

La notion d'espace

Du mythe à la cosmologie : une histoire raisonnée

Hugues Genvrin

Octobre 2026

Résumé

On retrace l'histoire de la notion d'espace, des récits cosmogoniques grecs à la cosmologie relativiste. Le fil conducteur est double : comment l'espace a été pensé — béance, réceptacle, lieu, vide, étendue, forme de la sensibilité, variété — et comment il a été mesuré — par le nombre, la figure, la distance, le groupe de transformations. Une place particulière est faite au *grain d'Archimède* : dans l'*Arénaire*, Archimède remplit l'univers de grains de sable et invente le système de numération qui permet de les compter ; dans la *Méthode*, il découpe les figures en tranches. On montre que cette idée du grain se prolonge jusqu'à l'analyse non standard, où le continu est approché par une grille de points infiniment serrée. Le texte distingue trois registres : les faits attestés, avec leurs sources ; les traditions légendaires, signalées comme telles ; et les interprétations propres à l'auteur, regroupées dans des encadrés et dans une section finale.

Table des matières

1	Méthode	2
2	Le récit des origines : Hésiode	2
3	Les présocratiques : principe, vide et continu	3
3.1	L'école de Milet	3
3.2	Les pythagoriciens	4
3.3	L'être, le vide et le continu	4
4	Platon et Aristote : réceptacle et lieu	4
4.1	Platon	4
4.2	Aristote	5
5	Alexandrie	5
5.1	Euclide	5
5.2	Le grain d'Archimède	6
5.2.1	L'Arénaire : remplir l'univers de grains	6
5.2.2	La Méthode : découper les figures en tranches	7
5.2.3	L'axiome d'Archimède : le grain et le continu	7
5.3	Mesurer la Terre et le ciel	8
6	Du monde clos à l'univers infini	8
7	Kant : l'espace comme forme de la sensibilité	9

8	L'ère des géométries	9
8.1	Les géométries non euclidiennes	9
8.2	Riemann	9
8.3	Le programme d'Erlangen	10
8.4	Poincaré : topologie et convention	10
9	L'espace et le vivant	10
10	L'espace de la cosmologie	11
10.1	Relativité et géométrie	11
10.2	Forme et situs : géométrie et topologie	11
11	Signes, symboles et sens	12
12	Les thèses de l'auteur	12
13	Chronologie	13

1 Méthode

L'histoire des sciences antiques repose sur des sources de nature très inégale. Pour les présocratiques, nous n'avons presque jamais les textes originaux : nous les connaissons par des *fragments* cités par des auteurs postérieurs, et par des *témoignages*, ou doxographie, rédigés parfois huit siècles plus tard (Diogène Laërce, III^e siècle de notre ère ; Jamblique, IV^e siècle ; Proclus, V^e siècle). Beaucoup d'anecdotes célèbres sont des légendes formées dans ces traditions tardives.

On distinguera donc trois registres :

- les *faits attestés*, avec leur source ;
- les *traditions*, que l'on rapporte en les signalant comme telles ;
- les *lectures de l'auteur*, présentées dans des encadrés et reprises dans la section 12.

Pour l'ensemble du sujet, l'ouvrage de référence reste Max Jammer, *Concepts of Space* (1954) ; pour les présocratiques, le recueil de Kirk, Raven et Schofield ; pour les mathématiques grecques, l'histoire de Heath.

2 Le récit des origines : Hésiode

La *Théogonie* d'Hésiode (vers 700 av. J.-C.) raconte la naissance du monde. Jean-Pierre Vernant en a donné une lecture qui fait de ce récit une genèse de l'espace (*L'Univers, les dieux, les hommes*, 1999).

1. **Khaos.** Au commencement est *Khaos*. Le mot ne désigne pas le néant : il vient du verbe *khainô*, « bâiller, s'ouvrir ». C'est une béance, un gouffre obscur sans fond ni direction.
2. **Gaïa.** Puis vient *Gaïa*, la Terre : une assise stable, aux formes définies, le contraire de la béance. Avec elle apparaissent le Tartare, dans ses profondeurs, et *Éros*, puissance qui fait sortir au jour ce qui était enfermé.
3. **Ouranos et Pontos.** Gaïa engendre seule *Ouranos*, le Ciel étoilé, les montagnes, et *Pontos*, le flot marin. Ouranos s'étend sur Gaïa et la recouvre entièrement ; leurs enfants ne peuvent sortir de son sein.
4. **La séparation.** *Kronos*, le plus jeune des Titans, mutile son père à l'aide d'une faucille. Ouranos s'écarte et se fixe au sommet du monde. Entre le Ciel et la Terre s'ouvre un espace libre, où les êtres peuvent apparaître et se succéder : le temps des générations commence.

Remarque. Il faut distinguer *Kronos*, le Titan qui sépare le Ciel de la Terre, et *Chronos*, le Temps personnifié. Les deux noms ont été rapprochés tardivement, dans l'Antiquité tardive puis à la Renaissance ; chez Hésiode, ce sont deux figures distinctes. Le lien entre la séparation et le temps tient chez Vernant à la succession des générations qu'elle rend possible, non au nom du dieu. Les Titans ne sont pas des êtres « mi-hommes mi-dieux » : ce sont des dieux de la première génération ; les demi-dieux sont les héros.

Lecture de l'auteur. Le récit présente deux phases. Dans la première, l'ordre se forme : la Terre donne une assise à la béance, les êtres sont engendrés mais restent enfermés, comprimés par l'étreinte du Ciel. Dans la seconde, la séparation ouvre un espace et la succession des générations devient irréversible. On peut y voir une image de l'apparition d'une flèche du temps, que la thermodynamique associe à l'entropie. Cette lecture est une métaphore, non une thèse d'Hésiode.

3 Les présocratiques : principe, vide et continu

Le monde grec antique s'étend, pour l'histoire des sciences, de Thalès (vers 600 av. J.-C.) à la prise d'Alexandrie par les Arabes (641). W. W. Rouse Ball souligne que les premiers savants grecs ont été guidés par les connaissances des Égyptiens et des Babyloniens : la science se développe en réseau, autour de foyers successifs.

3.1 L'école de Milet

Milet, cité ionienne d'Asie Mineure, était au VI^e siècle av. J.-C. un grand centre commercial, fondateur de nombreuses colonies, notamment autour de la mer Noire. Elle fut détruite par les Perses en 494 av. J.-C., après la révolte de l'Ionie. Ses trois penseurs cherchent un *principe* (*arkhê*) d'où tout procède. Aristote les appelle les *physiologues* : ceux qui discourent sur la nature (*phusis*).

Thalès (vers 625 – vers 545 av. J.-C.). Thalès n'a rien laissé d'écrit qui nous soit parvenu. Selon Aristote, il tenait l'eau pour le principe de toutes choses (*Métaphysique* A, 3) et disait que l'aimant a une âme, puisqu'il meut le fer (*De l'âme* I, 2) ; Diogène Laërce ajoute l'ambre. Proclus, d'après Eudème, lui attribue plusieurs théorèmes de géométrie, et l'usage de l'égalité des triangles pour déterminer la distance des navires en mer (*Commentaire sur le premier livre d'Euclide*). Il s'agit de géométrie des triangles, non de trigonométrie, qui n'apparaît qu'avec Hipparque au II^e siècle av. J.-C. Diogène Laërce lui attribue aussi la division de l'année en 365 jours et la mesure de la hauteur des pyramides par leur ombre. La tradition qui en fait l'un des Sept Sages est ancienne ; son origine phénicienne est rapportée par Hérodote.

Anaximandre (vers 610 – vers 545 av. J.-C.). Anaximandre pose comme principe l'*apeiron* : l'illimité, l'indéterminé, d'où naissent les contraires et où ils retournent. Le principe n'est plus une substance déterminée comme l'eau. Diogène Laërce lui attribue l'introduction en Grèce du gnomon, la tige du cadran solaire, et la première carte du monde habité.

Surtout, Anaximandre donne le premier argument *spatial* de l'histoire. Selon Aristote (*Du ciel* II, 13, 295b), il soutenait que la Terre reste immobile au centre du monde « à cause de la similitude » (*homoiotês*) : placée à égale distance de tous les points de la périphérie, elle n'a aucune raison de se mouvoir dans une direction plutôt que dans une autre. C'est un argument de *symétrie*, ou de raison suffisante : l'espace qui l'entoure étant le même dans toutes les directions, rien ne la fait pencher.

Anaximène (vers 585 – vers 525 av. J.-C.). Anaximène revient à un principe matériel, l'air, mais explique les transformations de la matière par deux processus : la *raréfaction*, qui donne le feu, et la *condensation*, qui donne le vent, l'eau, la terre, la pierre. Schrödinger, dans *Nature and the Greeks* (1954), y voit l'idée qu'un changement d'état ne change pas la nature de la matière mais dépend du volume qu'elle occupe : une explication géométrique des qualités.

3.2 Les pythagoriciens

Pythagore (vers 570 – vers 495 av. J.-C.) naît à Samos et fonde à Crotone, en Italie du Sud, une communauté à la fois religieuse, politique et savante. Il n'a rien écrit ; la plupart des récits sur sa vie — vingt-deux ans en Égypte, douze à Babylone, une rencontre avec Zoroastre, l'enseignement reçu de Thalès — viennent de biographies tardives, notamment celle de Jamblique, et relèvent de la légende.

Les doctrines attestées concernent l'école plus que son fondateur : « tout est nombre », l'harmonie musicale exprimée par des rapports d'entiers (2 : 1 pour l'octave, 3 : 2 pour la quinte), et l'usage du mot *kosmos*, « ordre, arrangement », pour désigner le monde. La relation entre l'hypoténuse et les côtés de l'angle droit était connue des Babyloniens plus de mille ans auparavant, comme le montre la tablette Plimpton 322 (vers 1800 av. J.-C.) ; on ignore si Pythagore en a donné une démonstration.

La découverte de l'*incommensurabilité* — la diagonale du carré n'a pas de commune mesure avec le côté — est attribuée à l'école pythagoricienne, probablement au V^e siècle av. J.-C. ; une légende en fait le secret divulgué par Hippias de Métaponte. Le grec dira d'une telle grandeur qu'elle est *alogos*, « sans rapport », ou *arrhêtos*, « inexprimable ». Elle ruine l'espoir d'exprimer toute grandeur par un rapport d'entiers.

3.3 L'être, le vide et le continu

Parménide (début du V^e siècle av. J.-C.) oppose la voie de l'être à celle du non-être : l'être est, le non-être n'est pas. Il en résulte que le vide, qui serait du non-être, n'existe pas, et que l'être est continu, plein, immobile.

Zénon d'Élée, son disciple, défend cette thèse par des paradoxes célèbres. La *dichotomie* : pour parcourir une distance, il faut d'abord en parcourir la moitié, puis la moitié du reste, et ainsi de suite à l'infini. *Achille et la tortue*, la *flèche*, et les paradoxes de la pluralité montrent les difficultés d'un espace composé soit de parties indivisibles, soit de parties indéfiniment divisibles. C'est la première formulation du problème du *continu*, qui ne sera résolu mathématiquement qu'au XIX^e siècle avec les séries et la construction des nombres réels.

Les atomistes. Leucippe et Démocrite (V^e siècle av. J.-C.) répondent à Parménide en admettant le non-être : le monde est fait d'*atomes*, corps insécables, et de *vide* (*to kenon*), qui n'existe « pas moins » que les corps (Aristote, *Métaphysique* A, 4). C'est la première conception d'un espace vide distinct de ce qu'il contient, et la première théorie du *grain* de la matière.

4 Platon et Aristote : réceptacle et lieu

4.1 Platon

Remarque. La formule « Que nul n'entre ici s'il n'est géomètre », que l'on dit inscrite à l'entrée de l'Académie, n'est attestée que dans des commentaires tardifs, plusieurs siècles après Platon. Il en va de même de l'idée que Platon aurait imposé la seule règle et le seul compas : aucun texte de Platon ne le dit ; la restriction se lit dans les postulats d'Euclide.

Dans le *Timée* (vers 360 av. J.-C.), Platon introduit un « troisième genre », à côté des formes intelligibles et des choses sensibles : la *khôra*, le *réceptacle* ou la *place*, « nourrice du devenir », qui reçoit toutes les formes sans en avoir aucune en propre (48e–52d). C’est la première tentative philosophique de penser l’espace comme tel.

Platon y associe les quatre éléments à quatre polyèdres réguliers, construits à partir de triangles élémentaires (53c–56c) :

Élément	Polyèdre	Faces
Feu	tétraèdre	4 triangles
Air	octaèdre	8 triangles
Eau	icosaèdre	20 triangles
Terre	cube	6 carrés

Le dodécaèdre, à douze faces pentagonales, est employé par le dieu « pour l’univers » (55c). L’élément *éter*, qu’Aristote ajoutera comme cinquième élément propre aux corps célestes, ne sera associé au dodécaèdre que par des auteurs postérieurs. Selon une scholie au livre XIII d’Euclide, l’octaèdre et l’icosaèdre ont été étudiés par Théétète, contemporain de Platon ; Euclide démontre à la fin des *Éléments* qu’il n’existe que cinq polyèdres réguliers convexes.

Chez les Grecs, *summetria* signifie la *commensurabilité* — l’existence d’une commune mesure — et, par extension, la juste proportion ; son contraire est *ametria*. Le sens moderne de « symétrie » — l’invariance d’une figure sous une transformation — ne s’imposera qu’au XIX^e siècle.

4.2 Aristote

Aristote (384–322 av. J.-C.) traite de l’espace sous le nom de *lieu* (*topos*) au livre IV de la *Physique*. Le lieu d’un corps est « la limite immobile première du contenant » (212a20) : la surface intérieure de ce qui l’entoure. Il n’y a pas d’espace sans corps, et Aristote réfute longuement l’existence du vide (IV, 6–9). Au livre VI, il établit que toute grandeur continue est divisible à l’infini, et répond ainsi à Zénon : le continu n’est pas composé de points.

Le cosmos aristotélicien est fini, sphérique, centré sur la Terre. Il est divisé en deux régions : le monde sublunaire des quatre éléments, du changement et de la corruption ; le monde céleste, fait d’éther, où les mouvements sont circulaires et éternels (*Du ciel*). Cet espace est *hétérogène* : le haut et le bas, le centre et la périphérie sont des lieux naturels qui ont des propriétés physiques différentes.

5 Alexandrie

5.1 Euclide

Les *Éléments* d’Euclide (vers 300 av. J.-C.) organisent la géométrie en un système déductif : définitions, postulats, notions communes, puis propositions démontrées. Le cinquième postulat — par un point extérieur à une droite passe une parallèle et une seule, dans sa forme moderne — restera pendant deux mille ans l’objet de tentatives de démonstration.

Deux livres concernent directement la mesure.

- Le **livre V** expose la théorie des proportions d’Eudoxe de Cnide. Elle permet de comparer des rapports de grandeurs même incommensurables : c’est la partie la plus abstraite des *Éléments*, et elle anticipe la définition des nombres réels par Dedekind (1872).
- Le **livre X** classe les grandeurs *commensurables* (*summetra*) et *incommensurables*, « en longueur » ou « en puissance » — c’est-à-dire par leurs carrés. Sa classification des irrationnelles quadratiques peut se lire aujourd’hui en termes d’extensions de corps.

La définition 4 du livre V contient l'axiome qui portera le nom d'Archimède (section 5.2).

5.2 Le grain d'Archimède

Archimède de Syracuse (vers 287–212 av. J.-C.) a, plus qu'aucun autre savant antique, pensé l'espace à travers le *grain*. Trois textes le montrent.

5.2.1 L'Arénaire : remplir l'univers de grains

L'*Arénaire* (*Psammitès*), adressé au roi Gélon de Syracuse, répond à ceux qui pensent que le nombre des grains de sable est infini, ou du moins qu'aucun nombre exprimable ne le dépasse. Le système grec de numération ne nomme pas de nombre au-delà de la *myriade* (10 000), et la myriade de myriades (10^8) est la limite du langage courant.

Le système de numération. Archimède construit une échelle de nombres sans limite :

- les nombres du *premier ordre* vont de 1 à 10^8 , la myriade de myriades ;
- 10^8 est l'unité du *deuxième ordre*, qui va jusqu'à $(10^8)^2 = 10^{16}$; de façon générale, le k -ième ordre va de $(10^8)^{k-1}$ à $(10^8)^k$;
- les ordres 1 à 10^8 forment la *première période*, qui s'achève à $P = (10^8)^{10^8}$;
- on recommence en prenant P pour unité : les périodes se succèdent jusqu'à la 10^8 -ième, qui s'achève au plus grand nombre nommé,

$$(10^8)^{10^{16}} = 10^{8 \times 10^{16}},$$

un 1 suivi de quatre-vingts millions de milliards de zéros.

C'est un système de numération de position en base 10^8 , à deux niveaux. Archimède y démontre l'équivalent de la règle $10^a \times 10^b = 10^{a+b}$: pour multiplier deux nombres de son échelle, on additionne leurs rangs.

Le calcul. Archimède majore le nombre de grains en procédant par changements d'échelle successifs. Il pose :

- une graine de pavot contient au plus une myriade (10^4) de grains de sable ;
- quarante graines de pavot alignées couvrent au moins la largeur d'un doigt ;
- un stade vaut moins de 10 000 doigts ;
- le diamètre du « cosmos » — la sphère centrée sur la Terre dont le rayon est la distance de la Terre au Soleil — est inférieur à 10^{10} stades ;
- le diamètre de la sphère des fixes, dans le système héliocentrique d'Aristarque de Samos qu'il discute, est inférieur à 10^{14} stades.

Le principe est que le volume d'une sphère est proportionnel au cube de son diamètre : multiplier le diamètre par 100 multiplie le nombre de grains par 10^6 .

Sphère de diamètre	Nombre de grains, au plus
1 doigt ($40^3 = 64\,000$ graines de pavot)	$6,4 \times 10^8 < 10^9$
100 doigts	10^{15}
10 000 doigts, plus d'un stade	10^{21}
100 stades	10^{27}
⋮	⋮
10^{10} stades : le cosmos	10^{51}
10^{14} stades : l'univers d'Aristarque	10^{63}

Dans son propre système, Archimède exprime le résultat final comme « mille myriades d'unités du huitième ordre » : $10^3 \times 10^4 \times (10^8)^7 = 10^{63}$.

Ce que montre l'Arénaire. Le texte établit trois choses. D'abord, un nombre très grand n'est pas infini : on peut le nommer et le majorer. Ensuite, l'univers lui-même, rempli de grains, reste dénombrable par un nombre fini. Enfin, la méthode est un passage du *grain* au *tout* par changements d'échelle maîtrisés : l'espace est pensé comme un volume pavé d'unités élémentaires, dont on compte le nombre par la loi des cubes. C'est aussi l'une des rares sources qui nous transmettent l'hypothèse héliocentrique d'Aristarque.

5.2.2 La Méthode : découper les figures en tranches

Le traité de la *Méthode relative aux théorèmes mécaniques*, adressé à Ératosthène, n'a été retrouvé qu'en 1906 par Johan Ludvig Heiberg, dans un palimpseste de Constantinople ; ce manuscrit a été réétudié par imagerie entre 1999 et 2008. Archimède y explique comment il *découvre* ses résultats avant de les démontrer : il considère une figure comme formée de toutes ses sections parallèles — un segment de parabole comme la somme des segments de droite qui le composent — et équilibre ces tranches sur un levier imaginaire. Il obtient ainsi, par exemple, l'aire du segment de parabole et le volume de la sphère.

Archimède ne tient pas ce procédé pour une démonstration : il démontre ensuite ses résultats par la *méthode d'exhaustion*, qui encadre la figure par des polygones ou des polyèdres et raisonne par double réduction à l'absurde. Mais la décomposition d'une figure en éléments sans épaisseur annonce les *indivisibles* de Cavalieri (1635), puis le calcul intégral.

5.2.3 L'axiome d'Archimède : le grain et le continu

Dans *De la sphère et du cylindre*, Archimède pose comme hypothèse que, de deux grandeurs inégales de même espèce, la différence ajoutée à elle-même un nombre suffisant de fois dépasse n'importe laquelle des deux. Sous sa forme moderne :

Définition 5.1 (Propriété d'Archimède). Un ensemble ordonné de grandeurs est *archimédien* si, pour toutes grandeurs $0 < a < b$, il existe un entier n tel que $na > b$.

Cet axiome exclut les grandeurs *infinitement petites* : aucune grandeur non nulle n'est si petite qu'un nombre fini de ses copies ne suffise à dépasser une grandeur donnée. Le grain le plus fin reste à l'échelle du tout. Les nombres réels sont archimédiens ; Hilbert (1899) fait de cette propriété un axiome explicite de la géométrie, et Veronese puis Hilbert construisent des géométries non archimédiennes.

Prolongement moderne : l'analyse non standard. Abraham Robinson (1961) a construit une extension ${}^*\mathbb{R}$ des nombres réels qui *n'est pas* archimédienne : elle contient des nombres infiniment petits non nuls et des entiers infiniment grands, dits hyperfinis. Si N_∞ est un tel entier, l'ensemble

$$G = \left\{ \frac{k}{N_\infty} : k \in {}^*\mathbb{Z}, |k| \leq N_\infty^2 \right\}$$

est une grille *hyperfinie* — elle se manipule comme un ensemble fini — dont le pas $1/N_\infty$ est infiniment petit, et dont tout nombre réel est infiniment proche d'un point. Le continu y apparaît comme la trace, à l'échelle ordinaire, d'un ensemble discret de grains infiniment fins. On peut y définir la mesure de Lebesgue en comptant des points de la grille (mesure de Loeb).

Lecture de l’auteur. L’idée d’Archimède — paver un volume de grains et en compter le nombre par changement d’échelle — se prolonge ainsi jusqu’à une construction rigoureuse du continu. L’auteur propose de décrire un continu par une grille de 2^{N_∞} éléments, où N_∞ est un paramètre hyperfini qui fixe la taille du grain ; un point de ce continu, de mesure nulle à l’échelle ordinaire, a une taille infinitésimale non nulle à l’échelle de la grille. L’analyse non standard fournit le cadre où cette idée est cohérente ; le programme est développé dans les *Travaux mathématiques* de l’auteur.

5.3 Mesurer la Terre et le ciel

Ératosthène (vers 276–194 av. J.-C.), directeur de la bibliothèque d’Alexandrie, mesure la circonférence de la Terre. Au solstice d’été, le Soleil est au zénith à Syène ; à Alexandrie, à 5 000 stades plus au nord, l’ombre d’un gnomon indique un écart de $1/50$ de cercle. Il en déduit, selon Cléomède, une circonférence de 250 000 stades ; Strabon et Pline rapportent le chiffre de 252 000 stades. La précision du résultat dépend de la longueur du stade utilisé, qui est incertaine ; selon l’hypothèse retenue, l’erreur va de quelques pour cent à une quinzaine de pour cent. On lui doit aussi le *crible* qui sépare les nombres premiers. Le calendrier julien, en revanche, n’est pas de lui : il est dû à l’astronome Sosigène d’Alexandrie, pour Jules César (46 av. J.-C.), et compte 365 jours et un quart, avec une année bissextile tous les quatre ans.

Hipparque (II^e siècle av. J.-C.) dresse la première table de cordes, ancêtre de la trigonométrie, et découvre la précession des équinoxes.

Ptolémée (II^e siècle de notre ère) rassemble l’astronomie grecque dans la *Composition mathématique*, connue sous le nom d’*Almageste*, de l’arabe *al-majisṭī*, lui-même issu du grec *megistê*, « la très grande ». En treize livres, il expose la trigonométrie des cordes et le système géocentrique des épicycles, qui restera la référence jusqu’à Copernic. Sa *Géographie* repère les lieux par leur latitude et leur longitude et propose deux projections de la sphère sur le plan : c’est le premier usage systématique de *coordonnées* pour décrire un espace.

6 Du monde clos à l’univers infini

Le titre est celui du livre d’Alexandre Koyré (1957), qui décrit le passage du cosmos fini et hiérarchisé d’Aristote à un univers infini et homogène.

- **Copernic** (*De revolutionibus*, 1543) place le Soleil au centre du monde.
- **Giordano Bruno** (*De l’infini, univers e mondi*, 1584) affirme un univers infini, peuplé d’une infinité de mondes.
- **Kepler** (*Mysterium cosmographicum*, 1596) emboîte les cinq polyèdres réguliers entre les sphères des six planètes connues : le dernier usage cosmologique des solides de Platon, avant qu’il ne découvre les orbites elliptiques (1609).
- **Descartes** identifie l’espace et la matière : l’essence du corps est l’étendue (*Principes de la philosophie*, 1644), et il n’y a pas de vide. Dans la *Géométrie* (1637), il ramène les problèmes de géométrie à des équations entre longueurs repérées sur des axes : c’est la naissance de la géométrie analytique.
- **Newton** (*Principia*, 1687) distingue l’espace absolu, « sans relation à rien d’extérieur », toujours semblable et immobile, des espaces relatifs que nous mesurons.
- **Leibniz**, dans sa correspondance avec Clarke, porte-parole de Newton (1715–1716), soutient au contraire que l’espace n’est que l’ordre des coexistences : un système de relations entre les choses, non une chose. Dès 1679, dans une lettre à Huygens, il appelle de ses vœux une *analysis situs*, une géométrie de la position qui ne passerait pas par les grandeurs.

- **Euler** résout en 1736 le problème des ponts de Königsberg : peut-on traverser les sept ponts une fois et une seule ? La réponse ne dépend ni des longueurs ni des formes, seulement de la manière dont les régions sont reliées. C'est le premier résultat de ce qui deviendra la théorie des graphes et la topologie.

7 Kant : l'espace comme forme de la sensibilité

Dans la *Critique de la raison pure* (1781), Kant fait de l'espace une *forme a priori de la sensibilité* : non une propriété des choses en elles-mêmes, ni un concept tiré de l'expérience, mais la condition sous laquelle nous percevons les objets extérieurs (« Esthétique transcendantale »). La géométrie euclidienne est pour lui un savoir synthétique a priori, fondé sur cette forme.

Deux distinctions kantienues intéressent notre sujet.

- Dans les « Axiomes de l'intuition », Kant distingue le *quantum*, un objet doué de grandeur, et la *quantitas*, la grandeur elle-même, ce qui répond à la question « combien ? ».
- La langue allemande distingue *Realität* et *Wirklichkeit*. Chez Kant, la *Realität* est une catégorie de la qualité : ce qui, dans le phénomène, correspond à une sensation ; la *Wirklichkeit*, l'effectivité, est une catégorie de la modalité : ce qui est lié aux conditions matérielles de l'expérience.

Dès 1768, dans l'essai *Du premier fondement de la différence des régions dans l'espace*, Kant avait souligné le problème des *figures énantiomorphes* : une main droite et une main gauche ont les mêmes grandeurs et les mêmes rapports entre leurs parties, et pourtant on ne peut les superposer. L'espace a donc une propriété — l'orientation — qui échappe à la seule mesure des distances.

8 L'ère des géométries

8.1 Les géométries non euclidiennes

Gauss, dans des notes restées privées, puis Lobatchevski (1829) et Bolyai (1832) construisent indépendamment une géométrie où, par un point extérieur à une droite, passent *plusieurs* parallèles : la géométrie hyperbolique. Elle est aussi cohérente que celle d'Euclide. Le cinquième postulat est indépendant des autres, et la géométrie euclidienne n'est plus la seule possible.

Un résultat de Wallis (1663) éclaire ce que le postulat contient : il est équivalent à l'existence de *figures semblables non égales*. Dans la géométrie hyperbolique, deux triangles qui ont les mêmes angles sont égaux ; il n'y a pas de similitude sans égalité. La notion de figure semblable — même forme, taille différente — est donc un trait propre à l'espace euclidien.

8.2 Riemann

Dans sa leçon d'habilitation de 1854, *Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie*, Riemann sépare deux notions :

- la *variété*, ensemble de points repérés localement par n coordonnées, sans notion de distance ;
- la *métrique*, donnée en chaque point par une forme quadratique

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij}(x) dx_i dx_j,$$

qui définit les longueurs des courbes.

La *courbure* mesure l'écart local à la géométrie euclidienne. En dimension 3, elle n'est pas donnée par un seul nombre : il faut six fonctions indépendantes (les composantes du tenseur de Ricci). Seuls les espaces à courbure *constante* — sphérique, euclidien, hyperbolique selon que la courbure est positive, nulle ou négative — sont caractérisés par un seul rayon de courbure. Riemann conclut que la géométrie de l'espace physique est une question empirique.

Remarque (Coordonnées et métrique). Changer de coordonnées ne change pas la géométrie. Les coordonnées cartésiennes et sphériques de l'espace euclidien donnent les mêmes distances : seul le repérage diffère. En revanche, la surface de la sphère et le plan ont des métriques différentes : aucune carte plane ne conserve toutes les distances (Gauss, 1827). La projection de Mercator (1569) conserve les angles mais dilate les longueurs avec la latitude.

8.3 Le programme d'Erlangen

Felix Klein (1872) propose de définir chaque géométrie par un *groupe de transformations* : la géométrie étudie les propriétés des figures qui restent *invariantes* sous ce groupe. Plus le groupe est grand, moins il reste d'invariants, et plus la géométrie est qualitative.

Géométrie	Transformations	Invariants
Euclidienne	isométries (déplacements, réflexions)	distances, angles
Des similitudes	isométries et homothéties	angles, rapports de distances
Affine	transformations affines	parallélisme, milieux, rapports sur une droite
Projective	transformations projectives	alignement, birapport
Topologie	homéomorphismes	connexité, nombre de trous, caractéristique d'Euler

Ce tableau ordonne précisément la distinction entre géométries *quantitatives* et *qualitatives*. Seules les deux premières reposent sur la distance ; les géométries affine et projective n'en ont pas, mais conservent des rapports ; la topologie ne conserve que des propriétés de position. Une similitude est la composée d'une homothétie et d'une isométrie. La *symétrie*, au sens moderne d'invariance, devient avec Klein le principe même de la géométrie, puis, au XX^e siècle, celui de la physique (théorème de Noether, 1918).

8.4 Poincaré : topologie et convention

Poincaré fonde la topologie algébrique dans l'*Analysis situs* (1895) : il étudie les variétés de toute dimension à déformation continue près, et leur associe des invariants algébriques. En 1904, il construit une variété de dimension 3 qui a les mêmes invariants d'homologie que la sphère sans lui être équivalente : l'*espace dodécaédrique de Poincaré*, obtenu en recollant les faces opposées d'un dodécaèdre.

Dans *La Science et l'hypothèse* (1902), il soutient que le choix d'une géométrie pour décrire l'espace physique est une *convention*, guidée par la commodité ; il y discute aussi l'origine des trois dimensions de l'espace dans nos sensations motrices.

9 L'espace et le vivant

À la fin du XIX^e siècle, plusieurs savants nés ou formés dans la région de la Baltique cherchent les fondements biologiques de la perception de l'espace et du temps.

- **Karl Ernst von Baer** (1792–1876), embryologiste à Dorpat (Tartu), suggère dans une conférence de 1860 que la durée du « moment » perçu varie d’une espèce à l’autre, et que le monde perçu en dépend.
- **Élie de Cyon** (Ilya Tsion, 1843–1912) étudie les canaux semi-circulaires de l’oreille interne. Il soutient que leur disposition dans trois plans à peu près orthogonaux est l’organe du « sens de l’espace » et l’origine de notre représentation d’un espace euclidien à trois dimensions (*Das Ohrlabyrinth als Organ der mathematischen Sinne für Raum und Zeit*, 1908 ; trad. fr. 1911). Il y voit une réponse à Kant.
- **Jakob von Uexküll** (1864–1944), né en Estonie, décrit l’*Umwelt* de chaque espèce : le monde propre que découpent ses organes des sens et d’action (*Umwelt und Innenwelt der Tiere*, 1909 ; *Mondes animaux et monde humain*, 1934).
- **Ivan Pavlov** (1849–1936), à Saint-Pétersbourg, étudie le *réflexe conditionnel* (en russe *uslovnyi refleks*, réflexe « soumis à condition » ; la traduction « conditionné » est inexacte mais répandue).

Remarque. La thèse de Cyon se heurte à plusieurs objections : les trois canaux ne sont pas exactement orthogonaux ; ils détectent les accélérations angulaires de la tête plutôt qu’ils ne représentent l’espace ; la perception de l’espace intègre la vision, le toucher et la proprioception ; enfin, la lamproie n’a que deux canaux semi-circulaires et la myxine un seul, et ces animaux s’orientent pourtant en trois dimensions. Poincaré, à la même époque, rattache plutôt la tridimensionnalité à l’organisation de nos mouvements.

Lecture de l’auteur. L’auteur voit dans ces travaux un mouvement épistémologique cohérent, qu’il appelle « école de la Baltique » : la pensée de l’espace et du temps s’appuie sur des structures biologiques adaptées à l’environnement de l’homme. La forme en trièdre des canaux semi-circulaires et le repère cartésien seraient deux expressions, biologique et intellectuelle, d’une même structure ; les unités de mesure anciennes — le pied, le pouce, la coudée, la base dix — témoignent d’une géométrie longtemps centrée sur le corps humain, jusqu’au mètre révolutionnaire (1791), défini à partir du méridien terrestre, et à sa définition actuelle par la vitesse de la lumière (1983). L’interprétation du réflexe conditionnel comme apprentissage probabiliste rejoint les modèles bayésiens actuels du conditionnement.

10 L’espace de la cosmologie

10.1 Relativité et géométrie

La relativité générale d’Einstein (1915) réalise le programme de Riemann : la géométrie de l’espace-temps n’est pas donnée a priori, elle est déterminée par la matière et l’énergie qu’il contient. Les modèles cosmologiques de Friedmann (1922) et de Lemaître (1927) décrivent un univers homogène et isotrope dont les sections spatiales sont à courbure constante : sphériques, euclidiennes ou hyperboliques. Les mesures actuelles indiquent une courbure spatiale très proche de zéro.

10.2 Forme et situs : géométrie et topologie

La géométrie locale ne détermine pas la forme globale de l’espace. Un espace localement euclidien peut être l’espace euclidien infini, mais aussi un tore à trois dimensions — un cube dont on recolle les faces opposées — ou l’une des dix variétés plates compactes de dimension 3. La *topologie cosmique* étudie cette question : Lachièze-Rey et Luminet en ont fait la synthèse en 1995. En 2003, Luminet et ses collaborateurs ont proposé l’espace dodécaédrique de Poincaré comme modèle de l’univers pour expliquer certaines anomalies du rayonnement fossile ; les

données ultérieures du satellite Planck n'ont pas confirmé ce modèle, mais la question de la topologie de l'univers reste ouverte.

Le dodécaèdre que Platon réservait « à l'univers » est ainsi revenu dans la cosmologie, comme brique d'un espace possible.

11 Signes, symboles et sens

L'auteur distingue trois espaces de représentation du monde : les signes, les symboles et le sens. Les outils de la sémiotique permettent de les préciser.

- Chez **Saussure** (*Cours de linguistique générale*, 1916), le signe linguistique unit un *signifiant*, l'image acoustique, et un *signifié*, le concept ; leur lien est arbitraire. Le flou et la pluralité des interprétations ne tiennent pas au signifiant, mais à la *connotation* (Barthes, 1964) ou à l'interprétation.
- Chez **Peirce**, un signe renvoie à son objet de trois façons : par ressemblance (*icône*), par une connexion réelle (*indice* : la fumée pour le feu), ou par convention (*symbole*). Ce que l'auteur appelle « signe » — un état du monde qui se donne — correspond de près à l'indice de Peirce, et son « symbole » au symbole de Peirce. Le troisième terme de Peirce, l'*interprétant*, correspond à ce que l'auteur appelle le *sens*.

12 Les thèses de l'auteur

Les propositions suivantes constituent un programme de recherche, distinct de l'histoire qui précède.

Thèse 1 (Espace et correspondance). Un espace est défini par un ensemble de relations de correspondance entre un *quantum* — un objet doué de grandeur, au sens de Kant — et des *quantités*.

Thèse 2 (Repérage et mesure). Toute détermination d'un objet dans un espace combine un repérage, qui relève d'une relation d'équivalence — deux objets sont déterminés de la même façon s'ils appartiennent à la même classe — et une mesure, qui fournit une fonction distance. Un même quantum peut porter plusieurs couples repérage-mesure, équivalents ou non.

Remarque. Une distance n'est pas une relation d'ordre : c'est une fonction d positive, symétrique, nulle seulement sur la diagonale et vérifiant l'inégalité triangulaire. Elle induit cependant un ordre sur les distances à un point donné. On évitera le mot « jauge », qui désigne en physique les théories de jauge, au profit de « repérage » et « métrique ».

Thèse 3 (Situs et locus). La forme globale de l'espace (le *situs*, sa topologie) et sa géométrie locale (sa métrique) sont deux déterminations distinctes ; la question de savoir si un *locus* peut exister sans situs reste ouverte.

Thèse 4 (Le grain du continu). Un continu peut être représenté comme un ensemble de 2^{N_∞} grains, où N_∞ est un entier hyperfini qui fixe la finesse du grain ; un point, de mesure nulle à l'échelle ordinaire, est un grain de taille infinitésimale. Cette thèse prolonge le geste d'Archimède dans l'*Arénaire* et la *Méthode*, et trouve son cadre rigoureux dans l'analyse non standard (section 5.2).

Thèse 5 (Espace et entropie). Les systèmes symboliques — et d'abord les mathématiques — sont porteurs de néguentropie : ils réduisent l'incertitude sur le monde. La représentation euclidienne de l'espace, adaptée à la structure biologique de l'homme, en est un premier exemple.

13 Chronologie

Date	Événement
vers 1800 av. J.-C.	Tablette Plimpton 322 : triplets pythagoriciens à Babylone
vers 700 av. J.-C.	Hésiode, <i>Théogonie</i>
VI ^e s. av. J.-C.	Thalès, Anaximandre, Anaximène à Milet ; Pythagore à Crotone
V ^e s. av. J.-C.	Parménide, Zénon ; Leucippe et Démocrite ; incommensurabilité
vers 360 av. J.-C.	Platon, <i>Timée</i> : la <i>khôra</i> , les polyèdres
IV ^e s. av. J.-C.	Aristote, <i>Physique</i> : le lieu, le continu, le refus du vide
vers 300 av. J.-C.	Euclide, <i>Éléments</i>
III ^e s. av. J.-C.	Archimède, <i>Arénaire</i> , <i>Méthode</i> ; Aristarque ; Ératosthène
II ^e s. av. J.-C.	Hipparque : table des cordes
II ^e s.	Ptolémée, <i>Almageste</i> et <i>Géographie</i>
1543	Copernic, <i>De revolutionibus</i>
1584	Bruno, l'univers infini
1596	Kepler, <i>Mysterium cosmographicum</i>
1635	Cavalieri, les indivisibles
1637, 1644	Descartes, <i>Géométrie</i> ; <i>Principes</i>
1663	Wallis : postulat des parallèles et similitude
1687	Newton, <i>Principia</i> : l'espace absolu
1715–1716	Correspondance Leibniz–Clarke
1736	Euler, les ponts de Königsberg
1768, 1781	Kant, les régions de l'espace ; <i>Critique de la raison pure</i>
1829, 1832	Lobatchevski, Bolyai : la géométrie hyperbolique
1854	Riemann, <i>Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie</i>
1872	Klein, programme d'Erlangen
1895, 1902	Poincaré, <i>Analysis situs</i> ; <i>La Science et l'hypothèse</i>
1899	Hilbert, <i>Fondements de la géométrie</i>
1906	Heiberg retrouve la <i>Méthode</i> d'Archimède
1908	Cyon, l'oreille interne comme organe du sens de l'espace
1909	Uexküll, <i>Umwelt und Innenwelt der Tiere</i>
1915	Einstein, relativité générale
1922, 1927	Friedmann, Lemaître : les modèles cosmologiques
1961	Robinson, l'analyse non standard
1995	Lachièze-Rey et Luminet, topologie cosmique

Références

- [1] Archimède, *Œuvres*, texte établi et traduit par C. Mugler, Les Belles Lettres, 4 vol., 1970–1972 (*L'Arénaire*, *La Méthode*, *De la sphère et du cylindre*).
- [2] Aristote, *Physique* ; *Du ciel* ; *De l'âme* ; *Métaphysique*.
- [3] W. W. Rouse Ball, *Histoire des mathématiques*, trad. L. Freund, Hermann, 1906–1907.
- [4] E. de Cyon, *Das Ohrlabyrinth als Organ der mathematischen Sinne für Raum und Zeit*, Springer, 1908 ; trad. fr. *L'Oreille, organe d'orientation dans le temps et dans l'espace*, Alcan, 1911.
- [5] Diogène Laërce, *Vies et doctrines des philosophes illustres*, trad. sous la dir. de M.-O. Goulet-Cazé, Le Livre de poche, 1999.
- [6] Euclide, *Les Éléments*, trad. et commentaires B. Vitrac, PUF, 4 vol., 1990–2001.

- [7] T. L. Heath, *A History of Greek Mathematics*, Oxford, 2 vol., 1921.
- [8] Hésiode, *Théogonie*, texte établi et traduit par P. Mazon, Les Belles Lettres.
- [9] M. Jammer, *Concepts of Space : The History of Theories of Space in Physics*, Harvard University Press, 1954.
- [10] E. Kant, *Critique de la raison pure* (1781); *Du premier fondement de la différence des régions dans l'espace* (1768).
- [11] F. Klein, *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen* (programme d'Erlangen), 1872.
- [12] A. Koyré, *Du monde clos à l'univers infini*, Gallimard, 1973 (éd. orig. 1957).
- [13] G. S. Kirk, J. E. Raven, M. Schofield, *Les Philosophes présocratiques*, trad. fr., Éditions universitaires de Fribourg / Cerf, 1995.
- [14] M. Lachièze-Rey, J.-P. Luminet, « Cosmic topology », *Physics Reports* 254, 1995.
- [15] J.-P. Luminet et al., « Dodecahedral space topology as an explanation for weak wide-angle temperature correlations in the cosmic microwave background », *Nature* 425, 2003.
- [16] J.-F. Mattéi, *Pythagore et les pythagoriciens*, PUF, coll. « Que sais-je ? », 1993.
- [17] R. Netz, W. Noel, *Le Codex d'Archimède*, trad. fr., JC Lattès, 2008.
- [18] Platon, *Timée*, trad. L. Brisson, GF-Flammarion.
- [19] H. Poincaré, « Analysis situs », *Journal de l'École polytechnique*, 1895; *La Science et l'hypothèse*, Flammarion, 1902.
- [20] Proclus, *Commentaire sur le premier livre des Éléments d'Euclide*, trad. P. Ver Eecke, Desclée de Brouwer, 1948.
- [21] B. Riemann, « Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen » (1854), publié en 1868.
- [22] A. Robinson, *Non-standard Analysis*, North-Holland, 1966.
- [23] F. de Saussure, *Cours de linguistique générale*, Payot, 1916.
- [24] E. Schrödinger, *Nature and the Greeks*, Cambridge University Press, 1954.
- [25] J. von Uexküll, *Mondes animaux et monde humain*, trad. fr., Denoël (éd. orig. 1934).
- [26] J.-P. Vernant, *L'Univers, les dieux, les hommes*, Seuil, 1999.