

Métrique bis

Dilatation d'un grain, échelle exponentielle et échelle logarithmique

Hugues Genvrin

Octobre 2026

Résumé

Nous comparons les métriques d'un grain grossier g_g et d'un grain fin g_f , deux strates consécutives avec $\mu(g_g) = 2^{n_\infty} \delta g_f$. Mesurées au niveau d'observation g_{f-} , les deux grandeurs ont une promotion nulle : la promotion est écrasée. Un changement d'échelle les sépare en 0 et 1, mais ne fait pas apparaître à lui seul d'exponentielle. Celle-ci apparaît lorsqu'on lit $\mu(g_g) = 2^{n_\infty} \delta g_f$ comme la *dilatation d'un seul grain g_f* , et non comme la juxtaposition équirépartie de 2^{n_∞} grains. Le long du flot de dilatation, les homothéties se composent par produit de leurs rapports tandis que le paramètre s'additionne : la taille est donc exponentielle en ce paramètre, $s(p) = 2^p \delta g_f$, et le paramètre logarithmique en la taille. Cette échelle est intra-strate : le paramètre parcourt les n_∞ niveaux de résolution qui séparent g_f de g_g , et sa forme normalisée $u = p/n_\infty$ remplit l'intervalle $[0, 1]$ après promotion. Les deux lectures, dilatation et juxtaposition, se raccordent par un changement de niveau d'observation.

Table des matières

1	La métrique primitive et la promotion écrasée	1
2	Deux lectures de $\mu(g_g) = 2^{n_\infty} \delta g_f$	2
3	La dilatation d'un grain est exponentielle	3
3.1	Le flot de dilatation	3
3.2	Une échelle intra-strate	3
3.3	L'espace reste linéaire	4
4	La métrique logarithmique des strates	4
5	Synthèse	5

1 La métrique primitive et la promotion écrasée

On note $a = 2^{n_\infty}$ et l'on considère trois strates consécutives : le grain g_{f-} , le grain fin g_f et le grain grossier g_g , d'épaisseurs δg_{f-} , $\delta g_f = a \delta g_{f-}$ et $\delta g_g = a \delta g_f$.

Définition 1 (Métrique primitive). La *métrique primitive* exprime g_f et g_g en nombre de points de résolution du niveau d'observation g_{f-} :

$$\mu(g_f) = a, \quad \mu(g_g) = a^2 = 2^{n_\infty} \mu(g_f).$$

Elle est définie sur $\tilde{\mathbb{R}}$.

Remarque 2 (Promotion écrasée). Si l'on mesure les épaisseurs dans une unité standard, et que g_g est lui-même infinitésimal, alors $\text{st}(\delta g_f) = \text{st}(\delta g_g) = 0$: la promotion *écrase* les deux grains en zéro, et la métrique primitive ne se transporte pas dans $\mathbb{R}$.

Proposition 3 (Changement d'échelle). *Par une homothétie de strate, prenons g_g pour unité : $\delta g_g = 1$. Alors $\delta g_f = 2^{-n_\infty}$, et*

$$\text{st}(\delta g_f) = 0, \quad \text{st}(\delta g_g) = 1.$$

Démonstration. $\delta g_f = \delta g_g / a = 2^{-n_\infty}$ est infinitésimal. □

Ce changement d'échelle correspond au niveau d'observation g_f : le grain fin y devient ponctuel, et le grain grossier y est l'unité (figure 1).

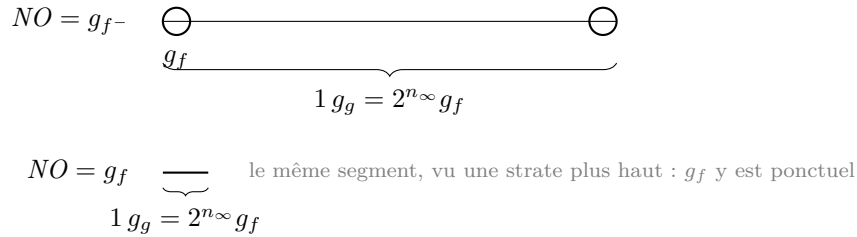


FIGURE 1 – Métrique primitive ($NO = g_f -$) et métrique au niveau d'observation g_f . Les longueurs dessinées sont symboliques.

Remarque 4 (Ce que le changement d'échelle ne montre pas). Les valeurs 0 et 1 des promotions ne suffisent pas à établir une relation exponentielle entre g_f et g_g . Il est vrai que $e^{\delta g_f} \simeq 1 = \delta g_g$, mais toute fonction continue valant 1 en 0 en ferait autant (2^x , $1 + x$, $\cos x$, ...), et la relation ne se propage pas d'une strate à la suivante : $e^{\delta g_g} = e$, alors que le grain de la strate suivante a pour épaisseur $a \delta g_g = 2^{n_\infty}$. L'exponentielle doit donc être cherchée ailleurs (section 3).

2 Deux lectures de $\mu(g_g) = 2^{n_\infty} \delta g_f$

L'égalité $\mu(g_g) = 2^{n_\infty} \delta g_f$ admet deux lectures, comme on passe d'un cercle à un cercle homothétique : on peut dilater les grains, ou en augmenter le nombre. Ce sont les lectures (A) et (B) du *Niveau d'observation* [2].

Définition 5 (Les deux lectures). (A) *Dilatation d'un seul grain.* Le grain g_f est dilaté par l'homothétie de rapport hyperfini 2^{n_∞} ; il devient, à lui seul, le grain g_g . Le niveau d'observation suit la dilatation : le nombre de points ne change pas.

(B) *Juxtaposition.* Le grain g_g est la réunion de 2^{n_∞} grains g_f^ℓ , $\ell = 1, \dots, 2^{n_\infty}$, équirépartis : le grain g_f^ℓ occupe $[(\ell - 1)\delta g_f, \ell \delta g_f]$. Le niveau d'observation reste fixe : c'est le nombre de grains qui augmente.

Proposition 6 (Raccord des lectures, [2]). *La lecture (A) au niveau d'observation $g_f -$ coïncide avec la lecture (B) au niveau d'observation g_f : dans les deux cas, g_g compte 2^{n_∞} points de résolution d'épaisseur δg_f .*

Démonstration. En (A), chacun des 2^{n_∞} points $g_f -$ du grain g_f est dilaté en un arc de longueur $2^{n_\infty} \delta g_f - = \delta g_g$, et leur nombre ne change pas ; en (B), au niveau g_f , on compte $\delta g_g / \delta g_f = 2^{n_\infty}$ grains. □

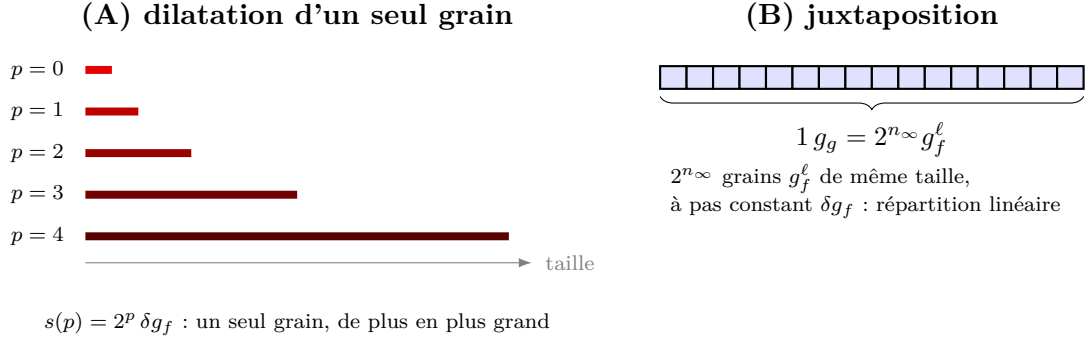


FIGURE 2 – Les deux lectures, avec n_∞ remplacé par 4 pour le dessin. En (A), un seul grain est dilaté pas à pas ; en (B), 2^4 grains fins sont juxtaposés à pas constant. Les deux aboutissent à la même longueur $\mu(g_g)$.

3 La dilatation d'un grain est exponentielle

3.1 Le flot de dilatation

Définition 7 (Flot). Pour $p = 0, 1, \dots, n_\infty$, on note H_p l'homothétie de rapport $r(p)$ qui fait passer g_f au niveau de résolution intermédiaire p , avec $r(0) = 1$, $r(1) = 2$ (un niveau de résolution) et $r(n_\infty) = 2^{n_\infty}$ (une strate). On note $s(p) = r(p) \delta g_f$ la taille du grain dilaté.

Théorème 8 (Loi de groupe et exponentielle). *Les homothéties se composent par produit de leurs rapports, tandis que le paramètre du flot s'additionne :*

$$r(p + q) = r(p) r(q).$$

Avec $r(1) = 2$, il vient pour tout $p \in \{0, \dots, n_\infty\}$

$$r(p) = 2^p, \quad s(p) = 2^p \delta g_f = e^{p \ln 2} \delta g_f.$$

La taille du grain dilaté est exponentielle en le paramètre de dilatation. Réciproquement,

$$p = \log_2 \frac{s}{\delta g_f}$$

est logarithmique en la taille.

Démonstration. $H_{p+q} = H_p \circ H_q$, et le rapport d'une composée d'homothéties de même centre est le produit des rapports. Par récurrence sur p , à partir de $r(1) = 2$, on obtient $r(p) = 2^p$; la récurrence est interne, et vaut donc jusqu'à l'entier hyperfini n_∞ . La réciproque est l'inverse de $p \mapsto 2^p$. $\square$

Remarque 9 (Version continue). Si l'on demande un flot à paramètre réel, monotone et vérifiant $r(p + q) = r(p)r(q)$, l'équation fonctionnelle de Cauchy impose $r(p) = e^{\lambda p}$: tout groupe de dilatations à un paramètre est exponentiel. L'exponentielle n'est donc pas un choix ; elle découle de la loi de groupe des homothéties.

3.2 Une échelle intra-strate

Corollaire 10 (Coordonnée normalisée). *Posons $u = p/n_\infty$. Alors*

$$s = a^u \delta g_f, \quad u = \log_a \frac{s}{\delta g_f}, \quad u \in \left\{0, \frac{1}{n_\infty}, \frac{2}{n_\infty}, \dots, 1\right\}.$$

Les valeurs de u forment une grille hyperfinie de $[0, 1]$, de pas infinitésimal $1/n_\infty$; leur promotion est l'intervalle continu $[0, 1]$. Le grain g_f correspond à $u = 0$, le grain g_g à $u = 1$.

Démonstration. $2^p = (2^{n_\infty})^{p/n_\infty} = a^u$. Tout réel standard de $[0, 1]$ est à moins de $1/n_\infty$ d'un point de la grille. $\square$

L'échelle exponentielle, et sa réciproque logarithmique, s'appliquent donc à *l'intérieur d'une strate* : le paramètre parcourt les n_∞ niveaux de résolution qui séparent g_f de g_g .

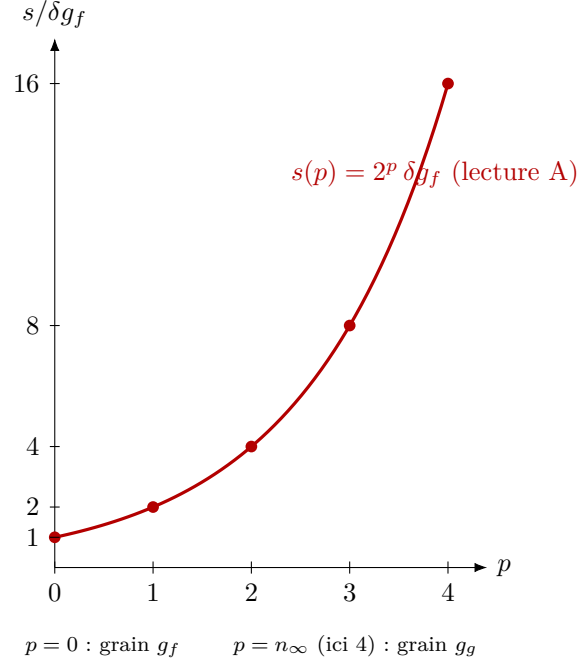


FIGURE 3 – Lecture (A) : la taille du grain dilaté est exponentielle en le paramètre p du flot (n_∞ remplacé par 4) ; réciproquement, p est le logarithme de la taille.

3.3 L'espace reste linéaire

Proposition 11 (Exponentielle en paramètre, non en espace). *À paramètre p fixé, H_p est une homothétie : elle est linéaire dans l'espace, et les points intérieurs du grain dilaté restent uniformément répartis. Ce qui est exponentiel est la taille en fonction du paramètre de dilatation, non la répartition des points dans l'espace.*

Démonstration. $H_p(x) = 2^p x$ conserve les rapports de distances : des points équidistants restent équidistants. $\square$

Il n'y a donc pas de contradiction entre l'équirépartition de la lecture (B) et l'échelle exponentielle de la lecture (A). La première décrit la répartition des grains fins dans l'espace, à niveau d'observation fixé ; la seconde décrit la croissance d'un grain le long du flot, à niveau d'observation mobile.

4 La métrique logarithmique des strates

Définition 12 (Métrique logarithmique). Pour deux grandeurs positives x, y , on pose

$$d(x, y) = \left| \log_a \frac{x}{y} \right|.$$

Proposition 13. 1. *d est une distance, invariante par toute homothétie : $d(\lambda x, \lambda y) = d(x, y)$.*

2. Deux strates consécutives sont à distance exactement 1, à toute hauteur de la tour : $d(\delta g_f, \delta g_g) = 1$.
3. L'homothétie de strate $x \mapsto ax$ devient la translation de 1 ; le flot H_p devient la translation de $u = p/n_\infty$.

Démonstration. $d(x, y) = |\log_a x - \log_a y|$ est la distance usuelle de $\mathbb{R}$ transportée par $\log_a$; elle est invariante par homothétie puisque $\log_a(\lambda x) - \log_a(\lambda y) = \log_a x - \log_a y$. Ensuite $\log_a(\delta g_g / \delta g_f) = \log_a a = 1$, et $\log_a(2^p x) = \log_a x + p/n_\infty$. $\square$

C'est l'autosimilarité de la tour, lue comme une métrique : dans la coordonnée logarithmique, la tour devient une droite graduée par les entiers, et chaque strate un intervalle de longueur 1 rempli par les niveaux de résolution.

5 Synthèse

- La métrique primitive, au niveau d'observation g_{f-} , est écrasée par la promotion ; un changement d'échelle sépare g_f et g_g en 0 et 1 (proposition 3), sans faire apparaître à lui seul d'exponentielle.
- L'égalité $\mu(g_g) = 2^{n_\infty} \delta g_f$ se lit comme la dilatation d'un seul grain (A) ou comme la juxtaposition de 2^{n_∞} grains équirépartis (B) ; les deux lectures se raccordent par un changement de niveau d'observation (proposition 6).
- Dans la lecture (A), la loi de groupe des homothéties impose $s(p) = 2^p \delta g_f$: la métrique de g_g par rapport à g_f est exponentielle en le paramètre de dilatation, et la métrique réciproque est logarithmique (théorème 8).
- Cette échelle est intra-strate : $u = p/n_\infty$ parcourt une grille hyperfinie de $[0, 1]$ (corollaire 10). Elle porte sur le paramètre, non sur la répartition spatiale, qui reste linéaire (proposition 11).
- La métrique $d = |\log_a(x/y)|$ place deux strates consécutives à distance 1 et transforme l'homothétie de strate en translation (proposition 13).

Références

- [1] H. Genzrin, *Théorie du grain*, manuscrit, 2026.
- [2] H. Genzrin, *Niveau d'observation*, manuscrit, 2026.
- [3] H. Genzrin, *Raison de l'homothétie hyperfinie de rapport 2^{n_∞}* , manuscrit, 2026.