

Formalisation de la mécanique quantique

Intrication de deux systèmes à deux niveaux et origine du facteur $\frac{1}{\sqrt{2}}$

Hugues GENVRIN

Résumé

On montre que, pour deux systèmes quantiques à deux niveaux, les états qui sont à la fois parfaitement anticorrélés pour une mesure de type spin et invariants (à une phase près) par l'échange des deux sous-systèmes sont exactement les deux états de Bell $\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle)$. Le facteur $\frac{1}{\sqrt{2}}$ résulte de la symétrie d'échange et de la normalisation, et non de l'intrication seule. On en donne une caractérisation équivalente : c'est aussi le facteur de l'intrication *maximale*.

1 Produit tensoriel de deux espaces de dimension finie

Soient E_1 et E_2 deux espaces de Hilbert complexes de dimensions respectives n et m , munis de bases orthonormées

$$\mathcal{B}(E_1) = (|e_1^1\rangle, \dots, |e_1^n\rangle), \quad \mathcal{B}(E_2) = (|e_2^1\rangle, \dots, |e_2^m\rangle).$$

Pour $|x\rangle \in E_1$ et $|y\rangle \in E_2$, on écrit

$$|x\rangle = \sum_{i=1}^n x_i |e_1^i\rangle, \quad |y\rangle = \sum_{j=1}^m y_j |e_2^j\rangle.$$

Par bilinéarité du produit tensoriel :

$$|x\rangle \otimes |y\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i y_j |e_1^i\rangle \otimes |e_2^j\rangle.$$

La famille $(|e_1^i\rangle \otimes |e_2^j\rangle)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$ est une base orthonormée de $W = E_1 \otimes E_2$, qui est donc de dimension nm . Un vecteur quelconque de W s'écrit

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} |e_1^i\rangle \otimes |e_2^j\rangle, \quad c_{ij} \in \mathbb{C}. \quad (1)$$

Un *état* est un vecteur normé : $\sum_{i,j} |c_{ij}|^2 = 1$, défini à une phase globale près ($|\psi\rangle$ et $e^{i\varphi} |\psi\rangle$ représentent le même état physique).

2 États séparables et états intriqués

Définition 1 (État séparable, état intriqué). Un état $|\psi\rangle \in W$ est dit *séparable* (ou *produit*) s'il existe $|x\rangle \in E_1$ et $|y\rangle \in E_2$ tels que $|\psi\rangle = |x\rangle \otimes |y\rangle$. On note W_1 l'ensemble des états séparables. Un état non séparable est dit *intriqué*; on note $W_2 = W \setminus W_1$ leur ensemble.

Proposition 1 (Critère de séparabilité). *L'état $|\psi\rangle$ de (1) est séparable si et seulement si la matrice $C = (c_{ij})$ est de rang 1.*

Démonstration. Si $|\psi\rangle = |x\rangle \otimes |y\rangle$, alors $c_{ij} = x_i y_j$, donc $C = x y^T$ est de rang 1 (elle est non nulle car $|\psi\rangle$ est normé). Réciproquement, toute matrice de rang 1 s'écrit $C = x y^T$, et l'on pose $|x\rangle = \sum_i x_i |e_1^i\rangle$, $|y\rangle = \sum_j y_j |e_2^j\rangle$. $\square$

Corollaire 1. *Pour $n = m = 2$, l'état $|\psi\rangle$ est intriqué si et seulement si $\det C = c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} \neq 0$.*

Remarque (W_1 et W_2 ne sont pas des sous-espaces vectoriels). Les vecteurs $|e_1^1\rangle \otimes |e_2^2\rangle$ et $|e_1^2\rangle \otimes |e_2^1\rangle$ sont séparables, mais leur somme a pour matrice $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, de déterminant $-1 \neq 0$: elle est intriquée. Ainsi W_1 n'est pas stable par addition. De même, W_2 ne contient pas le vecteur nul et n'est pas non plus un sous-espace. Enfin, W_1 n'est jamais vide : on ne peut pas avoir $W = W_2$. C'est pourquoi on se restreint ci-dessous à un *sous-espace* bien choisi, plutôt que de supposer l'espace entier intriqué.

3 Cas de deux systèmes à deux niveaux

On prend désormais $n = m = 2$, et l'on adopte la notation usuelle

$$|0\rangle := |e_k^1\rangle, \quad |1\rangle := |e_k^2\rangle \quad (k = 1, 2), \quad |ab\rangle := |a\rangle \otimes |b\rangle.$$

L'espace W est de dimension 4, de base $(|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle)$.

3.1 Les mesures μ' et μ comme observables

La mesure μ' sur chaque composant, de valeurs opposées sur les deux vecteurs de base, se modélise par l'observable de Pauli

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z |0\rangle = +|0\rangle, \quad \sigma_z |1\rangle = -|1\rangle.$$

Les valeurs propres ± 1 vérifient bien la propriété $\mu'(|0\rangle)/\mu'(|1\rangle) = -1$. La mesure conjointe μ , multiplicative sur les états produits, est l'observable $\sigma_z \otimes \sigma_z$:

$$(\sigma_z \otimes \sigma_z) |ab\rangle = \mu'(|a\rangle) \mu'(|b\rangle) |ab\rangle.$$

Elle vaut $+1$ sur $|00\rangle$ et $|11\rangle$ (résultats identiques) et -1 sur $|01\rangle$ et $|10\rangle$ (résultats opposés).

3.2 Hypothèses

Hypothèse 1 (Anticorrélation parfaite). L'état $|\psi\rangle$ donne avec certitude des résultats opposés sur les deux sous-systèmes :

$$(\sigma_z \otimes \sigma_z) |\psi\rangle = -|\psi\rangle.$$

Hypothèse 2 (Invariance par échange). Soit $\tau = \text{SWAP}$ l'opérateur unitaire défini par $\tau(|a\rangle \otimes |b\rangle) = |b\rangle \otimes |a\rangle$. L'état $|\psi\rangle$ est invariant par τ à une phase près : il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\tau |\psi\rangle = \lambda |\psi\rangle$.

Remarque. Les observables $\sigma_z \otimes \sigma_z$ et τ commutent, ce qui rend les deux hypothèses compatibles : on cherche leurs vecteurs propres communs. L'hypothèse 2 exprime physiquement que les deux sous-systèmes jouent des rôles indiscernables dans l'état considéré.

3.3 Conséquence de l'hypothèse d'anticorrélation

Lemme 1. *Sous l'hypothèse 1, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ avec $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ tels que*

$$|\psi\rangle = \alpha |01\rangle + \beta |10\rangle.$$

Cet état est intriqué si et seulement si $\alpha\beta \neq 0$.

Démonstration. L'espace propre de $\sigma_z \otimes \sigma_z$ associé à -1 est $\text{Vect}(|01\rangle, |10\rangle)$, d'où la forme annoncée ; la condition sur α, β est la normalisation. La matrice des coefficients est $C = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$, de déterminant $-\alpha\beta$, et l'on conclut par le corollaire de la proposition 1. $\square$

Remarque (L'intrication seule n'impose pas $\frac{1}{\sqrt{2}}$). L'état $\sqrt{0,9} |01\rangle + \sqrt{0,1} |10\rangle$ satisfait l'hypothèse 1 et il est intriqué ($\alpha\beta \neq 0$), mais ses coefficients ne valent pas $\frac{1}{\sqrt{2}}$. C'est donc une hypothèse supplémentaire qui fixe ce facteur.

3.4 Théorème principal

Théorème 1. *Les états vérifiant les hypothèses 1 et 2 sont, à une phase globale près, exactement*

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle) \quad \text{et} \quad |\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle).$$

Ils sont intriqués, et l'on a $\tau |\Psi^\pm\rangle = \pm |\Psi^\pm\rangle$.

Démonstration. Valeurs possibles de λ . Comme $\tau^2 = \text{Id}$, on a $|\psi\rangle = \tau^2 |\psi\rangle = \lambda^2 |\psi\rangle$, et $|\psi\rangle \neq 0$, donc $\lambda^2 = 1$, soit $\lambda = \pm 1$.

Relation entre α et β . D'après le lemme 1, $|\psi\rangle = \alpha |01\rangle + \beta |10\rangle$, donc

$$\tau |\psi\rangle = \alpha |10\rangle + \beta |01\rangle.$$

L'égalité $\tau |\psi\rangle = \lambda |\psi\rangle$ donne, en identifiant les coordonnées sur la base $(|01\rangle, |10\rangle)$: $\beta = \lambda\alpha$ et $\alpha = \lambda\beta$. Ces deux relations sont équivalentes puisque $\lambda^2 = 1$. On retient

$$\beta = \lambda\alpha, \quad \lambda = \pm 1.$$

Normalisation. On a $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = |\alpha|^2 + |\lambda|^2 |\alpha|^2 = 2|\alpha|^2 = 1$, d'où

$$|\alpha| = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Phase globale. On écrit $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\varphi}$; alors $|\psi\rangle = e^{i\varphi} \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle + \lambda |10\rangle)$. Au facteur de phase globale $e^{i\varphi}$ près, on obtient $|\Psi^+\rangle$ pour $\lambda = 1$ et $|\Psi^-\rangle$ pour $\lambda = -1$.

Intrication. $\alpha\beta = \lambda/2 \neq 0$; on conclut par le lemme 1.

Réciproque. On vérifie directement que $|\Psi^\pm\rangle$ est vecteur propre de $\sigma_z \otimes \sigma_z$ pour -1 et de τ pour ± 1 . $\square$

Remarque (Sur le décompte des cas). Les couples de signes $(+, +)$ et $(-, -)$ décrivent le même état $|\Psi^+\rangle$, puisqu'ils diffèrent de la phase globale -1 . De même, $(+, -)$ et $(-, +)$ décrivent tous deux $|\Psi^-\rangle$. Il n'y a donc que **deux** états physiquement distincts. Si l'on exige l'invariance stricte ($\lambda = 1$), seul $|\Psi^+\rangle$ subsiste; $|\Psi^-\rangle$ est antisymétrique.

4 Caractérisation équivalente : l'intrication maximale

Le facteur $\frac{1}{\sqrt{2}}$ peut aussi s'obtenir sans hypothèse de symétrie, en exigeant que l'intrication soit maximale.

Définition 2 (Intrication maximale). Un état $|\psi\rangle \in E_1 \otimes E_2$ (avec $\dim E_1 = \dim E_2 = 2$) est dit *maximalement intriqué* si l'état réduit du premier sous-système,

$$\rho_1 = \text{Tr}_2 (|\psi\rangle \langle \psi|),$$

est l'état maximalement mélangé $\frac{1}{2} \text{Id}$. Autrement dit, toute mesure sur le seul premier sous-système donne des résultats équiprobables.

Proposition 2. Soit $|\psi\rangle = \alpha |01\rangle + \beta |10\rangle$ avec $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Alors $|\psi\rangle$ est maximalement intriqué si et seulement si $|\alpha| = |\beta| = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Démonstration. On a $|\psi\rangle \langle \psi| = |\alpha|^2 |01\rangle \langle 01| + \alpha \bar{\beta} |01\rangle \langle 10| + \bar{\alpha} \beta |10\rangle \langle 01| + |\beta|^2 |10\rangle \langle 10|$. La trace partielle sur le second facteur annule les termes croisés, car $\langle 1|0\rangle = 0$. Il reste

$$\rho_1 = |\alpha|^2 |0\rangle \langle 0| + |\beta|^2 |1\rangle \langle 1| = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & 0 \\ 0 & |\beta|^2 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice vaut $\frac{1}{2} \text{Id}$ si et seulement si $|\alpha|^2 = |\beta|^2 = \frac{1}{2}$. $\square$

Corollaire 2. Parmi les états parfaitement anticorrélés (hypothèse 1), le facteur $\frac{1}{\sqrt{2}}$ caractérise exactement les états maximalement intriqués. Ces états sont, à des phases relatives près,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle + e^{i\theta} |10\rangle), \quad \theta \in \mathbb{R},$$

et les états de Bell $|\Psi^\pm\rangle$ ($\theta = 0$ ou π) sont ceux qui sont de plus symétriques ou antisymétriques par échange.

5 Conclusion

Le facteur $\frac{1}{\sqrt{2}}$ n'est pas une conséquence de l'intrication en tant que telle. Il apparaît dès qu'on impose, en plus de l'anticorrélation parfaite, *soit* la symétrie d'échange des deux sous-systèmes (théorème 1), *soit* l'intrication maximale (section 4). Dans les deux cas, il provient de l'égalité des modules $|\alpha| = |\beta|$ combinée à la normalisation $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

Les notions de « vecteur réalité » et d'« espace muni d'une réalité » de la version précédente pourront être réintroduites, à condition de leur donner une définition opératoire (par exemple en termes de projecteurs ou d'observables), afin que les étapes qui en dépendent soient vérifiables.