

Grains ronds et grains carrés

La forme d'un grain relativement au niveau d'observation

Hugues Genvrin

Octobre 2026

Résumé

Un grain peut être représenté rond (un disque) ou carré (le carré circonscrit). Nous montrons que la question « rond ou carré ? » n'a de réponse que relativement au niveau d'observation, et qu'elle dépend de la notion d'équivalence retenue. Topologiquement, les deux formes sont toujours équivalentes ; en ordre de grandeur, elles le sont dans toute strate. À la résolution près, en revanche, elles coïncident quand le grain est ponctuel, se distinguent quand il est cercle élémentaire, et ne coïncident que localement, près des points de contact, quand il est à l'horizon. La raison est l'équivalence des normes : un grain carré est une boule de la norme du maximum, un grain rond une boule de la norme euclidienne, et $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{2} \|x\|_\infty$. Le côté du carré circonscrit est le diamètre du cercle, et non sa rectification. Dans le plan complexe, la lecture normée transporte ces résultats aux grains rectangulaires et elliptiques.

Table des matières

1	Le cadre	1
2	Trois équivalences	2
3	L'encadrement des normes	3
4	La forme relativement au niveau d'observation	3
5	Le plan complexe	4
6	Synthèse	5

1 Le cadre

On considère le plan réel muni d'un niveau d'observation : le point de résolution est le grain g_f , d'épaisseur δ_f . On note $\delta_g = 2^{n_\infty} \delta_f$ et $\delta_{g^+} = 2^{n_\infty} \delta_g$ les épaisseurs des deux strates suivantes. Dans la suite adjacente de trois grains du *Niveau d'observation* [2], g_f est le point, g_g le cercle élémentaire et g_{g^+} l'horizon, ou cercle à l'infini C_∞ .

Définition 1 (Grain rond, grain carré). Pour un rayon $\rho > 0$ et un centre c , le *grain rond* est le disque $D_\rho = \{x : \|x - c\|_2 \leq \rho\}$, et le *grain carré* est le carré circonscrit $Q_\rho = \{x : \|x - c\|_\infty \leq \rho\}$, de côté 2ρ . Pour un grain g de niveau donné, on note g° et $g^\square$ ses deux représentations, de même rayon.

La figure 1 reprend la construction : la droite à l'infini Δ_∞ , tangente en O à C_∞ , et ses images par les rotations de $\pi/2$, π et $3\pi/2$ autour du centre forment le carré circonscrit $Q_1 Q_2 Q_3 Q_4$.

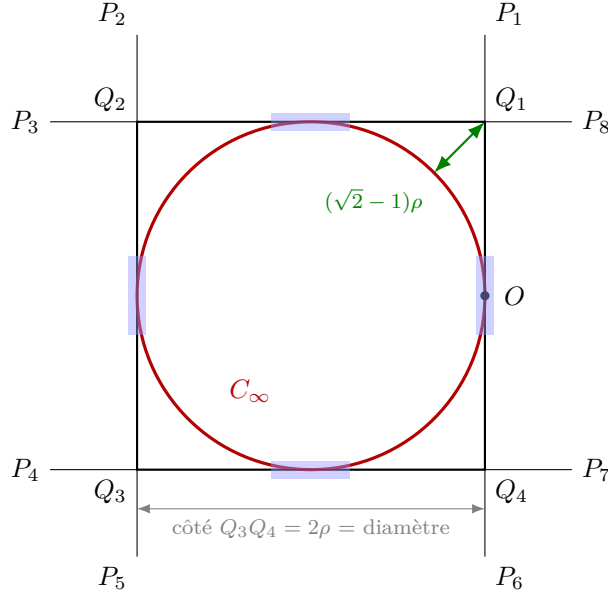


FIGURE 1 – Le cercle à l’infini C_∞ et son carré circonscrit. En bleu, les fenêtres de rectitude près des quatre points de contact, où le cercle se confond avec le côté à moins d’un point de résolution (tailles symboliques : leur longueur relative est en réalité infinitésimale). En vert, l’écart maximal $(\sqrt{2} - 1)\rho$, atteint aux coins.

2 Trois équivalences

Définition 2 (Trois équivalences). Soient A et B deux grains.

1. *Équivalence topologique* : leurs bords sont homéomorphes.
2. *Équivalence d’ordre de grandeur* : pour deux grandeurs positives, $x \asymp y$ si x/y est limité et non infinitésimal ; deux grains sont équivalents si leurs longueurs caractéristiques le sont.
3. *Indiscernabilité au niveau d’observation* : la distance de Hausdorff de leurs bords est inférieure à un point de résolution, $d_H(\partial A, \partial B) < \delta_f$. Ils sont *localement indiscernables* sur une fenêtre W si $d_H(\partial A \cap W, \partial B \cap W) < \delta_f$.

Proposition 3 (Topologie). *Pour tout ρ , ∂D_ρ et ∂Q_ρ sont homéomorphes : la projection radiale depuis le centre en est un homéomorphisme.*

Démonstration. L’application $x \mapsto c + \rho(x - c)/\|x - c\|_2$ envoie ∂Q_ρ sur ∂D_ρ ; elle est continue, bijective, et son inverse $y \mapsto c + \rho(y - c)/\|y - c\|_\infty$ est continue. $\square$

Topologiquement, grain rond et grain carré sont donc équivalents à *tous les niveaux*. La différence entre eux est métrique.

Proposition 4 (Ordre de grandeur). *Le périmètre du cercle est $2\pi\rho$, celui du carré 8ρ , le côté du carré 2ρ ; leurs rapports sont standard. Ainsi*

$$2\rho \asymp 2\pi\rho \asymp 8\rho, \quad \pi\rho^2 \asymp 4\rho^2.$$

En ordre de grandeur, grain rond et grain carré sont équivalents dans toute strate.

Démonstration. Les rapports π , 4 , $4/\pi$ sont des réels standard non nuls. $\square$

Remarque 5 (Le côté n'est pas la rectification). Le côté Q_1Q_4 du carré circonscrit vaut le *diamètre* 2ρ . La rectification de C_∞ , au sens où elle conserve la longueur (procédé de bisection du livre [1], ou redressement des arcs des *Prolegomena* [4]), est un segment de longueur $2\pi\rho$, soit π fois le côté. Les égalités « $2k 2^{n_\infty} = 2^{n_\infty}$ » et « $\pi 2^{n_\infty} = 2^{n_\infty}$ » ne valent qu'au sens de $\asymp$; de même, « $4 g_{g^+}^\circ \equiv g_{g^+}^\square$ » est vrai en ordre de grandeur ($8\pi\rho \asymp 8\rho$), non en longueur.

3 L'encadrement des normes

Proposition 6 (Équivalence des normes). *Pour tout $x \in \mathbb{R}^2$,*

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{2} \|x\|_\infty.$$

En conséquence $D_\rho \subset Q_\rho \subset D_{\sqrt{2}\rho}$, et

$$d_H(\partial D_\rho, \partial Q_\rho) = (\sqrt{2} - 1)\rho,$$

atteinte aux coins du carré.

Démonstration. Avec $x = (x_1, x_2)$, $\max|x_i|^2 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq 2 \max|x_i|^2$. Un coin du carré est à distance $\sqrt{2}\rho$ du centre, donc à $(\sqrt{2} - 1)\rho$ du cercle, et c'est le point de ∂Q_ρ le plus éloigné de ∂D_ρ . Inversement, le point du cercle le plus éloigné du carré est à l'angle $\pi/4$, à distance $\rho(1 - 1/\sqrt{2}) < (\sqrt{2} - 1)\rho$ du bord du carré. $\square$

Un grain carré est une boule de la norme du maximum, un grain rond une boule de la norme euclidienne. La grille du grain, $\Pi(\delta, \delta) = \delta\tilde{\mathbb{Z}} + i\delta\tilde{\mathbb{Z}}$, est naturellement carrée : elle est liée à la norme du maximum, tandis que le cercle vient de la norme euclidienne. Le facteur $\sqrt{2}$ est standard : c'est pourquoi les deux formes sont toujours de même strate. Mais l'écart absolu $(\sqrt{2} - 1)\rho$ peut compter un nombre illimité de points de résolution : c'est pourquoi elles peuvent se distinguer.

4 La forme relativement au niveau d'observation

On représente un grain d'épaisseur δ par un cercle de circonférence δ , de rayon $\rho = \delta/2\pi$, comme dans le *Niveau d'observation* [2].

Théorème 7 (Rond ou carré selon le niveau). *Au niveau d'observation g_f :*

1. Le point. g_f° et $g_f^\square$ sont indiscernables.
2. Le cercle élémentaire. g_g° et $g_g^\square$ sont discernables : leur écart compte un nombre illimité de points de résolution.
3. L'horizon. $g_{g^+}^\circ$ et $g_{g^+}^\square$ sont discernables globalement, mais localement indiscernables sur une fenêtre de la taille du cercle élémentaire centrée en chacun des quatre points de contact.

Démonstration. Par la proposition 6, l'écart vaut $(\sqrt{2} - 1)\rho$ avec $\rho = \delta/2\pi$, soit, en points de résolution, $\frac{\sqrt{2}-1}{2\pi} \cdot \frac{\delta}{\delta_f}$.

Point 1. $\delta = \delta_f$: l'écart vaut $\frac{\sqrt{2}-1}{2\pi} \approx 0,066 < 1$ point de résolution.

Point 2. $\delta = \delta_g = 2^{n_\infty} \delta_f$: l'écart vaut $\frac{\sqrt{2}-1}{2\pi} 2^{n_\infty}$, illimité.

Point 3. Globalement, l'écart vaut $\frac{\sqrt{2}-1}{2\pi} 2^{2n_\infty}$, illimité. Localement, près du point de contact O , le côté du carré est la tangente au cercle en O , et l'écart entre le cercle et sa

tangente à la distance ℓ de O est la flèche $f(\ell) \leq \ell^2/(2R)$, avec $R = 2^{2n_\infty}/2\pi$ en points de résolution ([2], lemme de la flèche). Sur une fenêtre $|\ell| \leq 2r$, où $r = 2^{n_\infty}/2\pi$ est le rayon du cercle élémentaire, $f(\ell) \leq \frac{(2r)^2}{2R} = \frac{4 \cdot 2^{2n_\infty}/4\pi^2}{2 \cdot 2^{2n_\infty}/2\pi} = \frac{1}{\pi} < 1$ ([2], théorème « objet circulaire, horizon rectiligne »). Il en va de même aux trois autres points de contact, par rotation. $\square$

Remarque 8 (Une fenêtre infinitésimale). La fenêtre de rectitude a une longueur relative $2r/R = 2 \cdot 2^{-n_\infty}$, infinitésimale : elle ne s'approche pas des coins. Le carré circonscrit n'est donc pas « équivalent » à C_∞ globalement ; il ne lui est équivalent qu'au voisinage des quatre points de contact, là où C_∞ est une droite à l'infini.

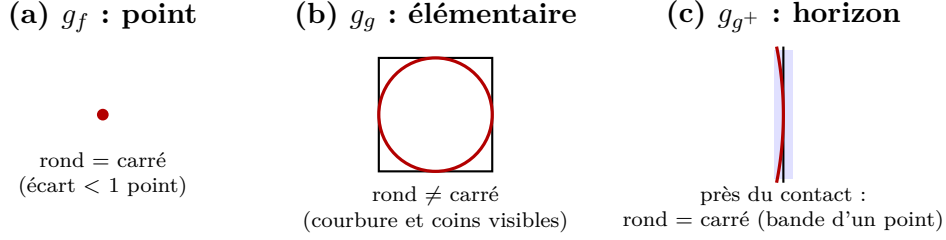


FIGURE 2 – La forme d'un grain au niveau d'observation g_f . (a) Le grain g_f est ponctuel : sa forme n'est pas visible. (b) Le cercle élémentaire se distingue de son carré circonscrit. (c) À l'horizon, près d'un point de contact, le cercle et le côté du carré restent dans une bande d'un point de résolution.

Corollaire 9 (Règle générale). *Pour un grain de niveau $-kn_\infty$ observé au niveau d'observation $-jn_\infty$:*

- si $k \geq j$ (grain ponctuel ou plus fin), rond et carré sont indiscernables ;
- si $k = j - 1$ (cercle élémentaire), ils sont discernables ;
- si $k \leq j - 2$, ils sont discernables globalement et localement indiscernables près des points de contact, sur une fenêtre de la taille du cercle élémentaire.

Démonstration. L'écart en points de résolution vaut $\frac{\sqrt{2}-1}{2\pi} 2^{(j-k)n_\infty}$; pour la fenêtre, on applique la flèche comme au point 3, avec un cercle de $2^{(j-k)n_\infty}$ points, dont la flèche reste inférieure à un point sur une fenêtre de l'ordre de $2^{(j-k)n_\infty/2}$ points, qui contient le cercle élémentaire dès que $j - k \geq 2$. $\square$

5 Le plan complexe

Dans le plan complexe en lecture à deux résolutions, $\Pi(\delta_f, \delta_g)$, la cellule élémentaire est un rectangle $\delta_f \times \delta_g$, de rapport 2^{n_∞} . Son pendant « rond » n'est pas un cercle mais une *ellipse*, d'axes dans le même rapport.

Proposition 10 (Transport par la lecture normée). *L'application $\Phi(x, y) = (x/\delta_f, y/\delta_g)$ envoie la grille $\Pi(\delta_f, \delta_g)$ sur le réseau des indices $\mathbb{Z}^2$, le rectangle $\delta_f \times \delta_g$ sur le carré unité, et l'ellipse inscrite sur le disque inscrit. Dans la lecture normée, où chaque axe est gradué par son propre point de résolution [3], le théorème 7 et le corollaire 9 s'appliquent tels quels aux grains rectangulaires et elliptiques.*

Démonstration. Φ est linéaire et bijective ; elle envoie les rectangles alignés sur les axes sur des carrés et les ellipses alignées sur des cercles. Dans le réseau des indices, le point de résolution est la cellule unité sur chaque axe, comme dans le plan réel. $\square$

Remarque 11 (En longueurs). Sans la lecture normée, au seul niveau d'observation g_f , la cellule est ponctuelle dans la direction réelle (largeur δ_f) et élémentaire dans la direction imaginaire (hauteur $2^{n_\infty}\delta_f$) : la discernabilité de sa forme dépend alors de la direction. C'est une manifestation de plus des deux niveaux d'observation congruents du plan complexe.

6 Synthèse

- Topologiquement, grain rond et grain carré sont toujours équivalents (proposition 3) ; en ordre de grandeur, ils le sont dans toute strate (proposition 4).
- Le côté du carré circonscrit est le diamètre, non la rectification du cercle (remarque 5).
- L'encadrement $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{2}\|x\|_\infty$ donne l'écart exact $(\sqrt{2}-1)\rho$ (proposition 6).
- À la résolution près, les deux formes coïncident quand le grain est ponctuel, se distinguent quand il est cercle élémentaire, et ne coïncident que localement à l'horizon (théorème 7, corollaire 9) : la forme d'un grain est relative au niveau d'observation.
- Dans le plan complexe, la lecture normée transporte ces résultats aux grains rectangulaires et elliptiques (proposition 10).

Références

- [1] H. Genvrin, *Théorie du grain*, manuscrit, 2026.
- [2] H. Genvrin, *Niveau d'observation*, manuscrit, 2026.
- [3] H. Genvrin, *Plan complexe et grain nul*, manuscrit, 2026.
- [4] H. Genvrin, *Une famille de boucles circulaires emboîtées : homéomorphismes, formule de Viète et statut topologique du cercle*, 2004.