

Le mécanisme de promotion

De l'anneau partiel $\widetilde{\mathbb{R}}$ au corps des réels par localisation

Hugues Genzrin — Programme du grain

September 1, 2026

Abstract

On construit le corps $\mathbb{R}$ à partir de l'anneau partiel des grains $\widetilde{\mathbb{R}}$ par un mécanisme de *promotion* : on retient les éléments finis (anneau $\widetilde{\mathbb{R}}_{\text{fin}}$), on quotiente par l'idéal des infinitésimaux $\mathfrak{m}$, et l'on montre que le quotient $\widetilde{\mathbb{R}}_{\text{fin}}/\mathfrak{m}$ est un corps. La partie standard st est la projection canonique de ce quotient. La maximalité de $\mathfrak{m}$ est établie par une construction géométrique (théorème de Thalès) fournissant, pour tout élément non infinitésimal, un inverse à un infinitésimal près.

1 Les trois problèmes de la promotion

L'anneau partiel $\widetilde{\mathbb{R}}$ n'est pas un corps : certains éléments n'ont pas d'inverse. Pour en extraire le corps des réels, trois problèmes se posent.

1. **Écarter les infiniment grands.** Retirer les éléments X dont la taille dépasse toute puissance de deux, pour former l'anneau des finis $\widetilde{\mathbb{R}}_{\text{fin}}$.
2. **Isoler les infinitésimaux.** Les éléments X infiniment petits (dont l'inverse, lui, est infiniment grand) forment un ensemble $\mathfrak{m}$: on montrera que c'est un *idéal maximal* de $\widetilde{\mathbb{R}}_{\text{fin}}$.
3. **Inverser dans le quotient.** Assurer que tout élément non nul du quotient $\widetilde{\mathbb{R}}_{\text{fin}}/\mathfrak{m}$ est inversible — c'est-à-dire que $\widetilde{\mathbb{R}}_{\text{fin}}/\mathfrak{m}$ est un corps.

2 Définition des deux ensembles

Définition 1 (Anneau des finis).

$$\widetilde{\mathbb{R}}_{\text{fin}} = \{ X \in \widetilde{\mathbb{R}} : \exists m \in \mathbb{N}, |X| \leq 2^m \}.$$

Ce sont les éléments *majorés* par une puissance finie de deux — les éléments que l'on *garde*.

Définition 2 (Idéal des infinitésimaux).

$$\mathfrak{m} = \{ X \in \widetilde{\mathbb{R}}_{\text{fin}} : \forall m \in \mathbb{N}, |X| < 2^{-m} \} = \{ X \in \widetilde{\mathbb{R}}_{\text{fin}} : \text{st}(X) = 0 \}.$$

Ce sont les éléments dont la partie standard est nulle. En particulier $0 \in \mathfrak{m}$.

Remarque 1. On préfère la caractérisation directe $\text{st}(X) = 0$ à « X dont l'inverse est infiniment grand » : cette dernière rate 0 (qui n'a pas d'inverse) alors que $0 \in \mathfrak{m}$ nécessairement. Les deux coïncident sur $\mathfrak{m} \setminus \{0\}$.

3 $\mathfrak{m}$ est un idéal

Proposition 1. $\mathfrak{m}$ est un idéal de $\widetilde{\mathbb{R}}_{\text{fin}}$: il est stable par addition et absorbant pour la multiplication par un élément de $\widetilde{\mathbb{R}}_{\text{fin}}$.

Proof. Stabilité additive. Soient $X, Y \in \mathfrak{m}$ et $m \in \mathbb{N}$. Alors $|X| < 2^{-(m+1)}$ et $|Y| < 2^{-(m+1)}$, d'où par inégalité triangulaire $|X + Y| \leq |X| + |Y| < 2^{-(m+1)} + 2^{-(m+1)} = 2^{-m}$. Ceci valant pour tout m , $X + Y \in \mathfrak{m}$. De même $-X \in \mathfrak{m}$.

Absorption. Soient $X \in \mathfrak{m}$ et $A \in \widetilde{\mathbb{R}}_{\text{fin}}$. Comme A est fini, il existe m_0 tel que $|A| \leq 2^{m_0}$. Pour tout m , $|X| < 2^{-(m+m_0)}$, donc

$$|AX| = |A||X| \leq 2^{m_0} \cdot 2^{-(m+m_0)} = 2^{-m}.$$

Ceci valant pour tout m , $AX \in \mathfrak{m}$. Donc $\mathfrak{m}$ absorbe la multiplication par $\widetilde{\mathbb{R}}_{\text{fin}}$. $\square$

4 Inverse standard par Thalès

L'étape non formelle du mécanisme : construire géométriquement l'inverse de la partie standard.

Lemme 1 (Quasi-inverse par Thalès). Soit $X \in \widetilde{\mathbb{R}}_{\text{fin}}$ avec $X \notin \mathfrak{m}$, c'est-à-dire $\text{st}(X) = s \neq 0$. Alors il existe $Y \in \widetilde{\mathbb{R}}_{\text{fin}}$ tel que

$$XY - 1 \in \mathfrak{m},$$

autrement dit Y est un inverse de X modulo les infinitésimaux.

Proof. Puisque $\text{st}(X) = s \neq 0$, le réel standard s admet un inverse $1/s \in \mathbb{R}^*$. Géométriquement, ce $1/s$ se construit par le *théorème de Thalès* : sur deux droites concourantes en O , on porte s et l'unité 1 ; la configuration du quatrième proportionnel fournit le segment de longueur $1/s$ (le rapport $\frac{1}{s} = \frac{1}{s}$ est réalisé par proportionnalité $\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD}$ avec les longueurs bien choisies). Soit $Y \in \widetilde{\mathbb{R}}_{\text{fin}}$ un grain dont la partie standard est ce quatrième proportionnel : $\text{st}(Y) = 1/s$.

Vérifions que Y convient. La partie standard est un morphisme d'anneaux sur $\widetilde{\mathbb{R}}_{\text{fin}}$ (elle commute avec $+$ et $\cdot$), donc

$$\text{st}(XY) = \text{st}(X) \text{st}(Y) = s \cdot \frac{1}{s} = 1.$$

Par conséquent $\text{st}(XY - 1) = \text{st}(XY) - 1 = 1 - 1 = 0$, c'est-à-dire $XY - 1 \in \mathfrak{m}$ par la définition 2. $\square$

Remarque 2 (Lien avec l'écart 0,999...). Ce lemme dit que X n'a pas d'inverse *exact* dans $\widetilde{\mathbb{R}}_{\text{fin}}$ en général, mais un *quasi-inverse* Y tel que $XY = 1 + \varepsilon$ avec $\varepsilon \in \mathfrak{m}$ infinitésimal. C'est précisément le phénomène $3 \cdot \frac{1}{3} \rightarrow 0,999\dots$: le produit d'un grain par son quasi-inverse dyadique diffère de 1 d'un $\varepsilon \leq 1/2^{n\infty}$. L'inversion n'est exacte qu'après passage au quotient, où ε devient 0.

5 $\mathfrak{m}$ est maximal : le quotient est un corps

Théorème 1 (Promotion). $\mathfrak{m}$ est un idéal maximal de $\widetilde{\mathbb{R}}_{\text{fin}}$, et le quotient

$$\mathbb{R} \cong \widetilde{\mathbb{R}}_{\text{fin}}/\mathfrak{m}$$

est un corps. La projection canonique $\widetilde{\mathbb{R}}_{\text{fin}} \rightarrow \widetilde{\mathbb{R}}_{\text{fin}}/\mathfrak{m}$ est la partie standard st .

Proof. Il suffit de montrer que tout élément non nul du quotient est inversible ; un anneau commutatif unitaire dont tout élément non nul est inversible est un corps, et un idéal dont le quotient est un corps est maximal.

Soit $\overline{X} \in \widetilde{\mathbb{R}}_{\text{fin}}/\mathfrak{m}$ une classe *non nulle*, c'est-à-dire $X \notin \mathfrak{m}$, soit $\text{st}(X) \neq 0$. Par le lemme 1, il existe $Y \in \widetilde{\mathbb{R}}_{\text{fin}}$ avec $XY - 1 \in \mathfrak{m}$, c'est-à-dire, en passant aux classes,

$$\overline{X} \cdot \overline{Y} = \overline{XY} = \overline{1}.$$

Donc $\overline{Y}$ est l'inverse de $\overline{X}$ dans $\widetilde{\mathbb{R}}_{\text{fin}}/\mathfrak{m}$. Tout élément non nul du quotient étant inversible, $\widetilde{\mathbb{R}}_{\text{fin}}/\mathfrak{m}$ est un corps, et $\mathfrak{m}$ est maximal.

L'identification à $\mathbb{R}$ résulte de ce que st envoie $\widetilde{\mathbb{R}}_{\text{fin}}$ surjectivement sur $\mathbb{R}$ de noyau exactement $\mathfrak{m}$ (les éléments de partie standard nulle) ; le premier théorème d'isomorphisme donne $\widetilde{\mathbb{R}}_{\text{fin}}/\mathfrak{m} \cong \mathbb{R}$. $\square$

Remarque 3 (Anneau local). $\widetilde{\mathbb{R}}_{\text{fin}}$ est un *anneau local* : ses non-inversibles (modulo $\mathfrak{m}$) sont exactement les éléments de $\mathfrak{m}$, qui forment un idéal. Un anneau dont les non-inversibles forment un idéal a cet idéal pour *unique* maximal ; $\widetilde{\mathbb{R}}_{\text{fin}}$ est donc un anneau de valuation de corps résiduel $\mathbb{R}$. Cela fournit la maximalité sans autre calcul.

6 Structure des familles stratales

On montre ici que la strate limite (la plus fine) contient tous les réels définis aux niveaux supérieurs — ce qui donne un sens à « tous les grains se promeuvent ».

6.1 Emboîtement dyadique des strates

À chaque niveau k , la strate $\mathcal{G}_{-kn_\infty}$ découpe $[0, 1]$ en 2^{kn_∞} grains. La valeur réelle attachée au ℓ -ième grain se prend à son bord gauche :

$$v_k(\ell) = \frac{\ell}{2^{kn_\infty}}, \quad \ell \in \{0, 1, \dots, 2^{kn_\infty}\}.$$

On note $V_k = \{v_k(\ell) : 0 \leq \ell \leq 2^{kn_\infty}\}$ l'ensemble des réels portés par la strate de niveau k .

Lemme 2 (Raffinement croissant). *Passer du niveau k au niveau $k+1$ divise chaque grain en deux (puis, par itération, en 2^{n_∞}). Les bords anciens sont préservés, donc*

$$V_k \subseteq V_{k+1}.$$

Proof. Diviser en deux le grain $[v_k(\ell), v_k(\ell+1)]$ insère le point milieu mais conserve les deux bords. Formellement, $v_k(\ell) = \frac{\ell}{2^{kn_\infty}} = \frac{2\ell}{2^{(k+1)n_\infty}}$ pour le pas raffiné : tout $v_k(\ell)$ s'écrit $v_{k+1}(\ell')$ avec ℓ' entier (numérateur multiplié par le facteur de raffinement). Donc chaque réel du niveau k est un réel du niveau $k+1$: $V_k \subseteq V_{k+1}$. Le raffinement ne fait que *densifier* : il ajoute des positions sans en retirer. $\square$

Corollaire 1 (La strate limite contient tout). *La suite (V_k) est croissante, et sa réunion*

$$V_\infty = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} V_k$$

contient tous les réels dyadiques définis à un niveau fini quelconque. Par itération, la strate inférieure à toutes les strates contient tous les réels définis au-dessus d'elle.

Proof. Par le lemme 2, $V_0 \subseteq V_1 \subseteq V_2 \subseteq \dots$ est une chaîne croissante. Tout élément défini à un niveau k appartient à $V_k \subseteq V_\infty$. Réciproquement tout élément de V_∞ provient d'un V_k . La réunion est donc l'ensemble de tous les rationnels dyadiques de $[0, 1]$, dense dans $[0, 1]$. $\square$

Remarque 4 (Densification, non création). Le passage à une strate inférieure ne *crée* pas de nouveaux réels aux positions anciennes : il *densifie* l'intervalle en intercalant des positions. Les réels de la strate supérieure sont donc *conservés*, jamais perdus. C'est ce qui autorise à parler d'une strate limite « contenant » toutes les autres.

Remarque 5 (Ce que la limite n'atteint pas). V_∞ est l'ensemble des dyadiques de $[0, 1]$: dense, mais *non* égal à $[0, 1]$. Les non-dyadiques (comme $1/3$, ou $\pi/4$) ne sont dans aucun V_k ni dans V_∞ ; ils n'apparaissent que comme *parties standard* de grains dyadiques infiniment proches, via la promotion du théorème 1. La strate limite contient tous les réels *portés par un grain* ; elle ne contient pas les idéalités non dyadiques, qui vivent dans le quotient.