

L'inégalité de Heisenberg dans la théorie du grain

Un principe d'incertitude discret sur une grille de 2^{n_∞} grains

Hugues Genvrin

Octobre 2026

Résumé

Nous proposons une lecture de l'inégalité de Heisenberg dans la théorie du grain. Le point de départ est un raisonnement qualitatif de l'auteur : la position et l'impulsion sont couplées, et connaître l'une avec précision rend l'autre de plus en plus imprécise, jusqu'à l'infini. Nous conservons cette intuition, mais nous en remplaçons le mécanisme : l'inégalité ne vient pas d'une déformation par rapport au temps, elle porte sur un état à un instant donné, et elle vient de ce que la position et l'impulsion sont reliées par un quart de tour, la transformée de Fourier. Sur une grille de N grains, un principe d'incertitude discret, dû à Donoho et Stark, affirme que le nombre de grains occupés en position multiplié par le nombre de grains occupés en impulsion est au moins N . Nous en donnons une démonstration élémentaire, et nous montrons que les états qui l'atteignent sont exactement les sous-grilles congruentes : la congruence arithmétique de la théorie du grain est la forme exacte de l'incertitude minimale. Traduit dans l'espace des phases, le résultat dit qu'un état occupe au moins N grains d'aire h/N , soit une aire h . Avec $N = 2^{n_\infty}$, une position connue à un grain près laisse l'impulsion étalée sur tout l'axe. Nous expliquons enfin l'origine du facteur $\frac{1}{2}$ de la borne $h/2$, qui tient à l'écart entre deux ordres de composition.

Table des matières

1	Introduction	2
1.1	Le raisonnement de départ	2
1.2	Ce que nous gardons, ce que nous remplaçons	2
2	Pourquoi le mécanisme temporel ne convient pas	2
3	Le quart de tour de Fourier sur une grille de N grains	3
3.1	La grille des positions	3
3.2	Le principe d'incertitude discret	3
3.3	Les états d'incertitude minimale sont les sous-grilles congruentes	4
4	Traduction dans l'espace des phases	5
4.1	Un état occupe au moins une aire h	5
4.2	Avec $N = 2^{n_\infty}$: le fin et le grossier	5
5	L'origine du facteur $\frac{1}{2}$	5
6	Synthèse	6

1 Introduction

1.1 Le raisonnement de départ

Notations. L’auteur note p la position et q la quantité de mouvement. Nous suivons dans ce texte la convention usuelle de la mécanique quantique, q pour la position et p pour l’impulsion, et traduisons son raisonnement dans cette convention.

L’auteur propose le raisonnement qualitatif suivant. Le vecteur position est affecté d’un jacobien hyperfini de rapport 2^{n_∞} , dû à la rotation dilatatoire de l’espace, qui fait passer d’un grain fin à un grain grossier. La quantité de mouvement est, elle aussi, une déformation jacobienne de la position par rapport au temps, et ses variations impriment à la position un jacobien d’ordre deux par rapport au temps :

$$d^2q = \frac{1}{m} p'(t) dt^2$$

(dans la notation de l’auteur, $d^2p = q'(t) dt^2$, la masse étant prise égale à 1). C’est la loi de Newton : la variation de l’impulsion, c’est-à-dire la force, détermine la dérivée seconde de la position. Ces deux déformations ne se composent pas : elles sont couplées. Si l’on connaît l’impulsion avec précision, la position se trouve étalée sur l’espace entier, dilaté d’un facteur 2^{2n_∞} ; si l’on connaît la position avec précision, la déformation due à l’impulsion devient trop faible pour être calculée. L’auteur se demande enfin comment retrouver la constante $\hbar/2$, et si deux tours de rotation pourraient expliquer le facteur $\frac{1}{2}$.

1.2 Ce que nous gardons, ce que nous remplaçons

Trois éléments de ce raisonnement sont justes et seront conservés :

- la position et l’impulsion sont *couplées*, et non deux grandeurs indépendantes mal mesurées ;
- la précision de l’une se paie par l’imprécision de l’autre, jusqu’à une indétermination totale ;
- ce compromis est celui d’un axe fin et d’un axe grossier, et le facteur 2^{n_∞} y a sa place.

Le mécanisme proposé, en revanche, ne correspond pas à ce qui produit l’inégalité. La section 2 explique pourquoi, et les sections suivantes le remplacent par un mécanisme qui s’exprime entièrement dans la théorie du grain : une grille de N grains, et le quart de tour de Fourier qui échange ses deux lectures. Il prolonge le document *Du monde du grain au monde expérimental* [5], où la cellule de Heisenberg apparaissait comme grain rectangle d’un état comprimé.

2 Pourquoi le mécanisme temporel ne convient pas

Remarque 1 (L’inégalité porte sur un instant). L’inégalité de Heisenberg

$$\Delta q \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

porte sur l’état d’un système à *un instant donné*. Elle ne fait intervenir ni l’évolution de la position au cours du temps, ni ses dérivées temporelles. En mécanique quantique, l’impulsion n’est pas définie par $p = m dq/dt$, puisqu’il n’y a pas de trajectoire ; elle l’est par

$$p = -i\hbar \frac{d}{dq},$$

une dérivée par rapport à la *position*, non au temps. Les différentielles du raisonnement de départ sont correctes : elles décrivent la dynamique classique d'une trajectoire, la vitesse au premier ordre et la loi de Newton au second. Mais c'est précisément ce qui les éloigne de l'inégalité de Heisenberg, qui ne porte pas sur une trajectoire ni sur son évolution, et qui vaut pour un état à un seul instant, sans aucune dérivée temporelle.

Remarque 2 (L'inégalité est symétrique). Dans le raisonnement de départ, les deux variables jouent des rôles différents : l'une porte le jacobien hyperfini, l'autre une déformation « marginale ». Or l'inégalité de Heisenberg est symétrique : on peut échanger la position et l'impulsion. Un mécanisme qui les traite différemment ne peut pas en rendre compte. Ce qui relie les deux variables est un quart de tour, la transformée de Fourier, et un quart de tour traite les deux axes à égalité (section 3).

Remarque 3 ($\hbar$ est une action). $\hbar$ a la dimension d'une énergie multipliée par un temps, ou d'une position multipliée par une impulsion : c'est une *action*. Une énergie élémentaire serait par exemple $\hbar\Omega$ pour un oscillateur de pulsation Ω . Si l'on associe $\hbar$ à un grain, c'est donc comme *aire* d'une cellule de l'espace des phases (q, p) , et c'est ce que nous ferons (section 4).

3 Le quart de tour de Fourier sur une grille de N grains

3.1 La grille des positions

On se place sur le situs circulaire de la théorie du grain : l'axe des positions est une grille périodique de N grains, de pas δ , sur une longueur $L = N\delta$. Un état est une fonction $f : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, où $f(j)$ est l'amplitude au grain j , c'est-à-dire en $q_j = j\delta$.

Définition 4 (Transformée de Fourier discrète).

$$(\mathcal{F}f)(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} f(j) e^{-2\pi i j k / N}, \quad k \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}.$$

La valeur $(\mathcal{F}f)(k)$ est l'amplitude de l'impulsion $p_k = k \frac{h}{L} = k \frac{h}{N\delta}$, où $h = 2\pi\hbar$.

La grille des impulsions a donc, elle aussi, N grains, de pas $h/(N\delta)$. C'est la quantification habituelle de l'impulsion dans une boîte périodique de longueur L .

Proposition 5 (Fourier est un quart de tour). 1. $\mathcal{F}$ est unitaire : $\|\mathcal{F}f\|_2 = \|f\|_2$ (Parseval).

2. $\mathcal{F}^2$ est la parité : $(\mathcal{F}^2 f)(j) = f(-j)$.

3. $\mathcal{F}^4 = \text{Id}$.

Démonstration. Ce sont des propriétés classiques. Pour le point 2, $(\mathcal{F}^2 f)(j) = \frac{1}{N} \sum_{k,\ell} f(\ell) e^{-2\pi i k(\ell+j)/N}$, et la somme sur k vaut N si $\ell \equiv -j$ et 0 sinon. Le point 3 s'en déduit. $\square$

On retrouve le cycle d'ordre 4 du *mouvement de rotation intrinsèque* [4] : un quart de tour échange la lecture en position et la lecture en impulsion, et son carré est le demi-tour. L'incertitude sera le prix de ce quart de tour.

3.2 Le principe d'incertitude discret

Théorème 6 (Donoho–Stark). Pour toute fonction $f : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ non nulle, notons s_q le nombre de grains où f n'est pas nulle et s_p le nombre de grains où $\mathcal{F}f$ n'est pas nulle. Alors

$$s_q \cdot s_p \geq N.$$

Démonstration. Pour tout k , l'inégalité triangulaire puis celle de Cauchy–Schwarz donnent

$$|(\mathcal{F}f)(k)| \leq \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j \in \text{supp } f} |f(j)| \leq \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{s_q} \|f\|_2.$$

Donc, en sommant sur les s_p grains où $\mathcal{F}f$ n'est pas nulle,

$$\|\mathcal{F}f\|_2^2 \leq s_p \max_k |(\mathcal{F}f)(k)|^2 \leq \frac{s_p s_q}{N} \|f\|_2^2.$$

Par Parseval, $\|\mathcal{F}f\|_2 = \|f\|_2 \neq 0$, d'où $1 \leq s_p s_q / N$. $\square$

Ce théorème est dû à Donoho et Stark [6]. Il est entièrement arithmétique : il ne fait intervenir ni limite, ni écart-type, seulement des nombres de grains.

3.3 Les états d'incertitude minimale sont les sous-grilles congruentes

Proposition 7 (Peignes). *Soit s un diviseur de N , et f l'indicatrice de la sous-grille des multiples de N/s :*

$$f(j) = \begin{cases} 1 & \text{si } N/s \text{ divise } j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors $\mathcal{F}f$ est proportionnelle à l'indicatrice de la sous-grille des multiples de s :

$$(\mathcal{F}f)(k) = \begin{cases} s/\sqrt{N} & \text{si } s \text{ divise } k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a $s_q = s$, $s_p = N/s$ et $s_q s_p = N$: l'inégalité du théorème 6 est une égalité.

Démonstration. $(\mathcal{F}f)(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{s-1} e^{-2\pi i m(N/s)k/N} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{s-1} e^{-2\pi i m k/s}$, somme géométrique qui vaut s si s divise k et 0 sinon. $\square$

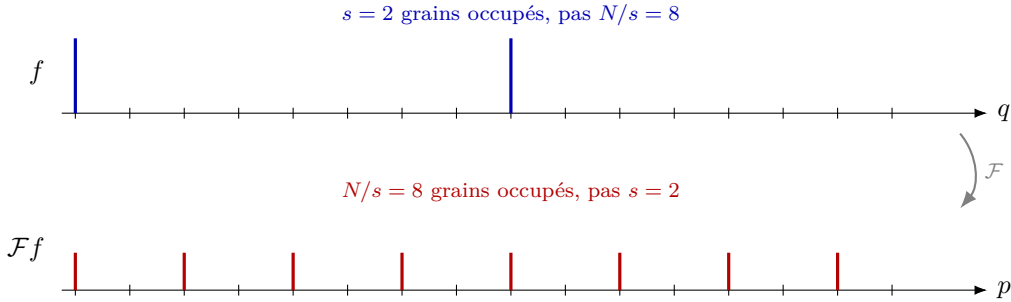


FIGURE 1 – Un peigne et sa transformée de Fourier ($N = 16$, $s = 2$). Le produit des nombres de grains occupés vaut N : l'incertitude est minimale. Avec $s = 1$ (un seul grain en position), la transformée occupe les N grains.

Remarque 8 (La congruence réalise l'incertitude minimale). Pour $N = 2^{n_\infty}$, les diviseurs de N sont les puissances de 2, et les peignes de la proposition 7 sont exactement les *sous-grilles congruentes* de la grille des positions : leur pas est un multiple entier du pas de la grille (*Niveau d'observation* [3], déf. 20). La transformée de Fourier échange une sous-grille de pas N/s en position et une sous-grille de pas s en impulsion : elle échange un niveau grossier et un niveau fin. La congruence arithmétique, qui démarquait le plan complexe du plan réel, est ainsi la forme exacte des états d'incertitude minimale.

4 Traduction dans l'espace des phases

4.1 Un état occupe au moins une aire h

Proposition 9 (Grains de l'espace des phases). *Sur la grille de la section 3, un grain de l'espace des phases est un rectangle de côtés δ (position) et $h/(N\delta)$ (impulsion), d'aire*

$$\delta \cdot \frac{h}{N\delta} = \frac{h}{N}.$$

Si un état occupe s_q grains en position et s_p grains en impulsion, ses étendues $X = s_q \delta$ et $P = s_p h/(N\delta)$ vérifient

$$X \cdot P \geq h.$$

Autrement dit, un état occupe au moins N grains de l'espace des phases, soit une aire au moins égale à h .

Démonstration. $XP = s_q s_p \cdot h/N \geq N \cdot h/N = h$ par le théorème 6. $\square$

On retrouve la cellule de Heisenberg comme aire élémentaire d'un état, et la constante h apparaît sans avoir été postulée ailleurs que dans le pas de la grille des impulsions.

4.2 Avec $N = 2^{n_\infty}$: le fin et le grossier

Corollaire 10 (Les deux extrêmes). *Soit $N = 2^{n_\infty}$.*

1. *Si la position est connue à un grain près ($s_q = 1$), l'impulsion occupe au moins 2^{n_∞} grains, c'est-à-dire tout l'axe : au niveau d'observation, elle est indéterminée.*
2. *Si l'impulsion est connue à un grain près ($s_p = 1$), la position occupe tout l'axe des positions.*
3. *L'état équilibré, pour lequel $s_q = s_p$, occupe au moins $2^{n_\infty/2}$ grains sur chaque axe.*

Démonstration. Les points 1 et 2 découlent de $s_q s_p \geq 2^{n_\infty}$ et de ce qu'aucun axe n'a plus de 2^{n_∞} grains. Pour le point 3, $s_q^2 \geq 2^{n_\infty}$. $\square$

Le point 1 est l'énoncé qualitatif de départ, rendu exact : une position précise laisse l'impulsion « infinie » au niveau d'observation. La symétrie des points 1 et 2 corrige l'asymétrie du raisonnement initial. Le facteur 2^{n_∞} y a bien sa place, mais comme *nombre de grains* de la grille, et non comme dilatation par rapport au temps.

Remarque 11 (Encore le mi-niveau). L'état équilibré occupe $2^{n_\infty/2}$ grains sur chaque axe : il vit au niveau de résolution $-n_\infty/2$, à mi-chemin entre deux strates, comme la fenêtre sur laquelle un cercle de 2^{n_∞} grains se confond avec sa tangente (*Niveau d'observation* [3]). C'est un vrai niveau de résolution si n_∞ est pair ; sinon $2^{n_\infty/2}$ contient un facteur $\sqrt{2}$ et l'on retient le niveau entier le plus proche.

5 L'origine du facteur $\frac{1}{2}$

La borne du théorème 6 porte sur des nombres de grains, et donne h . La borne habituelle porte sur des écarts-types, et donne $\hbar/2$. Voici d'où vient le facteur $\frac{1}{2}$.

Théorème 12 (Robertson [7]). *Pour deux observables A, B et un état normalisé $|\psi\rangle$, avec $\Delta A = \|(A - \langle A \rangle)\psi\|$ et de même pour B ,*

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle \psi, [A, B] \psi \rangle|.$$

Pour $A = q, B = p$ et $[q, p] = i\hbar$, on obtient $\Delta q \Delta p \geq \hbar/2$.

Démonstration. On peut supposer $\langle A \rangle = \langle B \rangle = 0$ (le commutateur ne change pas). Par Cauchy–Schwarz, $\Delta A \Delta B = \|A\psi\| \|B\psi\| \geq |\langle A\psi, B\psi \rangle|$. Un nombre complexe a un module au moins égal à celui de sa partie imaginaire :

$$|\langle A\psi, B\psi \rangle| \geq |\operatorname{Im}\langle A\psi, B\psi \rangle| = \frac{1}{2} |\langle A\psi, B\psi \rangle - \langle B\psi, A\psi \rangle| = \frac{1}{2} |\langle \psi, (AB - BA) \psi \rangle|.$$

□

Le $\frac{1}{2}$ vient donc de ce que l’on isole la partie imaginaire d’un nombre complexe : $\operatorname{Im} z = (z - \bar{z})/(2i)$. Autrement dit, il vient de l’écart entre deux ordres de composition, AB (« A puis B ») et BA (« B puis A »), dont on prend la demi-différence.

Remarque 13 (Une image dans la théorie du grain). Si l’on cherche une image de ce $\frac{1}{2}$ dans la théorie du grain, ce n’est pas celle de deux tours de rotation, mais celle de l’*aller-retour* de l’échange J de *Plan complexe et grain nul* [2] : un aller et un retour qui ne se compensent pas, dont l’écart produit le signe du demi-tour. Le commutateur $[q, p] = qp - pq$ est, de même, l’écart entre l’aller et le retour. Ce rapprochement est une analogie, non une démonstration.

Remarque 14 (Une coïncidence : 4π). Le rapport entre la borne en nombre de grains (h) et la borne en écarts-types ($\hbar/2$) vaut

$$\frac{h}{\hbar/2} = \frac{2\pi\hbar}{\hbar/2} = 4\pi,$$

l’angle de deux tours complets. Cela ne vient pas d’un mécanisme de rotation, mais de la différence entre deux façons de mesurer une largeur (étendue totale, ou écart-type) et du facteur 2π qui relie h à $\hbar$. Nous ne le présentons pas comme une explication du $\frac{1}{2}$.

Remarque 15 (Écarts-types sur la grille). Sur la grille périodique de la section 3, la version en écarts-types demande des précautions, parce que la position sur un cercle n’est pas une grandeur linéaire. Pour des états concentrés loin du bord (étendue petite devant L), on retrouve la borne $\hbar/2$ à un infinitésimal près ; la formulation exacte sur le situs reste à écrire.

6 Synthèse

Ce qui est établi.

- L’intuition de départ est juste : la position et l’impulsion sont couplées, et la précision de l’une se paie par l’imprécision de l’autre, jusqu’à l’indétermination totale.
- Le mécanisme est le quart de tour de Fourier entre les deux lectures d’une même grille, et non une déformation par rapport au temps.
- Sur une grille de N grains, le principe d’incertitude est une inégalité entre nombres de grains, $s_q s_p \geq N$; ses cas d’égalité sont les sous-grilles congruentes.
- Dans l’espace des phases, un état occupe au moins N grains d’aire h/N , soit une aire h . Avec $N = 2^{n_\infty}$, une position connue à un grain près laisse l’impulsion étalée sur tout l’axe.
- Le facteur $\frac{1}{2}$ de la borne $\hbar/2$ vient de la demi-différence entre les deux ordres de composition de q et p .

Questions ouvertes.

1. Écrire la version en écarts-types de l’incertitude sur le situs circulaire de 2^{n_∞} grains, et en préciser la promotion.

raisonnement de départ	version précise
position et impulsion couplées	reliées par un quart de tour, la transformée de Fourier ($\mathcal{F}^2 = \text{parité}$, $\mathcal{F}^4 = \text{Id}$)
précision de l'une, imprécision de l'autre	$s_q s_p \geq N$ (Donoho–Stark)
jusqu'à l'infini	position à un grain près : impulsion sur tout l'axe
jacobien hyperfini 2^{n_∞}	nombre de grains $N = 2^{n_\infty}$ de la grille
fin et grossier	peignes : sous-grilles congruentes, échangées par $\mathcal{F}$
$\hbar$ associé au grain	aire h/N d'un grain ; un état occupe au moins N grains, soit une aire h
deux tours pour le $\frac{1}{2}$	demi-différence de deux ordres de composition (Robertson)
mécanisme temporel (vitesse, loi de Newton)	différentielles correctes, mais l'inégalité porte sur un instant, sans dérivée temporelle

TABLE 1 – Du raisonnement qualitatif à sa version précise.

2. L'inégalité temps–énergie, qui n'a pas le même statut que celle de Heisenberg (le temps n'est pas une observable), peut-elle se lire comme une relation entre le niveau de résolution et la fréquence du mouvement de rotation intrinsèque ?
3. Les états d'incertitude minimale continus sont des gaussiennes, et non des peignes : comment les peignes de la grille se promeuvent-ils, et quel rôle joue le mi-niveau $2^{n_\infty/2}$ dans ce passage ?

Références

- [1] H. Genvrin, *Théorie du grain*, manuscrit, 2026.
- [2] H. Genvrin, *Plan complexe et grain nul*, manuscrit, 2026.
- [3] H. Genvrin, *Niveau d'observation*, manuscrit, 2026.
- [4] H. Genvrin, *Le plan complexe animé d'un mouvement de rotation intrinsèque*, manuscrit, 2026.
- [5] H. Genvrin, *Du monde du grain au monde expérimental*, manuscrit, 2026.
- [6] D. L. Donoho, P. B. Stark, « Uncertainty principles and signal recovery », *SIAM J. Appl. Math.* **49** (1989), 906–931.
- [7] H. P. Robertson, « The uncertainty principle », *Phys. Rev.* **34** (1929), 163–164.