

Niveau d'observation

Point de résolution, suite adjacente de trois grains
et droite à l'infini

Hugues Genyvin

Octobre 2026

Résumé

Une figure de la théorie du grain est toujours tracée avec une unité élémentaire : le « point » du graphe n'est pas le point euclidien, de mesure nulle, mais un grain, de mesure infinitésimale non nulle. Nous introduisons la notion de *niveau d'observation* pour rendre cette unité explicite, et nous l'appliquons à une suite adjacente de trois grains g_{-kn_∞} , $g_{-(k-1)n_\infty}$, $g_{-(k-2)n_\infty}$. Le premier est le point de résolution ; le deuxième se donne comme un cercle de 2^{n_∞} points de résolution ; une homothétie de centre le point de contact, de rapport 2^p , le fait croître jusqu'au troisième, pour $p = n_\infty$. Nous montrons que ce flot est le procédé de bisection du livre, vu depuis un grain quelconque, et que la suite des trois grains reproduit, relativement au niveau d'observation, la construction ascendante du chapitre 3 : point O , cercle C_{+n_∞} , droite à l'infini Δ_∞ . Un critère simple, la flèche comptée en grains, précise le statut du troisième grain : c'est un *cercle* à l'infini relativement au deuxième, et une *droite* à l'infini relativement au niveau d'observation. Nous distinguons deux lectures de la dilatation, selon que le niveau d'observation suit le cercle élémentaire ou reste fixe. Enfin, dans le plan, le plan réel met en jeu un seul niveau d'observation, et le plan complexe, en lecture à deux résolutions, deux niveaux distincts et *congruents* : le pas grossier est un multiple entier du pas fin. Ce rapport de congruence, arithmétique, est le critère de démarcation entre les deux plans ; sur les indices de grains, la géométrie seule ne les distingue pas. Nous montrons enfin que la tour des grains est autosimilaire : l'homothétie de rapport 2^{n_∞} centrée au point de contact coïncide avec le décalage d'une strate, ce qui rend relatifs les statuts infinitésimal, fini et infini. Son seul point fixe est le zéro absolu, attracteur de dimension d'homothétie nulle : la tour est autosimilaire sans être fractale.

Table des matières

1	Introduction	2
2	Rappels et conventions	2
3	Le niveau d'observation	3
4	Suite adjacente de trois grains	4
5	Le flot : une homothétie de centre le point de résolution	5
6	Cercle à l'infini ou droite à l'infini	6
6.1	Un critère : la flèche comptée en grains	6
6.2	Le statut du cercle élémentaire et celui de l'horizon	6
6.3	Relativement à quoi ?	7

7	Deux lectures de la dilatation	8
8	Autosimilarité de la tour et grain nul	8
8.1	L'homothétie de strate	9
8.2	Relativité des statuts	10
8.3	Le grain nul, point fixe de l'homothétie	11
8.4	Autosimilaire, mais pas fractale	11
9	Le plan : un ou deux niveaux d'observation	12
9.1	Niveaux congruents : le sens arithmétique	12
9.2	Approfondissement : le sens géométrique	13
10	Règles de lecture des figures	14
11	Synthèse et questions ouvertes	14

1 Introduction

Toute représentation graphique a une résolution. Sur un écran, c'est le pixel : ce qui est plus petit qu'un pixel est invisible, et ce qui en contient des millions paraît continu. Dans la théorie du grain [1], cette situation n'est pas un défaut de la représentation : elle est la structure même du continu. Un grain d'apparence ponctuelle a une épaisseur infinitésimale non nulle ; le point du continu, de mesure exactement nulle, n'apparaît qu'à la promotion (déf. 88 et rem. 121 du livre).

Il est donc naturel de dire explicitement, pour chaque figure, *quel grain joue le rôle du point*. C'est ce que nous appelons le *niveau d'observation*. La notion formalise la remarque 77 du livre (un même objet est représenté différemment selon le niveau d'observation) et le principe 3 de relativité stratale (les propriétés d'un réel sont relatives au niveau de résolution où on l'observe).

La figure 1 est le point de départ : trois cercles tangents en un même point, le point de résolution. Le plus petit est un grain de niveau $-(k-1)n_\infty$, vu comme un cercle de points de résolution ; le moyen est son image par une dilatation de rapport 2^p ; le plus grand, obtenu pour $p = n_\infty$, est le grain de niveau $-(k-2)n_\infty$. Nous en donnons la lecture précise.

2 Rappels et conventions

Grains. Pour $k \geq 0$, on note $\delta_k = 2^{-kn_\infty}$ et g_{-kn_∞} un grain de niveau $-kn_\infty$, d'épaisseur δ_k . Chaque grain de niveau $-(k-1)n_\infty$ contient exactement 2^{n_∞} grains de niveau $-kn_\infty$ (prop. 53 du livre) ; par la non-idempotence, la tour $\delta_1 > \delta_2 > \dots > 0$ est strictement décroissante, et tous ses termes ont une promotion nulle (th. 64).

Grain et cercle. Comme dans l'étalonnage du chapitre 10 (déf. 77, cercle unité de circonférence 1) et dans le situs circulaire auto-similaire, on représente un grain d'épaisseur δ comme un cercle de *circonférence* δ . Un grain de niveau $-(k-1)n_\infty$ est ainsi un cercle de circonférence δ_{k-1} , formé de 2^{n_∞} grains de niveau $-kn_\infty$, qui en sont les jonctions.

La construction ascendante du chapitre 3. Le livre dilate le cercle unité C_1 , tangent en O , en des cercles C_{+n_∞} puis C_{+2n_∞} , tous tangents en O .

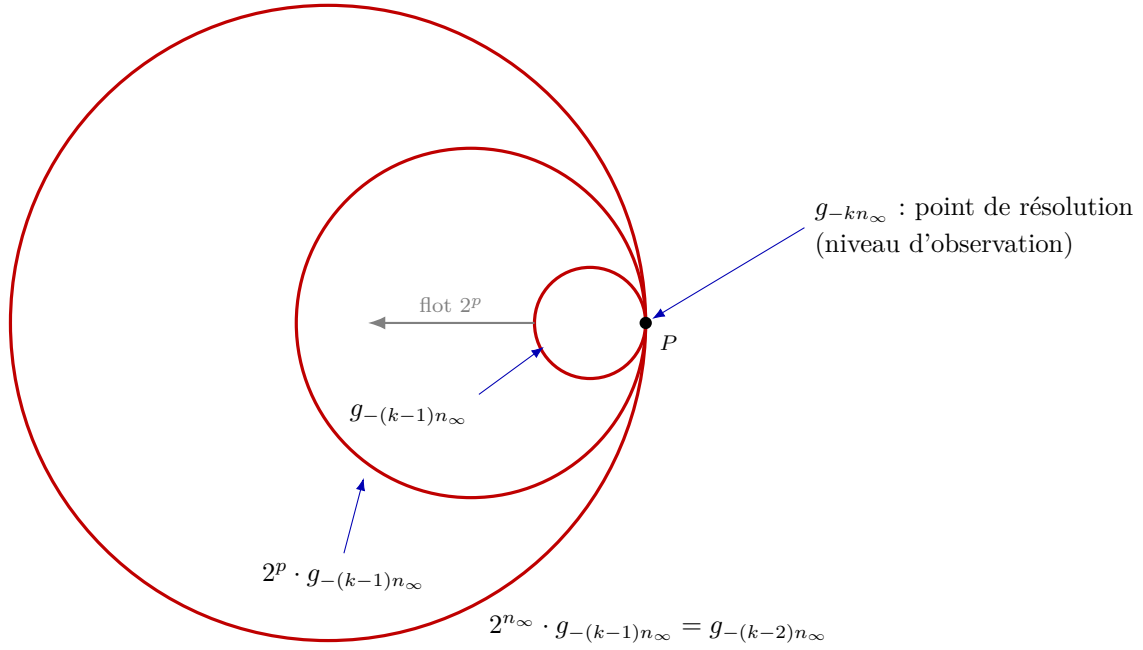


FIGURE 1 – Suite adjacente de trois grains, tangents au point de résolution P . Les rapports dessinés sont finis ; chaque cran représente en réalité un facteur 2^{n_∞} (section 10).

- Au niveau $+n_\infty$, la courbure 2^{-n_∞} de C_{+n_∞} est encore inversible : le cercle est « très grand mais encore circulaire » (rem. 17). C’est aussi le *cercle à l’infini* C_{n_∞} du chapitre 18 (déf. 93), obtenu à l’étape n_∞ du procédé de bisection, et dont la courbure reste visible (th. 68).
- Au niveau $+2n_\infty$, la courbure 2^{-2n_∞} n’est plus inversible : C_{+2n_∞} s’identifie à sa tangente en O , et c’est la *droite à l’infini* Δ_∞ (déf. 36).

Le seuil de la droite à l’infini est donc à *deux* crans de dilatation, et non à un seul. Ce point jouera un rôle central en section 6.

3 Le niveau d’observation

Définition 1 (Niveau d’observation). Une représentation est *au niveau d’observation* k si son unité élémentaire est le grain g_{-kn_∞} : tout objet y est représenté comme une réunion de grains de niveau $-kn_\infty$, et toute longueur y est comptée en nombre de tels grains. On appelle ce grain le *point de résolution* de la représentation.

Pour un objet X de longueur $\ell(X)$, on note

$$\#_k(X) = \frac{\ell(X)}{\delta_k}$$

son nombre de points de résolution au niveau d’observation k .

Définition 2 (Statut relatif). Au niveau d’observation k , un objet X est

1. *ponctuel* s’il est contenu dans un seul point de résolution ($\#_k(X) \leq 1$) ;
2. *limité* si $\#_k(X)$ est un nombre limité ;
3. *à l’infini* si $\#_k(X)$ est illimité.

Remarque 3 (Point de résolution et point euclidien). Le point de résolution a une mesure $\delta_k \neq 0$; il n'est pas le point euclidien. Il a une structure interne (2^{n_∞} sous-grains) que le niveau d'observation k ne montre pas, et que le niveau $k + 1$ montre. C'est exactement la distinction de la définition 88 du livre entre le grain d'apparence ponctuelle et le point du continu. Le point euclidien, lui, n'est le point de résolution d'aucun niveau : il n'apparaît qu'à la promotion, qui envoie tous les δ_k sur 0.

Proposition 4 (Relativité). *Pour tout objet X et tout k , $\#_{k+1}(X) = 2^{n_\infty} \#_k(X)$. En conséquence :*

1. *un grain de niveau $-kn_\infty$ est ponctuel au niveau d'observation k et à l'infini au niveau $k + 1$, où il compte 2^{n_∞} points de résolution ;*
2. *un objet limité et non ponctuel au niveau k est à l'infini au niveau $k + 1$;*
3. *un objet de longueur au moins δ_m n'est ponctuel à aucun niveau d'observation $k > m$.*

Démonstration. $\delta_k = 2^{n_\infty} \delta_{k+1}$ donne la formule. Pour le point 2, si $\#_k(X)$ est limité et ≥ 1 , alors $2^{n_\infty} \#_k(X) \geq 2^{n_\infty}$ est illimité. Pour le point 3, si $\ell(X) \geq \delta_m$ et $k > m$, alors $\#_k(X) \geq \delta_m / \delta_k = 2^{(k-m)n_\infty} > 1$. $\square$

La proposition 4 est le principe 3 du livre rendu quantitatif : « ponctuel », « limité » et « à l'infini » ne sont pas des propriétés d'un objet, mais d'un objet à un niveau d'observation.

Remarque 5 (Lien avec la théorie de la mesure du grain). Dans *Une théorie de la mesure du grain* [4], un niveau de résolution définit l'algèbre $\mathcal{A}_k$ des réunions de grains. Le niveau d'observation k est la version graphique de cette algèbre : ce qui est *visible* dans la représentation est exactement ce qui appartient à $\mathcal{A}_k$.

4 Suite adjacente de trois grains

On fixe le niveau d'observation $k \geq 2$, et un point de résolution P , qui est un grain g_{-kn_∞} .

Définition 6 (Suite adjacente de trois grains). C'est la donnée de trois grains emboîtés de niveaux consécutifs,

$$g_{-kn_\infty} \subset g_{-(k-1)n_\infty} \subset g_{-(k-2)n_\infty},$$

représentés comme trois cercles tangents au point de résolution P (figure 1). On les appelle respectivement le *point*, le *cercle élémentaire* et l'*horizon*.

Remarque 7 (Pourquoi « cercle élémentaire », et non « normalisé »). Le deuxième grain est le cercle *élémentaire* de la suite : c'est le plus petit cercle qui, au niveau d'observation k , se compose de points de résolution,

- par déroulement de la classe de grain $\mathcal{G}_{-(k-1)n_\infty} = 2^{n_\infty} g_{-kn_\infty}$, il est formé de 2^{n_∞} points de résolution ;
- en valeur absolue, sa circonférence est $\delta_{k-1} = 2^{-(k-1)n_\infty}$, et l'épaisseur du point est $\delta_k = 2^{-kn_\infty}$.

Il n'est *unitaire*, c'est-à-dire de circonférence 2π comme le cercle unité C_1 du livre (déf. 77), que dans le cas $k = 1$: le cercle élémentaire est alors g_0 , et le point de résolution a pour épaisseur 2^{-n_∞} , infinitésimal de partie standard nulle. Pour $k \neq 1$, sa circonférence $2^{-(k-1)n_\infty}$ est infinitésimale ($k > 1$) ou illimitée ($k < 1$). Le cercle élémentaire n'est donc pas le cercle unité ; il en est l'image par une homothétie de rapport $2^{-(k-1)n_\infty}$, et l'autosimilarité de la tour (théorème 23) permet de toujours s'y ramener. Les rapports sont les mêmes à tout niveau : l'horizon compte 2^{n_∞} cercles élémentaires, et l'on retrouve la configuration C_1, C_{+n_∞} du chapitre 3 du livre (au facteur 2π près, le livre prenant 2π pour circonférence de référence au chapitre 3).

Proposition 8 (Le cercle élémentaire est un situs). *Au niveau d'observation k , le cercle élémentaire $g_{-(k-1)n_\infty}$ est un cercle de 2^{n_∞} points de résolution, et l'horizon $g_{-(k-2)n_\infty}$ un cercle de 2^{2n_∞} points de résolution. Le cercle élémentaire et l'horizon sont donc tous deux à l'infini au sens de la définition 2.*

Démonstration. $\#_k(g_{-(k-1)n_\infty}) = \delta_{k-1}/\delta_k = 2^{n_\infty}$ et $\#_k(g_{-(k-2)n_\infty}) = \delta_{k-2}/\delta_k = 2^{2n_\infty}$, tous deux illimités. $\square$

La définition 2 ne suffit donc pas à distinguer le cercle élémentaire de l'horizon : tous deux sont « à l'infini ». La différence est d'ordre, et elle se lit sur la courbure (section 6).

5 Le flot : une homothétie de centre le point de résolution

Définition 9 (Flot de dilatation). Pour $0 \leq p \leq n_\infty$, on note H_p l'homothétie de centre P et de rapport 2^p , et $C_p = H_p(g_{-(k-1)n_\infty})$ l'image du cercle élémentaire. On écrit $C_p = 2^p \cdot g_{-(k-1)n_\infty}$.

Proposition 10. 1. *Tous les cercles C_p passent par P et y ont la même tangente : ils sont tangents entre eux en P .*

2. *C_p a pour circonférence $2^p \delta_{k-1}$; au niveau d'observation k , il compte $2^{n_\infty+p}$ points de résolution.*

3. *$C_{n_\infty} = g_{-(k-2)n_\infty}$: le flot mène du cercle élémentaire à l'horizon.*

Démonstration. *Point 1.* Le centre Ω du cercle élémentaire est sur la normale en P ; H_p fixe P et envoie Ω sur un point Ω_p de la même normale, avec $P\Omega_p = 2^p P\Omega$. Le cercle C_p , de centre Ω_p et de rayon $2^p P\Omega$, passe donc par P , et sa tangente en P est perpendiculaire à la même normale.

Point 2. Une homothétie de rapport 2^p multiplie les longueurs par 2^p ; on divise par δ_k .

Point 3. Pour $p = n_\infty$, la circonférence vaut $2^{n_\infty} \delta_{k-1} = \delta_{k-2}$. $\square$

Remarque 11 (Pourquoi une homothétie de centre P). La « dilatation radiale » doit être prise autour du point de contact, et non autour du centre du cercle élémentaire : une dilatation autour du centre donnerait des cercles concentriques, et non la figure 1. Le point de résolution est le *point fixe* du flot, comme le point O dans la construction ascendante du livre.

Remarque 12 (Le flot est le procédé de bisection). À chaque cran $p \rightarrow p+1$, le rayon double. C'est le procédé de bisection itérée du chapitre 18 : l'étape n_∞ y produit le cercle à l'infini C_{n_∞} (déf. 93). Notre flot est ce procédé, vu depuis un grain quelconque au lieu du cercle unité.

Remarque 13 (Les étapes intermédiaires : strates et niveaux de résolution). Il faut distinguer les *strates*, de niveaux multiples de n_∞ ($-n_\infty, -2n_\infty, \dots$), et les *niveaux de résolution*, qui existent pour tout entier m : le grain 2^{-m} est celui de la résolution $-m$. Pour $0 < p < n_\infty$, la circonférence $2^p \delta_{k-1} = 2^{-((k-1)n_\infty - p)}$ est une puissance de 2 : le cercle C_p est un grain du niveau de résolution $-((k-1)n_\infty - p)$. Le flot parcourt ainsi, un à un, les n_∞ niveaux de résolution qui séparent la strate du cercle élémentaire de celle de l'horizon. La tour des résolutions continue d'ailleurs au-delà de toute strate, par tous les niveaux hyperfinis ($2n_\infty, 3n_\infty, n_\infty^2, \dots$), et tend vers l'illimité. À l'illimité, la suite des chiffres n'a plus de dernier chiffre : ce n'est plus un grain, mais un point du continu, obtenu par la promotion (th. 63 et rem. 123 du livre). On peut le noter $g_{-\infty}$, à condition d'entendre par là ce point limite de la descente, et non un grain d'épaisseur non nulle.

6 Cercle à l'infini ou droite à l'infini

6.1 Un critère : la flèche comptée en grains

Pour savoir si un cercle se confond avec sa tangente, il faut une échelle. Le niveau d'observation la fournit.

Définition 14 (Flèche et confusion avec la tangente). Soit un cercle de circonférence N points de résolution, donc de rayon $R = N/(2\pi)$ en points de résolution, tangent en P à une droite T . Sa *flèche* à la distance ℓ de P , mesurée le long du cercle, est l'écart à la tangente

$$f(\ell) = R(1 - \cos(\ell/R)).$$

Au niveau d'observation, le cercle *se confond avec sa tangente* sur la fenêtre $|\ell| \leq L$ si $f(\ell) < 1$ pour tout $|\ell| \leq L$: l'écart reste plus petit qu'un point de résolution.

Lemme 15. Pour tout ℓ , $\frac{\ell^2}{2R} \left(1 - \frac{\ell^2}{12R^2}\right) \leq f(\ell) \leq \frac{\ell^2}{2R} = \frac{\pi\ell^2}{N}$.

Démonstration. C'est l'encadrement classique $\frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{24} \leq 1 - \cos t \leq \frac{t^2}{2}$, appliqué à $t = \ell/R$ et multiplié par R ; il se transfère à $\mathbb{R}$. $\square$

La fenêtre sur laquelle un cercle de N points se confond avec sa tangente a donc une demi-largeur de l'ordre de $\sqrt{N/\pi}$ points de résolution.

6.2 Le statut du cercle élémentaire et celui de l'horizon

Théorème 16 (Objet circulaire, horizon rectiligne). *Au niveau d'observation k :*

1. **Le cercle élémentaire reste un cercle.** Le cercle élémentaire $g_{-(k-1)n_\infty}$ ($N = 2^{n_\infty}$) se confond avec sa tangente sur une fenêtre de l'ordre de $2^{n_\infty/2}$ points de résolution, nombre illimité mais fraction infinitésimale ($\approx 2^{-n_\infty/2}$) de sa circonférence ; à l'échelle de son propre rayon, sa flèche est de l'ordre de ce rayon. Sa courbure est visible : c'est un cercle.
2. **L'horizon est une droite à l'échelle du cercle élémentaire.** Sur toute la fenêtre occupée par le cercle élémentaire, $|\ell| \leq 2r$ où $r = 2^{n_\infty}/(2\pi)$ est le rayon du cercle élémentaire, la flèche de l'horizon $g_{-(k-2)n_\infty}$ ($N = 2^{2n_\infty}$) vérifie

$$f(\ell) \leq \frac{\pi(2r)^2}{2^{2n_\infty}} = \frac{1}{\pi} < 1.$$

Partout où se trouve le cercle élémentaire, l'horizon se confond avec sa tangente en P à moins d'un point de résolution près : c'est une droite.

Démonstration. Point 1. Par le lemme, $f(\ell) < 1$ dès que $\pi\ell^2/2^{n_\infty} < 1$, soit $|\ell| < 2^{n_\infty/2}/\sqrt{\pi}$. Inversement, pour $\ell = 2 \cdot 2^{n_\infty/2}$, on a $\ell^2/(2R) = \pi\ell^2/2^{n_\infty} = 4\pi$, et la minoration du lemme donne $f(\ell) \geq 4\pi(1 - \frac{\ell^2}{12R^2}) > 1$, car ℓ/R est infinitésimal. Le rapport de la fenêtre à la circonférence est $2^{n_\infty/2}/2^{n_\infty} = 2^{-n_\infty/2}$. Enfin, au point diamétralement opposé à P , l'écart à la tangente vaut $2r$: la courbure est visible à l'échelle de le cercle élémentaire.

Point 2. Pour l'horizon, $N = 2^{2n_\infty}$, et le lemme donne, pour $|\ell| \leq 2r = 2^{n_\infty}/\pi$, $f(\ell) \leq \pi\ell^2/2^{2n_\infty} \leq \pi(2^{n_\infty}/\pi)^2/2^{2n_\infty} = 1/\pi$. $\square$

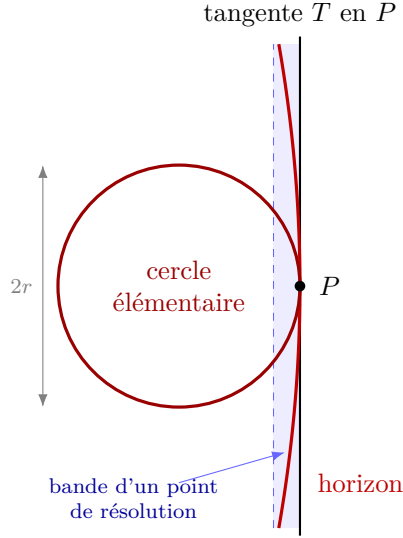


FIGURE 2 – À l'échelle du cercle élémentaire, l'horizon reste dans une bande d'un point de résolution autour de la tangente en P (flèche $\leq 1/\pi$) : c'est une droite. Le cercle élémentaire, lui, s'écarte de sa tangente jusqu'à $2r$: c'est un cercle. (Échelles non respectées.)

6.3 Relativement à quoi ?

Le théorème 16 tranche la question de vocabulaire : le troisième grain est un cercle à l'infini *ou* une droite à l'infini, selon l'étalon.

Corollaire 17 (Deux étalons, deux statuts). 1. Relativement au cercle élémentaire (*sa circonférence prise pour unité*), l'horizon est à un seul cran de dilatation : c'est le cercle à l'infini C_{n_∞} du livre (déf. 93), de courbure visible à son propre niveau.

2. Relativement au niveau d'observation, l'horizon est à deux crans du point de résolution : il franchit le seuil de la remarque 17, et sur toute l'étendue du cercle élémentaire il se confond avec sa tangente en P . C'est la droite à l'infini Δ_∞ .

3. Relativement au niveau d'observation, le cercle élémentaire lui-même est à un cran : il est le « cercle à l'infini » du point de résolution.

Démonstration. Le point 1 est la définition 93 avec $C_1 = g_{-(k-1)n_\infty}$ et le flot de la section 5. Le point 2 est le théorème 16, point 2, et la remarque 17 du livre. Le point 3 est le théorème 16, point 1, avec 2^{n_∞} points de résolution comme dans la proposition 8. $\square$

grain	# _k	fenêtre de rectitude	statut relativement	
			au point	au cercle élémentaire
point g_{-kn_∞}	1	—	point	ponctuel
cercle élémentaire $g_{-(k-1)n_\infty}$	2^{n_∞}	$\sim 2^{n_\infty/2}$	cercle à l'infini	cercle unité
horizon $g_{-(k-2)n_\infty}$	2^{2n_∞}	$\sim 2^{n_\infty}$	droite à l'infini	cercle à l'infini

TABLE 1 – La suite adjacente de trois grains, lue depuis le point de résolution et depuis le cercle élémentaire. Elle reproduit, relativement au niveau d'observation, la suite O , C_{+n_∞} , Δ_∞ du chapitre 3 du livre.

Remarque 18 (La fenêtre de confusion est à mi-niveau). Un cercle de 2^{jn_∞} points de résolution se confond avec sa tangente sur une fenêtre de l'ordre de $2^{jn_\infty/2}$ points : la fenêtre de rectitude est toujours à *mi-niveau*, au niveau de résolution $-jn_\infty/2$, à mi-chemin entre deux strates. C'est un vrai niveau de résolution lorsque jn_∞ est pair ; si jn_∞ est impair, $2^{jn_\infty/2}$ contient un facteur $\sqrt{2}$ et n'est pas un grain, et l'on retient le niveau entier le plus proche. La parité de n_∞ n'est pas fixée ici ; elle mériterait de l'être par l'axiomatique.

7 Deux lectures de la dilatation

Quand on dilate le cercle élémentaire, deux lectures sont possibles, et le niveau d'observation est précisément ce qui les distingue.

Définition 19 (Les deux lectures). (A) *Le niveau d'observation suit le cercle élémentaire.* On dilate tout, y compris les grains : chaque point de résolution du cercle élémentaire devient un arc 2^p fois plus long. Le nombre de points reste 2^{n_∞} .

(B) *Le niveau d'observation reste fixe.* Le point de résolution garde son épaisseur δ_k ; c'est leur nombre qui augmente : C_p compte $2^{n_\infty+p}$ points de résolution.

La lecture (A) est celle du chapitre 3 du livre : par le théorème 22, les grains-points internes du cercle unité deviennent, sur la droite à l'infini, des « zéros dilatés », arcs de longueur 2π . La lecture (B) est celle de la figure 1 et de la présente note.

Proposition 20 (Les deux lectures diffèrent d'un changement de niveau d'observation). *Pour $p = n_\infty$, la lecture (A) de l'horizon au niveau d'observation k coïncide avec la lecture (B) au niveau d'observation $k - 1$: dans les deux cas, l'horizon compte 2^{n_∞} points de résolution d'épaisseur δ_{k-1} .*

Démonstration. En lecture (A), chaque point de résolution δ_k est dilaté en un arc $2^{n_\infty}\delta_k = \delta_{k-1}$, et il y en a 2^{n_∞} . En lecture (B) au niveau $k - 1$, $\#_{k-1}(g_{-(k-2)n_\infty}) = \delta_{k-2}/\delta_{k-1} = 2^{n_\infty}$. $\square$

	(A) observation mobile	(B) observation fixe
taille du point de résolution	$2^p\delta_k$	δ_k
nombre de points sur C_p	2^{n_∞}	$2^{n_\infty+p}$
horizon ($p = n_\infty$)	2^{n_∞} zéros dilatés (th. 22)	2^{2n_∞} points
statut de l'horizon	cercle (auto-similaire)	droite à l'infini

TABLE 2 – Les deux lectures de la dilatation.

En lecture (A), rien ne change qualitativement : le cercle élémentaire dilaté est auto-similaire au cercle élémentaire, c'est le situs circulaire auto-similaire. En lecture (B), la dilatation fait apparaître des points nouveaux, et c'est elle qui produit la droite à l'infini.

8 Autosimilarité de la tour et grain nul

La figure 3 rassemble plusieurs représentations d'une même hiérarchie de grains, prises à des niveaux d'observation différents. À gauche, quatre grains consécutifs, tangents en P , vus depuis le grain de P , $g_{-(k+2)n_\infty}$, qui est le niveau d'observation. À droite, on suit un seul grain, $g_{-(k-2)n_\infty}$, pendant que le niveau d'observation descend d'une strate à chaque étape

(k , puis $k - 1$, puis $k - 2$: le point de résolution grossit) : il est d'abord l'horizon, puis le cercle élémentaire, puis le point de résolution. Les grains plus fins que le point de résolution *passent au sous-sol* : ils existent toujours, mais la figure ne les montre plus.

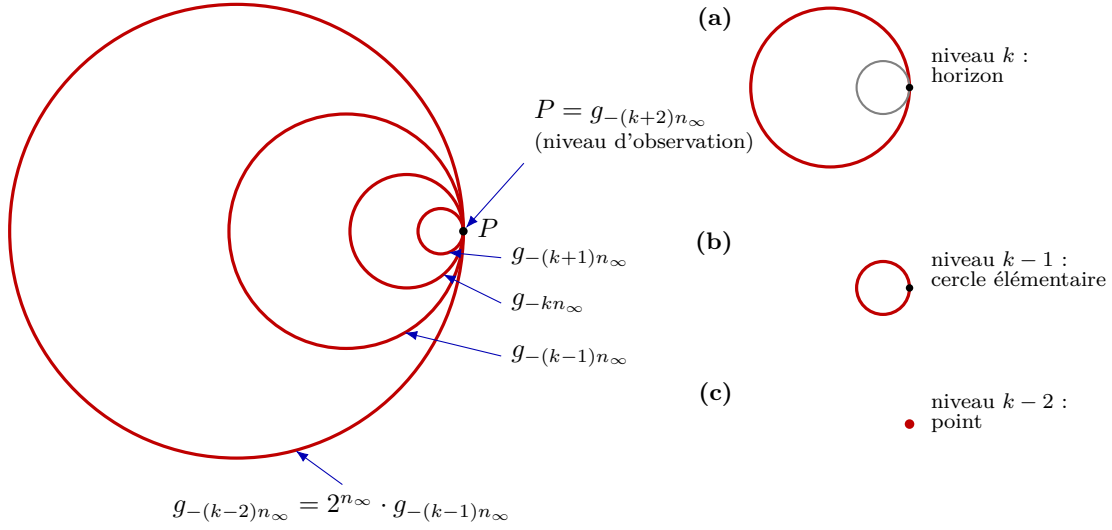


FIGURE 3 – À gauche : quatre grains consécutifs de la tour, tangents en P , au niveau d'observation $k + 2$: le niveau d'observation est le grain de P , $g_{-(k+2)n_\infty}$. À droite : le grain $g_{-(k-2)n_\infty}$ (en rouge) aux niveaux d'observation k , $k - 1$ et $k - 2$ (le niveau d'observation k descend, soit il s'épaissit), c'est-à-dire avec pour point de résolution g_{-kn_∞} , $g_{-(k-1)n_\infty}$ puis $g_{-(k-2)n_\infty}$; il devient successivement horizon, cercle élémentaire et point. Comme sur la figure 1, les rapports dessinés sont symboliques.

Dans cette section, l'indice de strate k parcourt tous les entiers hyperfinis, positifs ou négatifs : pour $k < 0$, le grain g_{-kn_∞} est plus grossier que l'unité. On note toujours $\delta_k = 2^{-kn_\infty}$.

8.1 L'homothétie de strate

Définition 21 (Homothétie de strate). On note H l'homothétie de centre P et de rapport 2^{n_∞} (c'est H_{n_∞} de la section 5), et, pour tout entier j , H^j son itérée, de rapport 2^{jn_∞} .

Proposition 22 (Homothétie externe et homothétie interne). *Pour tout k , $H(g_{-kn_\infty}) = g_{-(k-1)n_\infty}$. Autrement dit, l'homothétie externe H , qui agit sur la figure, coïncide sur la tour avec le décalage interne des indices $k \mapsto k - 1$.*

Démonstration. H multiplie les longueurs par 2^{n_∞} et fixe P : l'image du cercle de circonférence δ_k tangent en P est le cercle de circonférence $2^{n_\infty}\delta_k = \delta_{k-1}$ tangent en P (proposition 10, point 1). $\square$

C'est la proposition 20 vue globalement : dilater la figure (lecture A) ou passer du niveau d'observation k au niveau $k - 1$ (lecture B), c'est la même opération.

Théorème 23 (Autosimilarité de la tour). 1. La tour $\mathcal{T} = \{g_{-kn_\infty}\}_k$, représentée par ses cercles tangents en P , est invariante par H : $H(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$.

2. Pour tous j, k , $\#_k(g_{-jn_\infty}) = 2^{(k-j)n_\infty}$ ne dépend que de l'écart $k - j$. La représentation au niveau d'observation k est donc l'image par $H^{k-k'}$ de la représentation au niveau k' : on passe de l'une à l'autre sans rien changer aux comptes.

Démonstration. Le point 1 suit de la proposition 22, puisque $k \mapsto k - 1$ est une bijection des indices. Pour le point 2, $\#_k(g_{-jn_\infty}) = \delta_j/\delta_k = 2^{(k-j)n_\infty}$. $\square$

Remarque 24 (Le niveau g_0 n'a rien de privilégié). Pour $k = 1$, le cercle élémentaire est $g_{-(k-1)n_\infty} = g_0$. Il n'y a là aucune indétermination à lever : n_∞ est un entier hyperfini, et $0 \cdot n_\infty = 0$ exactement. Le grain g_0 a pour épaisseur $2^0 = 1$; sa circonférence vaut 1 dans la convention de ce texte (un grain d'épaisseur δ est un cercle de circonférence δ), et 2π dans celle du chapitre 3 du livre. C'est le seul cas où le cercle élémentaire est normalisé (remarque 7). Ce qui est arbitraire, c'est le choix du niveau qu'on appelle 0 : c'est un *choix d'unité*, un artefact de l'indexation. Par le théorème 23, on peut toujours se ramener à $k = 1$ par l'homothétie H^{k-1} , et tout ce qui se dit du cercle unité se dit de n'importe quel cercle élémentaire.

8.2 Relativité des statuts

Prenons la strate δ_j pour unité de longueur, ce qui revient à normaliser le cercle élémentaire de niveau $j + 1$ (remarque 7).

Définition 25 (Statut relatif à une strate). Une grandeur $x > 0$ est, *relativement à la strate j , infinitésimale* si $x/\delta_j \simeq 0$, *appréciable* si x/δ_j est limité et non infinitésimal, *illimitée* si x/δ_j est illimité.

Proposition 26 (Relativité et réciprocité). 1. Si x est appréciable relativement à la strate j , il est infinitésimal relativement à la strate $j - 1$ et illimité relativement à la strate $j + 1$.

2. Soit $x > 0$ dans l'étendue de la tour, c'est-à-dire $\delta_K \leq x \leq \delta_{-K}$ pour un entier hyperfini K . Alors x est infinitésimal relativement à la strate $-K - 1$, et illimité relativement à la strate $K + 1$.

Démonstration. Point 1 : $x/\delta_{j-1} = 2^{-n_\infty}(x/\delta_j)$ est le produit d'un infinitésimal par un limité, et $x/\delta_{j+1} = 2^{n_\infty}(x/\delta_j)$ celui d'un illimité par un appréciable. Point 2 : $x/\delta_{-K-1} \leq \delta_{-K}/\delta_{-K-1} = 2^{-n_\infty}$ et $x/\delta_{K+1} \geq \delta_K/\delta_{K+1} = 2^{n_\infty}$. $\square$

Ainsi toute grandeur finie ou infinie est infinitésimale relativement à un niveau d'observation convenable, et réciproquement toute grandeur infinitésimale non nulle peut être observée comme une grandeur finie ou infinie. C'est, en termes de grains, l'idée de la *standardité relative* de Hrbacek [5, 6], où chaque niveau peut être pris pour le niveau standard.

Remarque 27 (L'étendue de la tour). Si l'on ne laisse parcourir à k que les entiers *limités*, la tour ne couvre que les ordres de grandeur 2^{jn_∞} , j limité. Une grandeur comme $2^{n_\infty^2}$ échappe alors à toutes les strates, et le point 2 ne s'applique pas. D'où l'hypothèse d'étendue, ou, ce qui revient au même, le choix de laisser k parcourir les entiers hyperfinis.

Remarque 28 (Ce qui est relatif, et ce qui ne l'est pas). Le *statut* d'une grandeur dépend de la strate prise pour unité. Les *rapports* n'en dépendent pas : la relation « x est infinitésimal devant y » ($x/y \simeq 0$) est invariante par H , puisque H multiplie x et y par le même facteur. Le zéro exact, enfin, reste nul à tous les niveaux. On retrouve les trois zéros de la théorie de la mesure du grain [4] : le zéro exact est absolu ; le zéro infinitésimal et le zéro faible sont relatifs à un niveau.

Remarque 29 (Pourquoi le pas de la strate, et non le pas 2). L'homothétie de rapport 2 laisse aussi la tour des *niveaux de résolution* invariante. Mais elle ne change le statut de rien : un limité multiplié par 2 reste limité. Seul un rapport illimité, comme 2^{n_∞} , fait passer le limité à l'infinitésimal. L'autosimilarité qui compte pour la relativité des statuts est donc celle de strate en strate.

8.3 Le grain nul, point fixe de l'homothétie

Descendons la tour : k croît, et les cercles g_{-kn_∞} se resserrent vers P . À la limite illimitée, la suite des chiffres n'a plus de dernier chiffre : on obtient le point $g_{-\aleph_0}$ de la remarque sur les strates et niveaux de résolution (section 5), point du continu de mesure nulle, et non un grain.

Proposition 30 (Le zéro est le point fixe). 1. *Aucun grain de la tour n'est fixé par H :*

$$H(g_{-kn_\infty}) \neq g_{-kn_\infty} \text{ pour tout } k.$$

2. *Le seul point fixé par H est son centre P , pris comme point exact.*

3. *Les disques bordés par les cercles g_{-kn_∞} forment une suite décroissante dont l'intersection, à la promotion, est le point P .*

En ce sens, le zéro absolu $g_{-\aleph_0}$ est le point fixe de l'homothétie de strate : l'écriture heuristique $\aleph_0 - 1 = \aleph_0$ dit exactement que H le laisse en place.

Démonstration. Point 1 : $\delta_{k-1} = 2^{n_\infty} \delta_k \neq \delta_k$; c'est la non-idempotence. Point 2 : une homothétie de rapport différent de 1 a pour seul point fixe son centre. Point 3 : les disques sont tangents en P , de diamètres δ_k/π qui décroissent strictement et ont tous une promotion nulle (th. 64 du livre) ; seul P appartient à tous. $\square$

Remarque 31 (Pourquoi on ne peut pas ramener le zéro à $k = 1$). Tout grain de la tour peut être translaté au niveau du cercle unité par une puissance de H (théorème 23). Le zéro ne le peut pas : H le laisse en place, et aucune puissance de H ne l'en déloge. C'est ce qui le sépare des grains, et ce qui fait de lui un zéro *absolu*. Le point de résolution de chaque niveau d'observation en est la représentation à ce niveau : un grain contenant le point exact P , d'épaisseur non nulle.

8.4 Autosimilaire, mais pas fractale

La dimension d'homothétie d'une figure formée de N copies d'elle-même, réduites dans le rapport $r < 1$, est

$$D_h = \frac{\ln N}{\ln(1/r)}.$$

Proposition 32 (Deux dimensions d'homothétie). 1. *Le long de la tour. L'homothétie interne $g_{-(k-1)n_\infty} \mapsto g_{-kn_\infty}$ produit une copie ($N = 1$) dans le rapport $r = 2^{-n_\infty}$, d'où $D_h = 0$. L'attracteur de cette contraction est son point fixe P .*

2. *À l'intérieur d'un grain. Le grain $g_{-(k-1)n_\infty}$ est formé de $N = 2^{n_\infty}$ grains g_{-kn_∞} , réduits dans le même rapport $r = 2^{-n_\infty}$ (prop. 53 du livre), d'où $D_h = 1$.*

Démonstration. Point 1 : $\ln 1 = 0$. L'attracteur d'une seule contraction est son unique point fixe (Hutchinson [7]). Point 2 : $\ln 2^{n_\infty} / \ln 2^{n_\infty} = 1$. $\square$

La tour n'est donc pas une fractale : son attracteur est un point, de dimension nulle, qui représente le zéro absolu. La figure elle-même, réunion d'une suite de cercles, est *invariante* par H , donc autosimilaire au sens faible ; mais chacun de ses cercles est une courbe de dimension 1, et la réunion aussi. Les deux dimensions distinguent les deux structures portées par la tour : $D_h = 0$ pour l'emboîtement des grains le long de la tour, qui converge vers le point ; $D_h = 1$ pour la décomposition d'un grain en sous-grains, qui est la structure du continu.

9 Le plan : un ou deux niveaux d'observation

Une figure du plan porte un point de résolution sur chaque axe. La question est de savoir combien de niveaux d'observation distincts elle met en jeu, et comment ils sont liés. La réponse distingue le plan réel du plan complexe construit en lecture à deux résolutions [2].

9.1 Niveaux congruents : le sens arithmétique

Définition 33 (Niveaux d'observation congruents). Deux niveaux d'observation de pas $\delta \leq \delta'$ sont *congruents* si le pas grossier est un multiple entier du pas fin :

$$\delta' \equiv 0 \pmod{\delta}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \delta' = c\delta \text{ avec } c \in \tilde{\mathbb{Z}}, c \geq 1.$$

L'entier c est le *rapport de congruence*. De façon équivalente, la graduation grossière est une sous-graduation de la fine : $\delta'\mathbb{Z} \subset \delta\mathbb{Z}$.

Proposition 34 (Congruence dans la tour). 1. Deux niveaux quelconques de la tour sont congruents : pour $j \leq k$, $\delta_j = 2^{(k-j)n_\infty} \delta_k$, de rapport $c = 2^{(k-j)n_\infty}$.
2. Si deux niveaux sont congruents, le plus fin est un raffinement commun : chaque point de la graduation grossière est un point de la fine, et chaque grain grossier est la réunion de c grains fins.

Démonstration. Le point 1 est $\delta_j/\delta_k = 2^{(k-j)n_\infty} \in \tilde{\mathbb{Z}}$. Pour le point 2, $m\delta' = (mc)\delta$, et $[m\delta', (m+1)\delta']$ est la réunion des c grains fins d'indices $mc, \dots, mc + c - 1$. $\square$

Remarque 35 (Congruent, commensurable, incommensurable). La congruence est plus forte que la commensurabilité. Les pas 2^{-n_∞} et 3^{-n_∞} sont commensurables (raffinement commun de pas 6^{-n_∞}), mais non congruents : leur rapport $(3/2)^{n_\infty}$ n'est pas entier, et aucune des deux graduations n'est une sous-graduation de l'autre. Les pas 2^{-n_∞} et $\sqrt{2} \cdot 2^{-n_\infty}$ sont incommensurables. Dans la théorie de la mesure du grain [4], c'est la congruence qui garantit sans calcul supplémentaire une grille commune, donc des compensations exactes.

Définition 36 (Plan d'observation). Pour deux pas δ_1 (axe horizontal) et δ_2 (axe vertical), on note

$$\Pi(\delta_1, \delta_2) = \delta_1\tilde{\mathbb{Z}} + i\delta_2\tilde{\mathbb{Z}}$$

la grille du plan, dont les grains sont des rectangles $\delta_1 \times \delta_2$. Elle met en jeu un niveau d'observation si $\delta_1 = \delta_2$, et deux sinon.

Théorème 37 (Démarcation arithmétique). 1. Le plan réel au niveau δ est $\Pi(\delta, \delta)$: un seul niveau d'observation, rapport $c = 1$, grains carrés.
2. Le plan complexe, en lecture à deux résolutions, est $\Pi(\delta_f, \delta_g)$ avec $\delta_g = 2^{n_\infty}\delta_f$: deux niveaux d'observation distincts et congruents, de rapport $c = 2^{n_\infty}$, grains rectangles.
3. Le plan complexe est encadré par deux plans réels :

$$\Pi(\delta_g, \delta_g) \subset \Pi(\delta_f, \delta_g) \subset \Pi(\delta_f, \delta_f).$$

Le plan réel fin est le raffinement commun des deux axes du plan complexe ; le plan réel grossier en est la sous-grille commune.

Démonstration. Les points 1 et 2 sont des lectures de la définition. Pour le point 3, $\delta_g\tilde{\mathbb{Z}} \subset \delta_f\tilde{\mathbb{Z}}$ par la congruence (proposition 34), ce qui donne les deux inclusions, axe par axe. $\square$

Le critère de démarcation est donc arithmétique : c'est le rapport de congruence c entre les pas des deux axes. Il vaut 1 pour le plan réel et 2^{n_∞} pour le plan complexe. C'est lui qui porte la base du travail : la graduation grossière est une sous-graduation de la fine, de sorte que les deux axes du plan complexe, bien que distincts, se lisent dans une même graduation, la plus fine.

9.2 Approfondissement : le sens géométrique

On pourrait chercher la différence entre les deux plans dans leur géométrie, et en particulier dans le quart de tour. Nous montrons qu'elle n'y est pas directement : sur les indices de grains, les deux plans sont indiscernables. Pour un rapport c , on considère, comme dans *Plan complexe et grain nul* [3], les échanges

$$J_c(x, y) = (-y/c, cx), \quad E_c(x, y) = (y/c, cx).$$

Proposition 38 (Les échanges existent dans les deux plans). *Pour tout rapport c , sur la grille $\Pi(\delta, c\delta)$:*

1. J_c et E_c sont des bijections de la grille sur elle-même, qui agissent sur les indices par $(m, n) \mapsto (-n, m)$ et $(m, n) \mapsto (n, m)$; elles conservent les nombres de grains ;
2. $J_c^2 = -\text{Id}$ (quart de tour) et $E_c^2 = \text{Id}$ (miroir) ;
3. le groupe engendré par J_c et E_c agit sur le réseau des indices $\tilde{\mathbb{Z}}^2$ comme le groupe des huit symétries du carré, quel que soit c .

Démonstration. $J_c(m\delta, nc\delta) = (-n\delta, mc\delta)$ et $E_c(m\delta, nc\delta) = (n\delta, mc\delta)$; les carrés se calculent directement. Sur les indices, $(m, n) \mapsto (-n, m)$ et $(m, n) \mapsto (n, m)$ engendrent le groupe diédral d'ordre 8 du carré, qui ne dépend pas de c . $\square$

Sur les indices, le plan réel et le plan complexe ont donc le même réseau et les mêmes échanges : un quart de tour de carré $-\text{Id}$ existe dans les deux. C'est pourquoi le sens géométrique n'est pas, à lui seul, un critère de démarcation. Il le devient seulement à travers le rapport c :

Proposition 39 (Ce que le rapport change à la géométrie). *1. J_c est une isométrie (pour la distance euclidienne commune aux deux axes) si et seulement si $c = 1$; il coïncide alors avec le quart de tour ordinaire $R(x, y) = (-y, x)$.*

2. Le quart de tour ordinaire R laisse la grille $\Pi(\delta, c\delta)$ invariante si et seulement si $c = 1$.

3. Les isométries qui laissent la grille invariante forment le groupe du carré (ordre 8) si $c = 1$, et celui du rectangle ($\pm \text{Id}$ et les deux réflexions d'axes, ordre 4) si $c \neq 1$.

Démonstration. Point 1. $|J_c(x, 0)| = c|x|$, égal à $|x|$ si et seulement si $c = 1$; pour $c = 1$, $J_1 = R$.

Point 2. $R(\delta, 0) = (0, \delta)$ est dans la grille si et seulement si $\delta \in c\delta\tilde{\mathbb{Z}}$, c'est-à-dire $c = 1$.

Point 3. Une isométrie linéaire qui préserve la grille préserve les deux directions des axes si $c \neq 1$, puisque les pas diffèrent ; il ne reste que $\pm \text{Id}$ et les deux réflexions d'axes. Si $c = 1$, le carré ajoute les quarts de tour et les réflexions diagonales. $\square$

Remarque 40 (Moins de symétries, un opérateur distingué). Le plan réel a plus de symétries métriques que le plan complexe, mais aucune n'y est privilégiée : le quart de tour et le miroir diagonal sont au même rang. Dans le plan complexe, ni J_c ni E_c n'est une isométrie ; c'est la superposition des deux droites, qui traverse le retournement une seule fois, qui sélectionne J_c (prop. 28 et th. 29 de [3]). La géométrie propre au plan complexe découle ainsi de la congruence arithmétique, et non l'inverse.

Remarque 41 (Portée de l'énoncé). Le théorème 37 caractérise le plan complexe *dans la lecture à deux résolutions*. La variante log-polaire de [2] construit le plan complexe avec un seul niveau d'observation sur les deux axes ; la dualité fin/grossier y passe dans les puissances $z \mapsto z^J$, et non dans les axes. Le cercle seul ne tranche pas entre les deux lectures ; c'est le choix de la lecture à deux résolutions qui donne la démarcation par le rapport de congruence.

	plan réel	plan complexe
pas des axes	(δ, δ)	$(\delta_f, \delta_g), \delta_g = 2^{n_\infty} \delta_f$
niveaux d'observation	un	deux, congruents
rapport de congruence c	1	2^{n_∞}
grain	carré	rectangle
réseau des indices	$\tilde{\mathbb{Z}}^2$	$\tilde{\mathbb{Z}}^2$
échanges conservant les comptes	groupe du carré	groupe du carré
quart de tour ($J_c^2 = -\text{Id}$)	oui	oui
J_c isométrique	oui ($J_1 = R$)	non : il change de grain
isométries de la grille	carré (ordre 8)	rectangle (ordre 4)
quart de tour privilégié	non (au rang des miroirs)	oui (aller-retour en résolution)
promotion	même ensemble $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$	

TABLE 3 – Plan réel et plan complexe. Le premier bloc est arithmétique et démarque les deux plans ; le deuxième, sur les indices, ne les distingue pas ; le troisième, métrique, les distingue à travers le rapport c .

10 Règles de lecture des figures

La notion de niveau d'observation fournit trois règles pour lire (et dessiner) les figures de la théorie du grain.

1. **Déclarer le point de résolution.** Toute figure doit préciser quel grain joue le rôle du point. Sans cette donnée, les mots « ponctuel » et « à l'infini » n'ont pas de sens (proposition 4).
2. **Lire les rapports comme des crans.** Une figure ne peut pas respecter des rapports 2^{n_∞} : les rapports dessinés (ici environ 1 : 3 : 6) sont symboliques. Chaque cran de la figure représente un facteur 2^{n_∞} , et c'est le nombre de crans, compté depuis le point de résolution, qui fixe le statut d'un objet : un cran pour un cercle à l'infini, deux crans pour une droite à l'infini.
3. **Préciser la lecture de la dilatation.** Un flot de dilatation doit dire si le point de résolution suit le cercle élémentaire (lecture A) ou reste fixe (lecture B) ; les deux donnent des figures identiques et des contenus différents.

Remarque 42 (Ce que la figure 1 montre vraiment). Lue avec ces règles, la figure 1 est au niveau d'observation k , en lecture (B). Le petit cercle est le cercle à l'infini du point de résolution (un cran). Le grand cercle, à deux crans, est la droite à l'infini : il est dessiné courbe pour la lisibilité, mais, à l'échelle du petit cercle, il se confond avec la tangente commune en P à moins d'un point de résolution près (figure 2).

11 Synthèse et questions ouvertes

Ce qui est établi.

- Le niveau d'observation fait du point du graphe un grain, distinct du point euclidien, et rend relatifs les statuts « ponctuel », « limité » et « à l'infini ».

- Dans une suite adjacente de trois grains, le flot 2^p est une homothétie de centre le point de résolution ; c'est le procédé de bisection du livre vu depuis un grain quelconque.
- La suite point, cercle élémentaire, horizon reproduit la suite $O, C_{+n_\infty}, \Delta_\infty$ du chapitre 3. Relativement au point de résolution, l'horizon est la droite à l'infini ; relativement au cercle élémentaire, il est le cercle à l'infini.
- Les deux lectures de la dilatation (observation mobile ou fixe) diffèrent exactement d'un changement de niveau d'observation.
- Le plan réel a un niveau d'observation ; le plan complexe, en lecture à deux résolutions, en a deux, distincts et congruents, de rapport 2^{n_∞} . Ce rapport arithmétique démarque les deux plans ; la géométrie des indices ne les distingue pas, et la géométrie métrique ne les distingue qu'à travers lui.
- La tour des grains est invariante par l'homothétie de strate H : tout niveau peut être ramené au cercle unité, et une grandeur finie ou infinie est infinitésimale relativement à un niveau convenable, et réciproquement. Les rapports et le zéro exact, eux, sont absolus.
- Le zéro absolu $g_{-\aleph_0}$ est le point fixe de H et l'attracteur de la tour : dimension d'homothétie 0 le long de la tour, 1 à l'intérieur d'un grain. La tour est autosimilaire, sans être fractale.

Questions ouvertes.

1. *Niveaux de résolution et strates.* Le flot parcourt les n_∞ niveaux de résolution entre deux strates, et les fenêtres de rectitude sont à mi-strate. Quel rôle jouent ces niveaux de résolution dans la lecture des figures, et faut-il fixer la parité de n_∞ ?
2. *Dimension supérieure.* Combien de niveaux d'observation congruents, et quels rapports, faudrait-il pour une structure à plus de deux axes, par exemple une construction des quaternions dans le même esprit ?
3. *Mesure.* Relier systématiquement le niveau d'observation aux algèbres $\mathcal{A}_k$ de la théorie de la mesure du grain [4], en particulier pour la représentation graphique des mesures orientées.

Références

- [1] H. Genvrin, *Théorie du grain*, manuscrit, 2026 ; chap. 3 (symétrie de résolution, droite à l'infini), chap. 10 (construction pragmatique des réels), chap. 15 (cardinal et promotion) et chap. 18 (rectification).
- [2] H. Genvrin, *Du cercle complexe au plan complexe : deux axes, deux résolutions*, manuscrit, 2026.
- [3] H. Genvrin, *Plan complexe et grain nul*, manuscrit, 2026.
- [4] H. Genvrin, *Une théorie de la mesure du grain*, manuscrit, 2026.
- [5] K. Hrbacek, « Relative set theory : Internal view », *Journal of Logic and Analysis*, 1 (2009).
- [6] K. Hrbacek, O. Lessmann et R. O'Donovan, *Analysis with Ultrasmall Numbers*, CRC Press, 2015.
- [7] J. E. Hutchinson, « Fractals and self-similarity », *Indiana University Mathematics Journal*, 30 (1981), p. 713–747.