

Cinématique de la lumière dans la théorie du grain

Un modèle de quantum fondé sur les *Prolegomena*

Hugues Genvrin

Octobre 2026

Résumé

Nous proposons une cinématique de la lumière dans la théorie du grain. Les *Prolegomena* construisent une famille de boucles circulaires (B_k) , de même longueur, reliées par une application ψ qui divise le rayon par deux et double les angles. Nous montrons que ψ^{n_∞} redécoupe un cercle en 2^{n_∞} boucles fines de même longueur totale, ce qui réalise géométriquement la décomposition d'un grain grossier en 2^{n_∞} grains fins, et que la variante ψ^* , lue dans les repères normalisés des deux cercles, est l'élévation au carré $z \mapsto z^2$: elle choisit i comme racine carrée de -1 . Nous appliquons ψ^* à un modèle de quantum de lumière : un demi-cercle « pilote » engendre le cercle du quantum. Dans ce modèle, la translation moyenne vaut $2/\pi$ fois la vitesse curviligne pour *tous* les quanta, si bien que tous se déplacent à la même vitesse ; seules leurs vitesses angulaires, c'est-à-dire leurs fréquences, diffèrent. Le rapport des longueurs d'onde de deux rayonnements est un invariant, indépendant du rayonnement de référence et conservé par effet Doppler colinéaire. Le facteur $2/\pi$, rapport du diamètre au demi-cercle, est le produit de Viète des *Prolegomena*. Une table de concordance relie les notations des *Prolegomena* à celles de la théorie du grain.

Table des matières

1	Introduction	2
2	La base mathématique : les <i>Prolegomena</i>	2
2.1	La famille (B_k)	2
2.2	L'application ψ	3
2.3	Le redécoupage en 2^{n_∞} grains fins	3
2.4	ψ^* : l'élévation au carré	3
2.5	Le relèvement, l'hélice et les deux limites	4
3	Le modèle du quantum	5
3.1	Quantum pilote et quantum	5
3.2	La suite des quanta et le niveau d'observation	5
4	La cinématique	5
4.1	Translation saltatoire	5
4.2	Ce qui diffère : les vitesses angulaires	6
4.3	Le facteur $2/\pi$	6
5	La vitesse de la lumière et les rapports d'échelle	7
5.1	La vitesse opératoire	7
5.2	Le rapport d'échelles, invariant	7

6	Table de concordance des notations	7
7	Synthèse	7

1 Introduction

Le travail *Une famille de boucles circulaires emboîtées* (2004), présenté sous le titre *Prolegomena* [1], étudie une famille de cercles tangents en un point, l'application qui les relie, la formule de Viète et le statut topologique du cercle. La présente note établit qu'il fournit une base mathématique précise aux textes récents de la théorie du grain, et elle en tire un modèle cinématique du quantum de lumière. Ce modèle prolonge celui de *h comme circulation sur le cercle élémentaire* [2]. Sa conclusion principale est que les quanta de fréquences différentes se déplacent tous à la même vitesse : seules leurs vitesses angulaires diffèrent.

Statut. Les sections 2, 3 et 4 contiennent des énoncés démontrés. Les rapprochements avec la théorie du grain sont signalés comme remarques ou conjectures. La section 5 relie le modèle à la physique établie.

2 La base mathématique : les *Prolegomena*

2.1 La famille (B_k)

Définition 1 ([1], déf. 1). On fixe $\rho_0 > 0$. Pour $k \in \mathbb{Z}$, C_k est le cercle de centre $O_k = (-2^k \rho_0, 0)$ et de rayon $\rho_k = 2^k \rho_0$. La courbe B_k est C_k parcouru dans le sens direct depuis O , sur un angle total $\theta_k^{\text{tot}} = 2^{1-k} \cdot 2\pi$, extrémité exclue.

Tous les C_k passent par l'origine O et y sont tangents à l'axe des ordonnées. Selon k , B_k est un arc ($k > 1$), le cercle C_1 une fois ($k = 1$), ou une boucle parcourue 2^{1-k} fois ($k \leq 0$).

Proposition 2 (Longueur commune, [1]). Pour tout k , la longueur de B_k vaut $\theta_k^{\text{tot}} \rho_k = 4\pi \rho_0$.

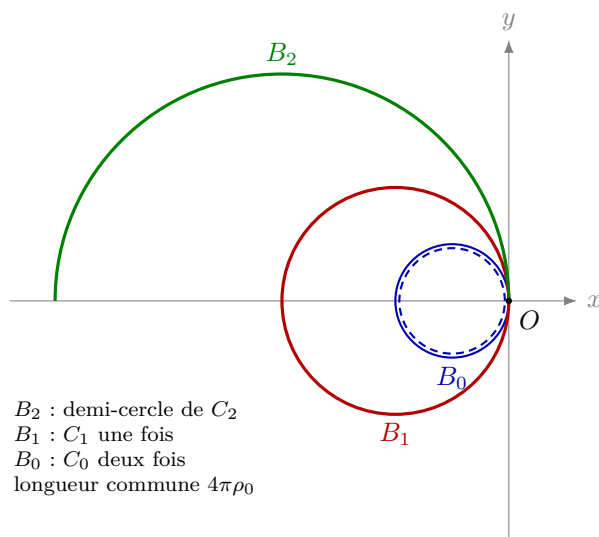


FIGURE 1 – Trois courbes de la famille, tangentes en O à l'axe des ordonnées. Le double tracé de B_0 figure ses deux tours.

2.2 L'application ψ

Définition 3 ([1], déf. 5). Pour un point T de C_k repéré par l'angle θ mesuré au centre O_k depuis O , $\psi(T)$ est le point T' défini par $\overrightarrow{O_k T'} = \cos \theta \overrightarrow{O_k T}$.

Proposition 4 (Doublement des angles, [1], lemme 6). $\psi(T)$ est sur C_{k-1} , à l'angle 2θ mesuré au centre O_{k-1} . L'application ψ divise le rayon par 2, double les angles et conserve la longueur d'arc : $\rho_{k-1} \cdot 2\theta = \rho_k \theta$. En particulier $\psi(B_k) = B_{k-1}$.

Démonstration. $\overrightarrow{O_k T'} = \rho_k \cos \theta (\cos \theta, \sin \theta) = \rho_{k-1} (1 + \cos 2\theta, \sin 2\theta)$, et $\overrightarrow{O_{k-1} O_k} = (-\rho_{k-1}, 0)$, d'où $\overrightarrow{O_{k-1} T'} = \rho_{k-1} (\cos 2\theta, \sin 2\theta)$. Le nombre de tours double et le rayon est divisé par deux : la longueur $4\pi\rho_0$ est conservée. $\square$

Géométriquement, $\psi(T)$ est la seconde intersection de la droite $(O_k T)$ avec C_{k-1} , et le doublement est le théorème de l'angle inscrit. C'est la construction « $2\rho \cos \varphi$ » du demi-cercle grossier vers le cercle fin dans *h comme circulation* [2].

2.3 Le redécoupage en 2^{n_∞} grains fins

Proposition 5 (Itération de ψ). Pour tout entier $n \geq 0$, ψ^n envoie le cercle C_k parcouru une fois sur le cercle C_{k-n} , de rayon $2^{-n}\rho_k$, parcouru 2^n fois. Chaque tour a pour longueur $2^{-n} \cdot 2\pi\rho_k$, et la longueur totale $2\pi\rho_k$ est conservée.

Démonstration. Récurrence sur la proposition 4 ; le résultat s'étend par transfert à tout entier hyperfini n . $\square$

Corollaire 6 (Un grain grossier, 2^{n_∞} grains fins). Représentons, comme dans le Niveau d'observation [4], un grain d'épaisseur δ par un cercle de circonférence δ . Alors ψ^{n_∞} envoie le cercle d'un grain d'épaisseur δ_{k-1} sur 2^{n_∞} tours d'un cercle de circonférence $2^{-n_\infty}\delta_{k-1}$, c'est-à-dire δ_k . Un grain grossier devient 2^{n_∞} grains fins, de même longueur totale.

Démonstration. Proposition 5 avec $n = n_\infty$. $\square$

Conjecture 7 (Source du rapport 2^{n_∞}). Le corollaire 6 réalise géométriquement la proposition 53 du livre [3] : chaque grain de niveau $-(k-1)n_\infty$ contient exactement 2^{n_∞} grains de niveau $-kn_\infty$. Le document sur l'homothétie hyperfinie [5] laissait ouverte la source de ce rapport, que son mécanisme itératif transmet sans le produire. Nous conjecturons que ψ en est le mécanisme : n_∞ doublements d'angle, à longueur conservée.

2.4 ψ^* : l'élévation au carré

Théorème 8 ([1], th. 12). Sur le demi-cercle supérieur de C_1 , d'origine O exclue et d'extrémité S incluse, l'application ψ^* , égale à ψ à l'intérieur et qui envoie S sur le point de retour O^2 , est un homéomorphisme sur le cercle C_0 vu comme boucle indexée $(\bar{O}^1; O^2]$.

Proposition 9 (ψ^* est l'élévation au carré). Repérons chaque cercle dans son propre repère normalisé : le demi-cercle de C_1 par $z_1 = (T - O_1)/\rho_1$, le cercle C_0 par $z_0 = (T' - O_0)/\rho_0$, les angles étant mesurés depuis la direction de O . Alors $|z_1| = |z_0| = 1$ et

$$z_0 = z_1^2.$$

L'inverse de ψ^* est donc la racine carrée principale, d'image le demi-cercle supérieur. En particulier, parmi les deux racines carrées $\pm i$ de -1 , ψ^* retient i : le point du quart de tour du demi-cercle, $z_1 = i$, a pour image le point du demi-tour du cercle, $z_0 = -1$.

Démonstration. Si T est à l'angle θ sur C_1 , $z_1 = e^{i\theta}$; par la proposition 4, $T' = \psi^*(T)$ est à l'angle 2θ sur C_0 , donc $z_0 = e^{2i\theta} = z_1^2$. Pour $\theta \in]0, \pi]$, z_1 décrit le demi-cercle supérieur, sur lequel l'élévation au carré est injective : c'est la branche principale de la racine carrée. Enfin $\theta = \pi/2$ donne $z_1 = i$ et $z_0 = -1$. $\square$

Remarque 10 (Deux repères, et non un seul plan). L'égalité $z_0 = z_1^2$ n'a de sens que si chaque cercle est lu dans son propre repère, centré en son centre et gradué par son propre rayon : $\rho_1 = 2\rho_0$ pour le demi-cercle, ρ_0 pour le cercle. C'est l'analogue de la lecture normée de *Plan complexe et grain nul* [6], où chaque axe est gradué par son propre point de résolution. Dans un seul repère du plan, la relation est fausse : géométriquement, le point du quart de tour de C_1 , $(-2\rho_0, 2\rho_0)$, est envoyé sur le centre $O_1 = (-2\rho_0, 0)$ de C_1 , qui est le point de C_0 diamétralement opposé à O .

Remarque 11 (Portée du rapprochement). Dans *Plan complexe et grain nul*, $\hat{i}$ est une *transformation* du plan, dont le carré est le demi-tour. Ici, i est un *point* du demi-cercle, et ψ^* est l'élévation au carré. Le contenu commun est que le demi-cercle supérieur choisit une racine carrée de -1 : ψ^* fixe l'orientation, comme le choix de $\hat{i}$ plutôt que de $-\hat{i}$. Au-delà, c'est une analogie, non une identité.

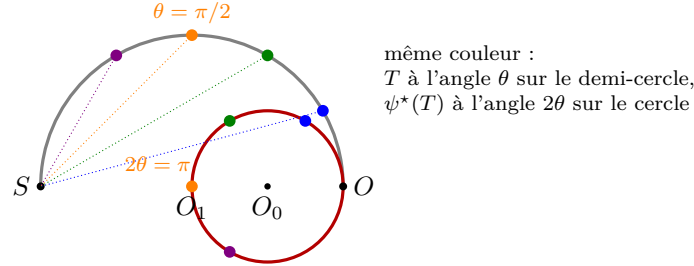


FIGURE 2 – ψ^* : le demi-cercle (gris) est étiré en un cercle entier (rouge). Dans les repères normalisés des deux cercles, le point $z_1 = i$ du demi-cercle ($\theta = \pi/2$, orange) a pour image le point $z_0 = -1$ du cercle ($2\theta = \pi$) ; dans le plan, ce point image est le centre O_1 de C_1 .

2.5 Le relèvement, l'hélice et les deux limites

Pour distinguer les passages successifs d'une boucle parcourue plusieurs fois, les *Prolegomena* relèvent chaque point à son abscisse curviligne : $\Gamma_k(s) = (\gamma_k(s), s)$, $s \in [0, 4\pi\rho_0)$.

Remarque 12 (Lecture dans la théorie du grain). 1. Le relèvement Γ_k est une *hélice* : sa hauteur garde l'indice de recouvrement. C'est la structure phase $\times$ hauteur de l'hélice de la rotation intrinsèque [7, 5].

2. L'application p qui oublie l'indice est une bijection continue sans inverse continu ([1], « deux topologies ») : comme la promotion, elle efface le niveau, et c'est elle qui rend le cercle compact.
3. Pour $k \rightarrow +\infty$, les arcs se redressent sur le segment $[O; P)$ de longueur $4\pi\rho_0$: c'est la rectification vers la droite à l'infini.
4. Pour $k \rightarrow -\infty$, le relèvement tend vers $\{O\} \times [0, 4\pi\rho_0)$: le point O muni d'une adresse binaire infinie, les indices successifs donnant les chiffres de $t = s/4\pi\rho_0$. C'est le point du continu $g_{-\aleph_0}$, « sans dernier chiffre » [4].

Remarque 13 (Le facteur de Viète). La démonstration géométrique de Viète part de l'arc B_3 , dont l'extrémité a pour ordonnée $y_3 = 8\rho_0$, et redresse les arcs jusqu'à $4\pi\rho_0$:

$$\frac{y_3}{4\pi\rho_0} = \frac{2}{\pi} = \prod_{n \geq 2} \cos \frac{\pi}{2^n}.$$

Le même rapport $2/\pi$ est celui du diamètre au demi-cercle. Il réapparaît dans la cinématique (section 4).

3 Le modèle du quantum

3.1 Quantum pilote et quantum

Associions à chaque rayonnement un *quantum*, cercle de rayon ρ_0 , et un *quantum pilote*, demi-cercle supérieur du grain de rayon double. À chaque point de résolution du pilote correspond un point de résolution du quantum, par l'application ψ^* des *Prolegomena*.

Proposition 14 (Le pilote engendre le quantum par ψ^*). *Prenons le pilote sur C_1 (rayon $2\rho_0$) et le quantum sur C_0 (rayon ρ_0). Alors ψ^* envoie le pilote sur le quantum, et les deux ont la même longueur*

$$\pi \cdot 2\rho_0 = 2\pi\rho_0 = \lambda,$$

qui est la longueur d'onde du rayonnement.

Démonstration. Théorème 8, et conservation de la longueur (proposition 4). □

Le modèle est donc exactement le passage du demi-cercle grossier au cercle fin de h comme *circulation* [2], où il a été montré que :

- la quantité de mouvement est $p = \hbar/\rho_0 = h/\lambda$;
- sa circulation sur un tour du quantum vaut $\oint p ds = h$;
- la force de cohésion $F_G = \hbar c/\rho_0^2$ est virtuelle : son travail et son impulsion sont nuls sur une période.

3.2 La suite des quanta et le niveau d'observation

Considérons la famille de quanta $q_i = 2^i q_1$, $1 \leq i \leq n_\infty$, avec le point de résolution q_0 , le grain $q_1 = g_0$ et l'horizon $q_{n_\infty} = g_{n_\infty}$. C'est la suite adjacente de trois grains du *Niveau d'observation* [4], pour $k = 1$: point g_{-n_∞} , cercle élémentaire g_0 , horizon g_{n_∞} . Les q_i intermédiaires sont les étapes du flot 2^p entre le cercle élémentaire et l'horizon.

4 La cinématique

4.1 Translation saltatoire

Mesurons le temps par l'abscisse curviligne sur le pilote : $t = 2\rho_0\theta_1$. Une période dure donc $T = 2\pi\rho_0$ (une longueur de pilote), et le quantum achevé est translaté du diamètre du pilote, $4\rho_0$. La position du quantum, au résidu de rotation près, est

$$X(t) = 4\rho_0 \left\lfloor \frac{t}{2\pi\rho_0} \right\rfloor.$$

C'est la partie de translation de l'équation du mouvement $\Omega(t) = 2\rho_0 e^{i\omega_0 t} - (4\ell + 1)\rho_0$, avec $\ell = \lfloor t/2\pi\rho_0 \rfloor$, qui ajoute la rotation sur le quantum.

Théorème 15 (Même vitesse pour tous les quanta). *Pour tout quantum de rayon ρ_0 et tout $t \geq 0$,*

$$\left| X(t) - \frac{2}{\pi} t \right| < 4\rho_0.$$

La vitesse moyenne de translation vaut $2/\pi$, indépendamment de ρ_0 . Pour deux quanta de rayons ρ_n, ρ_m ,

$$|X_n(t) - X_m(t)| < 4 \max(\rho_n, \rho_m), \quad \text{donc} \quad \frac{|X_n(t) - X_m(t)|}{t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0.$$

Démonstration. Pour $u = t/(2\pi\rho_0)$, $u - 1 < \lfloor u \rfloor \leq u$, donc $\frac{2}{\pi}t - 4\rho_0 < X(t) \leq \frac{2}{\pi}t$. La seconde inégalité s'obtient en soustrayant les encadrements des deux quanta. $\square$

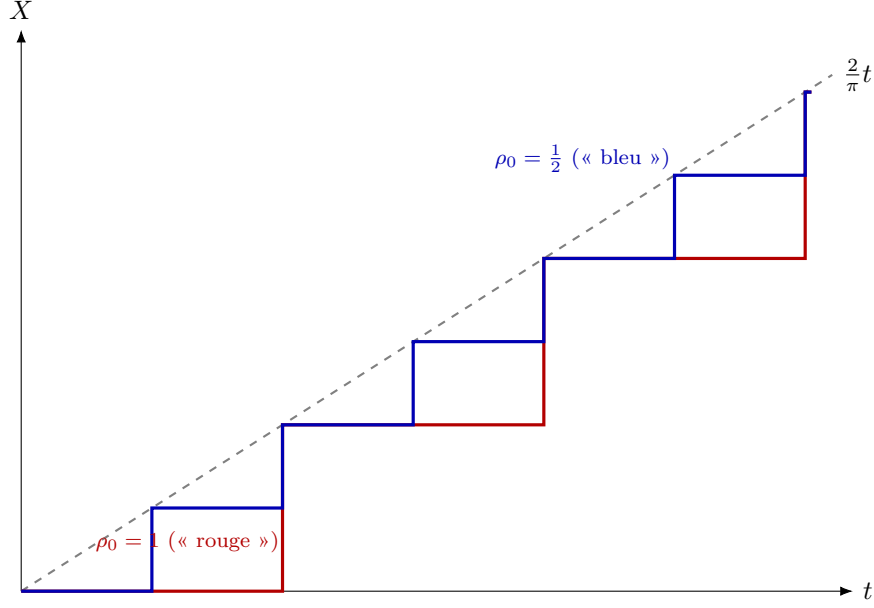


FIGURE 3 – Translation saltatoire de deux quanta de rayons différents. Les sauts diffèrent (diamètre du pilote $4\rho_0$), les périodes aussi ($2\pi\rho_0$), mais les deux escaliers suivent la même droite de pente $2/\pi$: même vitesse moyenne.

Remarque 16 (Écart et produit d'écart). L'écart des positions de deux quanta est $4(\ell_n\rho_n - \ell_m\rho_m)$, et non le produit d'écart $4(\ell_n - \ell_m)(\rho_n - \rho_m)$. Comme $\ell_n\rho_n$ et $\ell_m\rho_m$ valent tous deux $t/2\pi$ au résidu près, l'écart reste borné : aucun quantum n'en distance un autre.

4.2 Ce qui diffère : les vitesses angulaires

Proposition 17 (Fréquences). *Sur le quantum, l'angle au centre est $\theta_0 = 2\theta_1 = t/\rho_0$: la vitesse angulaire vaut $\omega_0 = 1/\rho_0$, et la fréquence $\nu = 1/(2\pi\rho_0) = 1/\lambda$ dans l'unité de temps du modèle. Le rapport des vitesses angulaires de deux quanta est $\omega_m/\omega_n = \rho_n/\rho_m$.*

Démonstration. $t = 2\rho_0\theta_1$ et $\theta_0 = 2\theta_1$ (proposition 4). $\square$

Un petit quantum tourne plus vite qu'un gros. Les quanta ont la même vitesse de translation et des fréquences différentes.

4.3 Le facteur $2/\pi$

Dans le modèle, la translation par période est le diamètre du pilote ($4\rho_0$), et le parcours interne est l'arc du pilote ($2\pi\rho_0$). Leur rapport est $2/\pi$, le produit de Viète de la remarque 13.

Remarque 18 (Quelle vitesse est c ?). Si c est la vitesse de translation, mesurée par l'expérience, le mouvement interne a la vitesse $\pi c/2 > c$. Ce n'est pas nécessairement contradictoire : ce mouvement ne transporte pas de signal, et l'électron de Dirac présente déjà un mouvement interne rapide, le *Zitterbewegung* [10]. Mais c'est un engagement physique du modèle, qu'il faut assumer explicitement ou corriger, par exemple en changeant la loi de translation du pilote.

5 La vitesse de la lumière et les rapports d'échelle

5.1 La vitesse opératoire

Depuis 1983, le mètre est défini à partir de la seconde et d'une valeur *exacte* de la vitesse de la lumière, 299 792 458 m/s [8]. Mesurée dans le Système international, la vitesse de la lumière est donc constante par construction : c'est une vitesse *opératoire*. Le contenu empirique est ailleurs : dans l'isotropie, l'invariance par changement de référentiel inertiel, et l'absence de dispersion dans le vide. Sur ce dernier point, les photons d'énergies très différentes émis par le sursaut gamma GRB 090510 sont arrivés ensemble après plusieurs milliards d'années de trajet [9] : un écart de vitesse entre couleurs est exclu à un niveau extrême, en accord avec le théorème 15.

5.2 Le rapport d'échelles, invariant

Proposition 19 (Indépendance de la référence). *Pour deux rayonnements φ_j, φ_k , le rapport $r_{j/k} = \rho_j/\rho_k = \lambda_j/\lambda_k = \nu_k/\nu_j$ ne dépend pas du rayonnement de référence.*

Démonstration. Si $\rho_j = \alpha\rho_i$ et $\rho_k = \beta\rho_i$, alors $r_{j/k} = \alpha/\beta$, et de même pour toute autre référence i' . $\square$

Cet invariant est un *rapport d'échelles* (de longueurs d'onde ou de fréquences), et non une vitesse : mesurés avec une horloge commune, tous les quanta vont à la même vitesse (théorème 15).

Proposition 20 (Doppler colinéaire). *Dans un changement de référentiel inertiel de vitesse βc le long de la direction de propagation, toutes les longueurs d'onde des photons qui se propagent dans cette direction sont multipliées par le même facteur $D = \sqrt{(1+\beta)/(1-\beta)}$. Le rapport $r_{j/k}$ est donc invariant : le changement de référentiel agit sur $\mathcal{Q}$ comme une homothétie de rapport D .*

Démonstration. Formule de l'effet Doppler relativiste longitudinal, indépendante de la fréquence. $\square$

Remarque 21. Un système en translation uniforme voit ainsi la famille des quanta subir une homothétie : changer de référentiel revient à changer de rayonnement de référence. L'invariance vaut pour des photons de même direction ; pour des directions opposées, les facteurs sont D et $1/D$.

6 Table de concordance des notations

7 Synthèse

Ce qui est établi.

- ψ double les angles, divise le rayon par deux et conserve la longueur ; $\psi^{n\infty}$ redécoupe un cercle en $2^{n\infty}$ boucles fines (corollaire 6).
- ψ^* est l'élévation au carré : $z_0 = z_1^2$ dans les repères normalisés des deux cercles ; elle choisit i parmi les racines de -1 (proposition 9).
- Le quantum pilote engendre le quantum par ψ^* , à longueur λ conservée (proposition 14).
- Tous les quanta ont la même vitesse moyenne de translation ; seules leurs fréquences diffèrent (théorème 15, proposition 17).
- Le rapport λ_j/λ_k est indépendant de la référence et invariant par Doppler colinéaire (propositions 19 et 20).

<i>Prolegomena</i>	théorie du grain
C_k, B_k , tangents en O à l'axe y	cercles porteurs C_k tangents à Δ ; tour des résolutions
ψ (facteur $\cos \theta$)	passage grossier $\rightarrow$ fin ; ψ^{n_∞} : un grain en 2^{n_∞}
ψ^* , demi-cercle $\rightarrow$ cercle	quantum pilote $\rightarrow$ quantum ; élévation au carré
relèvement Γ_k	hélice phase $\times$ hauteur
oubli de l'indice p	promotion
limite $k \rightarrow +\infty$, segment $[O; P)$	rectification, droite à l'infini
limite $k \rightarrow -\infty$, point O indexé	point du continu $g_{-\aleph_0}$

TABLE 1 – Concordance entre les notations des *Prolegomena* et celles de la théorie du grain.

Ce qui est conjecturé.

- ψ comme source du rapport 2^{n_∞} entre strates (conjecture 7).
- Les lectures du relèvement comme hélice, de l'oubli d'indice comme promotion, et de la limite $k \rightarrow -\infty$ comme $g_{-\aleph_0}$.

Questions ouvertes.

1. Le facteur $2/\pi$: faut-il assumer une vitesse interne $\pi c/2$, ou modifier la loi de translation du pilote ?
2. Relier le saut saltatoire de $4\rho_0$ par période à la force virtuelle F_G : le saut est-il la seule trace, au niveau grossier, de la rotation fine ?
3. Étendre le modèle à des photons de directions différentes, pour lesquels l'invariant Doppler ne vaut plus.

Références

- [1] H. Genvrin, *Une famille de boucles circulaires emboîtées : homéomorphismes, formule de Viète et statut topologique du cercle*, 2004 ; présentation *A Family of Nested Circular Loops*.
- [2] H. Genvrin, *h comme circulation sur le cercle élémentaire*, manuscrit, 2026.
- [3] H. Genvrin, *Théorie du grain*, manuscrit, 2026.
- [4] H. Genvrin, *Niveau d'observation*, manuscrit, 2026.
- [5] H. Genvrin, *Raison de l'homothétie hyperfinie de rapport 2^{n_∞}* , manuscrit, 2026.
- [6] H. Genvrin, *Plan complexe et grain nul*, manuscrit, 2026.
- [7] H. Genvrin, *Mouvement de rotation intrinsèque*, manuscrit, 2026.
- [8] BIPM, *Le Système international d'unités (SI)*, 9^e édition, 2019.
- [9] A. A. Abdo et al., « A limit on the variation of the speed of light arising from quantum gravity effects », *Nature* 462 (2009), p. 331–334.
- [10] E. Schrödinger, « Über die kräftefreie Bewegung in der relativistischen Quantenmechanik », *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss.* (1930), p. 418–428.
- [11] F. Viète, *Variorum de rebus mathematicis responsorum liber VIII*, Tours, 1593.