^p grains de résolution $-p(N + 1)$. $\square$

Exemple 11. Pour $p = 3$, le m -ième grain d'espace contient $3m^2 + 3m + 1$ grains fins : 1, 7, 19, 37, 61, ..., à toutes les échelles. Pour $p = 1$ (mouvement uniforme), chaque grain d'espace contient exactement un grain fin : il n'y a pas de stratification.

Remarque 12. Une chute avec frottement suit une loi qui n'est pas homogène : pour un frottement quadratique, $x(t)$ fait intervenir $\ln \cosh(t/t_c)$, où t_c est un temps caractéristique. Les dilatations ne laissent plus la loi invariante, les extrémités des grains d'espace ne sont plus, en général, des jonctions d'une grille homogène, et la loi de comptage perd son invariance d'échelle. La théorie du grain rend l'invariance d'échelle de la chute libre *exacte et combinatoire*, parce qu'elle s'exprime par un comptage d'hyperentiers ; mais elle ne la crée pas : elle en hérite.

5.5 La vitesse comme facteur de stratification

Proposition 13 (Épaisseur des grains d'espace). *L'épaisseur du grain G_m s'écrit*

$$(2m + 1)\varepsilon^2 = v(\tau_m)\varepsilon + \varepsilon^2, \quad \text{où } v(\tau) = X'(\tau) = 2\tau.$$

Au premier ordre en ε , c'est l'épaisseur $|X'(\tau_m)|\varepsilon$ prévue par le théorème 1 : la vitesse est le facteur de stratification.

Démonstration. $(2m + 1)\varepsilon^2 = 2(m\varepsilon)\varepsilon + \varepsilon^2 = 2\tau_m\varepsilon + \varepsilon^2$. □

Remarque 14 (Un grain doublement infinitésimal). Le premier grain d'espace $G_0 = [0, \varepsilon^2[$ a une épaisseur ε^2 , infiniment petite devant l'épaisseur ε des grains de temps : au départ, la vitesse est nulle et le corps se déplace à peine. Le dernier grain a une épaisseur $(2^{kn_\infty+1} - 1)\varepsilon^2 \approx 2\varepsilon$. Le rapport entre le dernier et le premier grain d'espace, $2^{kn_\infty+1} - 1$, est illimité : sur l'axe des positions, la chute libre produit des grains dont l'épaisseur s'étend de ε^2 à environ 2ε , c'est-à-dire sur deux ordres infinitésimaux distincts.

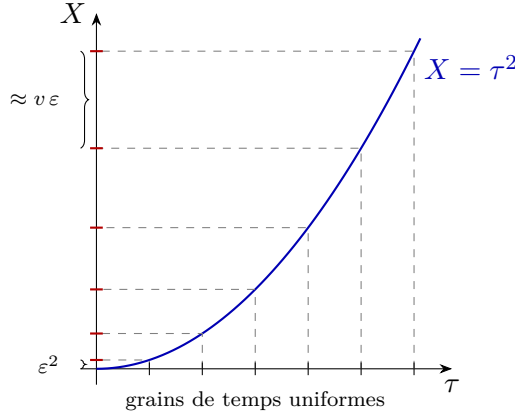


FIGURE 2 – Stratification par la parabole de la chute : des graduations uniformes sur l'axe du temps deviennent, sur l'axe des positions, des grains d'épaisseur croissante, proportionnelle à la vitesse.

5.6 Le comptage homogène mesure la vitesse moyenne

Comparons, comme dans l'article sur la réflexivité, le nombre de grains de temps et le nombre de grains d'espace homogènes, à la même résolution $-kn_\infty$.

Proposition 15 (Vitesse moyenne). *Soit $[a, b] \subset [0, 1]$ un intervalle standard de positions, avec $a < b$. Notons N_X le nombre de grains homogènes de résolution $-kn_\infty$ contenus dans $[a, b]$, et N_τ le nombre de grains de temps pendant lesquels le corps parcourt $[a, b]$. Alors*

$$\text{st}\left(\frac{N_X}{N_\tau}\right) = \frac{b - a}{\sqrt{b} - \sqrt{a}},$$

qui est la vitesse moyenne du corps sur $[a, b]$.

Démonstration. On a $N_X = (b - a) 2^{kn_\infty}$ à un grain près. Le corps est dans $[a, b]$ pendant l'intervalle de temps $[\sqrt{a}, \sqrt{b}]$, qui contient $(\sqrt{b} - \sqrt{a}) 2^{kn_\infty}$ grains de temps à un grain près. Les erreurs d'un grain sont négligeables devant ces nombres illimités, d'où la limite standard du rapport. Enfin, la vitesse moyenne est la distance parcourue $b - a$ divisée par la durée $\sqrt{b} - \sqrt{a}$. $\square$

Remarque 16. Au début de la chute ($a = 0$, b petit), le rapport vaut $\sqrt{b}$, qui tend vers 0 : le corps passe beaucoup de grains de temps dans peu de grains d'espace. Dans l'article sur la réflexivité [2], le rapport des comptages était la constante $1/a$; il devient ici une vitesse moyenne variable. Sur toute la chute, $\text{st}(N_X/N_\tau) = 1$, ce qui est $\int_0^1 X'(\tau) d\tau = X(1) - X(0)$: le comptage homogène global fait intervenir l'intégrale de $|f'|$, comme le suggérait l'une des questions ouvertes de [2].

6 L'expérience de Galilée : la bille sur le plan incliné

6.1 L'expérience

Galilée n'a pas établi la loi des nombres impairs par l'observation directe de la chute libre, trop rapide pour les moyens de mesure de son époque. Dans la troisième journée des *Discorsi* [6], il décrit une expérience de plan incliné : une bille de bronze roule dans une rainure polie, creusée dans une longue poutre de bois que l'on incline ; le temps est mesuré en pesant l'eau qui s'écoule d'un récipient pendant la descente. En répétant l'expérience pour différentes longueurs et différentes inclinaisons, il constate que les distances parcourues sont entre elles comme les carrés des temps. L'inclinaison « dilue » la pesanteur : elle ralentit le mouvement sans en changer la loi. L'expérience a été reproduite avec succès par Settle [7] avec des moyens comparables.

C'est donc l'expérience historique qui fonde la loi des nombres impairs. Nous montrons qu'elle relève exactement du même théorème de grains que la chute libre.

6.2 La dynamique

Pour un corps qui glisse sans frottement sur un plan d'inclinaison α , l'accélération le long du plan est $a = g \sin \alpha$. Pour une bille qui roule sans glisser, une partie de l'énergie passe dans la rotation, et

$$a = \frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{I}{m r^2}},$$

où m est la masse de la bille, I son moment d'inertie et r la distance du centre de la bille à l'axe instantané de rotation. Pour une sphère pleine roulant sur un plan, $I = \frac{2}{5} m r^2$ et $a = \frac{5}{7} g \sin \alpha$. Dans une rainure, la bille roule sur les deux bords, r est plus petit que le rayon de la bille, et l'accélération est encore plus faible. Dans tous les cas, a est une *constante*, et la distance parcourue le long du plan depuis le repos est

$$s(t) = \frac{1}{2} a t^2.$$

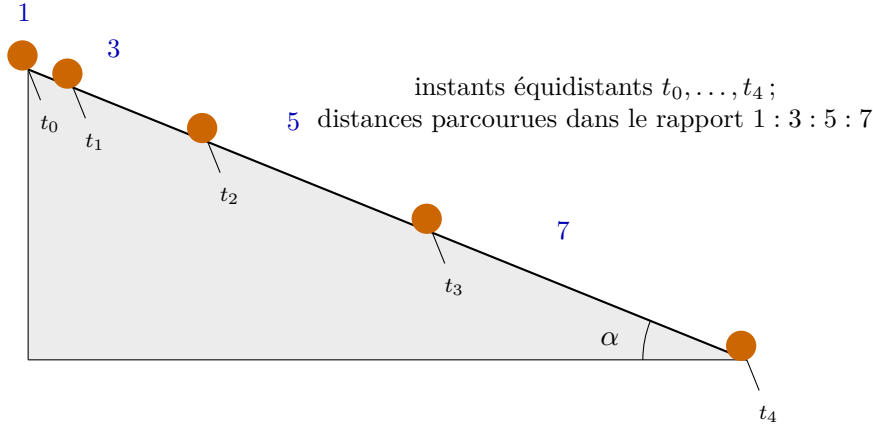


FIGURE 3 – L’expérience de Galilée : à des instants équidistants, les distances parcourues le long du plan successivement sont entre elles comme $1, 3, 5, 7, \dots$. La figure respecte ces proportions.

6.3 Le théorème de grains

Proposition 17 (Indépendance vis-à-vis de l’inclinaison). *Soit une bille lâchée sans vitesse sur un plan incliné, parcourant la longueur L en un temps $T = \sqrt{2L/a}$. Avec $\tau = t/T$ et $S = s/L$, on a $S(\tau) = \tau^2$. En conséquence, la loi des nombres impairs (théorème 6), sa compatibilité avec le raffinement (proposition 7) et la proposition 13 valent à l’identique, quels que soient l’inclinaison α , la masse de la bille, son moment d’inertie et la forme de la rainure.*

Démonstration. $s(T) = L$ donne $T = \sqrt{2L/a}$, puis $S(\tau) = \frac{1}{2}aT^2\tau^2/L = \tau^2$. Les énoncés cités ne dépendent que de la loi normalisée. $\square$

Toutes les constantes physiques disparaissent dans la normalisation : elles ne fixent que la durée $T\varepsilon$ d’un grain de temps et la longueur $L\varepsilon^2$ d’un grain fin d’espace, et non la structure de la grille.

Remarque 18 (Le plan incliné réalise la dilatation). La loi $s = \frac{1}{2}at^2$ est invariante par la transformation $(t, a) \mapsto (\lambda t, a/\lambda^2)$. Incliner le plan, c’est remplacer g par $a = g \sin \alpha$ (au facteur de roulement près), donc dilater le temps par $\lambda = 1/\sqrt{\sin \alpha}$ à longueur fixée. La « dilution » de la pesanteur par Galilée est ainsi une réalisation physique de l’invariance d’échelle de la section 5.3 : elle ralentit la chute, c’est-à-dire qu’elle allonge chaque grain de temps, sans changer la loi des nombres impairs.

Corollaire 19 (Quatre grilles simultanées). *Pour la bille qui roule, les quatre grandeurs suivantes sont proportionnelles à t^2 :*

1. la distance s parcourue le long du plan ;
2. le déplacement horizontal $s \cos \alpha$;
3. la descente verticale $s \sin \alpha$;
4. l’angle de rotation $\varphi = s/r$ de la bille.

Chacune, normalisée par sa valeur finale, vaut τ^2 . Une même grille de temps uniforme produit donc simultanément quatre grilles stratifiées, dont le m -ième grain contient, dans chacune, $2m + 1$ grains fins.

Démonstration. Les quatre grandeurs sont des multiples constants de s ; on applique la proposition 17 à chacune. $\square$

6.4 Ce que l'expérience vérifie, et ce que le grain prolonge

L'expérience de Galilée découpe le temps en un petit nombre d'intervalles égaux et vérifie la loi des nombres impairs à cette résolution. Dans le langage du grain, elle la vérifie aux résolutions *standard* $-N$, avec N petit, et à la précision finie des mesures.

Remarque 20 (Portée expérimentale). L'expérience ne prouve pas que la loi vaut aux résolutions illimitées $-kn_\infty$, ce que l'on ne peut pas observer (section 3). Mais la théorie du grain fournit un modèle dans lequel la loi observée aux résolutions standard se prolonge de façon *cohérente*, par la proposition 7, à toutes les résolutions, jusqu'aux résolutions illimitées ; et dont la promotion redonne la loi continue $s = \frac{1}{2}at^2$ (théorème 21). C'est la forme honnête du lien entre l'expérience et le continu : l'expérience fixe la loi aux échelles accessibles, le grain la prolonge de façon cohérente, et la promotion en donne la forme continue.

7 La trajectoire continue comme promotion

Théorème 21 (Promotion de la chute). 1. Pour tout instant standard τ , si τ_m est la jonction temporelle la plus proche, $\text{st}(\tau_m^2) = \tau^2$: la promotion de la trajectoire de grille est la trajectoire continue $X = \tau^2$.

2. La vitesse est la promotion du taux de parcours d'un grain :

$$\text{st}\left(\frac{\tau_{m+1}^2 - \tau_m^2}{\varepsilon}\right) = \text{st}((2m+1)\varepsilon) = 2\tau = v(\tau).$$

Démonstration. 1. C'est la proposition 5 appliquée à $X(\tau) = \tau^2$. 2. $(2m+1)\varepsilon = 2\tau_m + \varepsilon$, dont la partie standard est $\text{st}(2\tau_m) = 2\tau$. $\square$

La trajectoire classique, avec son continu de positions, est ainsi la promotion d'une grille stratifiée, dont les grains d'espace s'épaississent comme la vitesse. Ce que la promotion efface, c'est l'épaisseur des grains ; ce qu'elle conserve, c'est leur rapport, qui devient la dérivée.

8 Conclusion

L'expérience de chute libre ne prouve pas l'infini actuel du continu : le continu est présupposé par le modèle, et une grille de grains infinitésimaux rend compte des mêmes observations. Mais la chute libre apporte à la théorie du grain quatre éléments positifs :

1. une *admissibilité physique* : continu et grille sont observationnellement indiscernables (prop. 5) ;
2. une *réalisation physique* de la stratification fonctionnelle : un temps uniforme produit un espace stratifié par la vitesse, selon la loi exacte des nombres impairs de Galilée (th. 6 et prop. 13) ; cette loi est invariante par changement de résolution et compatible avec le raffinement (prop. 7 et 8), ce qui est une invariance d'échelle globale, et non une invariance de jauge (rem. 9) ;
3. une *interprétation* du comptage homogène : le rapport des comptages est la vitesse moyenne (prop. 15) ;
4. un *ancrage expérimental* : l'expérience du plan incliné de Galilée relève du même théorème, quelle que soit l'inclinaison (prop. 17) ; elle vérifie la loi aux résolutions standard, et le grain la prolonge de façon cohérente aux résolutions illimitées (rem. 20).

La trajectoire continue est la promotion de cette grille stratifiée (th. 21). Comme dans les études sur la réflexivité, l'axiome du choix et les coupures [2, 3, 4], ce qui est net au niveau des grilles, ici la loi des nombres impairs, est transformé par la promotion, ici en une loi différentielle.

Une extension naturelle consiste à traiter un mouvement quelconque $x(t)$: la grille d'espace est alors stratifiée par $|x'(t)|$, et ses extrémités ne sont plus nécessairement des jonctions d'une grille homogène. Les lois de puissance $x = t^p$ fournissent des cas où la stratification reste dyadique à toutes les échelles (prop. 10) ; la chute libre en est l'exemple physique, avec $p = 2$. Une autre perspective serait de construire une véritable version locale de cette invariance, avec une résolution variable d'une région à l'autre et une règle de raccordement, ce qui permettrait d'examiner sérieusement l'analogie avec la jauge de Weyl.

Références

- [1] H. Genvrin, *Théorie du grain*, manuscrit, 2026.
- [2] H. Genvrin, *Le paradoxe de la réflexivité dans la théorie du grain*, manuscrit, 2026.
- [3] H. Genvrin, *De l'axiome du choix à une fonction de choix sur les grains*, manuscrit, 2026.
- [4] H. Genvrin, *Théorie des coupures et théorie du grain*, manuscrit, 2026.
- [5] Aristote, *Physique*, livres III et VI.
- [6] G. Galilei, *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, Leyde, 1638, troisième journée.
- [7] T. B. Settle, « An experiment in the history of science », *Science* 133 (1961), 19–23.
- [8] G. Cantor, *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*, Leipzig, 1883.
- [9] D. Hilbert, « Über das Unendliche », *Mathematische Annalen* 95 (1926), 161–190.
- [10] K. Gödel, *The Consistency of the Continuum Hypothesis*, Princeton University Press, 1940.
- [11] P. J. Cohen, « The independence of the continuum hypothesis », *Proceedings of the National Academy of Sciences* 50 (1963), 1143–1148.
- [12] H. Weyl, « Gravitation und Elektrizität », *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften* (1918), 465–480.
- [13] A. Robinson, *Non-standard Analysis*, North-Holland, 1966.