

Plan complexe et grain nul

La projection de ω sur l'axe fin, la monade de 0
et le barycentre du situs

Hugues Genvrin

Octobre 2026

Résumé

Dans le plan complexe à deux résolutions, lu dans la *lecture normée* où chaque axe est gradué par son propre point de résolution, c'est le quart de tour i qui envoie l'axe imaginaire, gradué au pas grossier, sur l'axe réel, gradué au pas fin, unité sur unité et sans arrondi. L'opérateur $\omega = 2^{n\infty}i$ y ajoute un changement de strate ; on en tire l'application $h(x+y) = x + \omega y$, qui envoie toute la grille du plan dans la graduation fine de l'axe réel. Nous étudions la question suivante : cette application permet-elle de dire que le plan complexe est équivalent, sans lui être égal, à un grain nul qui se promeut en zéro ? La réponse est négative, mais elle conduit à trois résultats précis. D'abord, h est la projection du plan sur l'axe réel parallèlement à une droite de pente infinitésimale $J = 2^{-n\infty}$; elle rend le plan équivalent à une *droite*, et non à un point ; à la promotion, ses classes deviennent les droites horizontales, et sa classe nulle se promeut en l'axe réel tout entier. Ensuite, une pseudo-métrique identiquement nulle rend n'importe quel ensemble équivalent à un point, et une équivalence compatible avec la promotion ne peut pas identifier 1 et 0. Enfin, le « grain nul » existe bien au sens exact : c'est la monade de 0, dans laquelle s'enfonce la moitié descendante de l'hélice des puissances de ω ; et le zéro apparaît aussi, par compensation, comme le barycentre des jonctions du situs circulaire. Nous précisons enfin l'image du plan comme « deux droites superposées » : c'est la somme *orientée* des deux axes repliés qui est nulle, et non le plan ; et, réciproquement, de deux droites superposées de somme orientée nulle, jointes à l'exigence que l'échange des deux copies distinguées par leur grain, l'échange qui va par le dédoublement et revient par la superposition est une racine carrée du demi-tour, et l'on en déduit le plan complexe sans postuler i . Enfin, sur les mesures orientées, l'équivalence par la promotion rend ces deux droites superposées équivalentes au grain nul orienté, sans lui être égales : elles forment une sorte d'anti-Dirac, étalement maximal à somme nulle, opposé à la concentration maximale du Dirac. Dans la lecture normée, où chaque axe est gradué par son propre point de résolution, cet anti-Dirac se construit avec le quart de tour $\hat{i}$ lui-même : c'est la croix orientée, orbite d'un segment centré, de somme exactement nulle axe par axe, alors que la même construction avec ω échoue.

1 Introduction

Le document *Du cercle complexe au plan complexe* [2] construit le plan complexe à partir du cercle à deux grilles : l'axe réel porte la graduation fine, l'axe imaginaire la graduation grossière. Dans la *lecture normée* (section 3), où chaque axe est gradué par son propre point de résolution, c'est le quart de tour i , noté $\hat{i}$ dans cette lecture, qui fait passer d'une graduation à l'autre : il envoie l'unité fine de Γ_H sur l'unité grossière de Γ_V , et l'unité grossière de Γ_V sur l'opposé de l'unité fine de Γ_H , sans arrondi. L'opérateur $\omega = 2^{n\infty}i$, qui compose ce quart de tour avec une dilatation uniforme, ne sert qu'à changer de strate. On peut alors poser la question suivante.

Soit x un point de l'axe réel et y un point de l'axe imaginaire. Puisque $\hat{i}$ renvoie l'axe imaginaire sur l'axe réel, unité grossière sur unité fine, et que x et $\hat{i}y$ jouent des rôles opposés, peut-on construire sur le plan une mesure nulle, une relation d'équivalence et une pseudo-métrique nulle, et en déduire que le plan complexe est équivalent, sans lui être égal, à un grain nul qui se promeut en zéro ?

En indices, pour $x = m \delta_f$ et $y = i n \delta_g$, on a $x + \hat{i}y = (m - n) \delta_f$: c'est la superposition des deux axes, l'un retourné, lue en indices, que la section 9 étudie. La variante qui passe par ω , $h(x + y) = x + \omega y$, fait en outre changer de strate : un pas grossier vertical y devient un tour complet. Nous l'étudions d'abord (section 4), parce qu'elle montre ce qu'une projection peut donner et ce qu'elle ne peut pas donner. Nos réponses sont les suivantes.

1. h envoie bien la grille du plan dans la graduation fine (proposition 6). C'est la projection du plan sur l'axe réel parallèlement à la droite de pente $J = 2^{-n_\infty}$ (théorème 7).
2. L'équivalence définie par h a pour quotient une *droite*. À la promotion, ses classes deviennent les droites horizontales, et sa classe nulle se promeut en l'axe réel tout entier, et non en 0 (section 5).
3. Une pseudo-métrique identiquement nulle rend *tout* ensemble équivalent à un point ; une équivalence compatible avec la promotion ne peut pas identifier 1 et 0 (section 6).
4. Le grain nul existe au sens exact : c'est la monade de 0, quotient de Kolmogorov de la pseudo-métrique $\text{st}|z - w|$. La moitié descendante de l'hélice de ω s'y enfonce (section 7).
5. Le zéro apparaît aussi comme le barycentre des jonctions du situs : c'est la forme exacte d'une « somme de mesures opposées » (section 8).
6. Le plan n'est pas la superposition de deux droites, mais leur somme directe ; h les superpose, l'une retournée, et leur somme orientée est nulle. Réciproquement, de deux droites superposées de somme orientée nulle et de grains différents, on déduit le plan complexe : la racine carrée du demi-tour y est un aller-retour en résolution, et n'a pas à être postulée (section 9).
7. Sur les mesures orientées, les deux droites superposées sont équivalentes au grain nul orienté, sans lui être égales. L'anti-Dirac se construit avec le quart de tour normé $\hat{i}$: c'est la croix orientée, orbite d'un segment centré, dont la somme est exactement nulle axe par axe ; les droites superposées en sont la moitié horizontale (section 10).

2 Notations et rappels

Soit n_∞ un hyperentier illimité, et

$$a = 2^{n_\infty}, \quad J = \frac{1}{a} = 2^{-n_\infty}, \quad \delta_g = \frac{2\pi}{a}, \quad \delta_f = \frac{2\pi}{a^2} = J \delta_g.$$

Le plan complexe stratal $\mathcal{P}_\mathbb{C} = \tilde{\mathbb{R}} \oplus i\tilde{\mathbb{R}}$ [1, déf. 86] est muni de sa métrique euclidienne et de la grille à deux résolutions de [2] :

$$\Gamma_H = \delta_f \tilde{\mathbb{Z}} \text{ (axe réel, fin)}, \quad \Gamma_V = i \delta_g \tilde{\mathbb{Z}} \text{ (axe imaginaire, grossier)}, \quad \Gamma = \Gamma_H + \Gamma_V.$$

On note $\omega = a i$; on a $\omega \cdot i = -a$, $\omega^2 = -a^2$, et $\omega \cdot (m \delta_f) = i m \delta_g$ [2, prop. 14 et th. 15].

Un élément de $\tilde{\mathbb{R}}[i]$ est *limité* si son module est majoré par un réel standard, *infinitésimal* si son module est inférieur à tout réel standard strictement positif. On note $\mathcal{L}$ l'ensemble des

éléments limités. Tout $z \in \mathcal{L}$ a une partie standard $\text{st}(z) \in \mathbb{C}$, et st est $\mathbb{R}$ -linéaire ; c'est la promotion [1, th. 63]. On note $u \simeq v$ lorsque $u - v$ est infinitésimal.

Nous utiliserons la distinction de [1, déf. 88 et rem. 121] entre le *point* du continu, de mesure nulle, et le *grain d'apparence ponctuelle*, d'épaisseur infinitésimale non nulle : un grain n'est pas un zéro, et « zéro épais » est un oxymore.

3 La lecture normée : i sur les points de résolution

Cette section fixe le cadre dans lequel tout le document se lit. Elle répond à une remarque de l'auteur : le quart de tour ne doit pas être lu comme une rotation des *longueurs*, mais comme une rotation des *points de résolution*, chaque axe étant normé par son propre point de résolution.

Définition 1 (Lecture normée). Dans la *lecture normée*, chaque axe est gradué par son propre point de résolution, pris pour unité :

- sur Γ_H , l'unité est le grain fin δ_f ;
- sur Γ_V , l'unité est le grain grossier δ_g .

Un point de la grille Γ est repéré par ses indices $(m, n) \in \tilde{\mathbb{Z}}^2$: c'est le point $m\delta_f + i n\delta_g$. Le quart de tour normé $\hat{i}$ est l'application

$$\hat{i} : (m, n) \mapsto (-n, m).$$

Proposition 2 (Le quart de tour normé). 1. $\hat{i}$ envoie l'unité de Γ_H sur l'unité de Γ_V : $\hat{i}(1, 0) = (0, 1)$, c'est-à-dire le point de résolution fin δ_f sur le point de résolution grossier $i\delta_g$; et l'unité de Γ_V sur l'opposé de celle de Γ_H .

2. $\hat{i}$ est une bijection de la grille Γ sur elle-même : aucun arrondi n'intervient.
3. $\hat{i}^2 = -\text{Id}$ (le demi-tour) et $\hat{i}^4 = \text{Id}$.
4. $\hat{i}$ conserve $m^2 + n^2$: c'est le quart de tour du produit scalaire en grains $\langle \cdot, \cdot \rangle_g$ (définition 34), et le cercle unité normé reste un cercle.

Démonstration. Ce sont des calculs sur les indices : $(m, n) \mapsto (-n, m) \mapsto (-m, -n)$, et $(-n)^2 + m^2 = m^2 + n^2$. L'application inverse est $(m, n) \mapsto (n, -m)$. $\square$

Remarque 3 (Traduction en longueurs). Mesurée en longueurs, avec la même unité sur les deux axes, l'opération $\hat{i}$ s'écrit

$$\hat{i}(x, y) = (-y/a, ax) = K \circ R(x, y), \quad R(x, y) = (-y, x), \quad K = \text{diag}(1/a, a),$$

où R est le quart de tour des longueurs et K la *dualité des points de résolution*, qui reconvertit les grains grossiers arrivés sur l'axe horizontal en grains fins, et les grains fins arrivés sur l'axe vertical en grains grossiers. C'est exactement l'échange J_c de la définition 31, avec $c = a$.

Lue seule, la rotation des longueurs R envoie Γ_V grossier sur l'axe horizontal, toujours au grain grossier, ce qui donne une sous-graduation de Γ_H , sans perte ; mais elle envoie Γ_H fin sur l'axe vertical au grain fin, et le lire dans Γ_V demanderait de regrouper les grains fins, donc d'arrondir. C'est pourquoi la lecture normée est la lecture de base, et la lecture en longueurs seulement une traduction.

Remarque 4 (Le rôle de ω). En longueurs, $\omega = ai$ est le quart de tour suivi d'une dilatation *uniforme* des deux axes. Il envoie Γ_V fin sur $i\Gamma_V$ grossier : $\omega(im\delta_f) = -ma\delta_f = -m\delta_g$. Il fait changer de strate, et reste l'outil de l'hélice des résolutions et de la projection h (section 4) ; mais il n'est plus au centre de la construction du plan, qui repose sur $\hat{i}$.

4 La projection h

Dans la lecture normée (section 3), la projection h n'est plus l'outil central : elle est construite avec ω , opérateur de changement de strate, et sert à étudier une équivalence possible du plan avec une droite.

Définition 5 (L'application h). Pour $x \in \widetilde{\mathbb{R}}$ (point de l'axe réel) et $y = it \in i\widetilde{\mathbb{R}}$ (point de l'axe imaginaire), on pose

$$h(x + y) = x + \omega y.$$

Comme $\omega y = a i \cdot it = -at$, cela s'écrit, pour $z = x + it$:

$$h(z) = x - at = \operatorname{Re} z - 2^{n_\infty} \operatorname{Im} z.$$

En posant $y' = at$, qui est la coordonnée verticale exprimée dans l'unité fine, $h(z) = x - y'$: h est la différence de deux quantités de même nature, la coordonnée horizontale et la coordonnée verticale convertie en unités fines.

Proposition 6 (h envoie la grille dans la graduation fine). Pour tout point $m\delta_f + i n\delta_g$ de la grille Γ ,

$$h(m\delta_f + i n\delta_g) = m\delta_f - 2\pi n = (m - a^2 n) \delta_f \in \Gamma_H.$$

En particulier $h(\Gamma) = \Gamma_H$: h envoie toute la grille du plan sur la graduation fine de l'axe réel. Un pas grossier de l'axe vertical devient un tour complet, $2\pi = a^2\delta_f$, sur l'axe réel.

Démonstration. $h(m\delta_f + i n\delta_g) = m\delta_f - a n\delta_g = m\delta_f - n(a\delta_g) = m\delta_f - 2\pi n$, et $2\pi = a^2\delta_f$. L'inclusion $h(\Gamma) \subset \Gamma_H$ en découle, et l'égalité vient de $h(m\delta_f) = m\delta_f$. $\square$

Théorème 7 (h est une projection sur l'axe réel). 1. $h : \mathcal{P}_{\mathbb{C}} \rightarrow \widetilde{\mathbb{R}}$ est $\widetilde{\mathbb{R}}$ -linéaire et surjective, et $h(x) = x$ pour tout x réel.

2. Son noyau est la droite

$$N = \widetilde{\mathbb{R}}(a + i) = \{s(2^{n_\infty} + i) : s \in \widetilde{\mathbb{R}}\},$$

de pente $1/a = J$: c'est une droite passant par l'origine, infiniment proche de l'axe réel en direction.

3. Pour tout z , $z - h(z) \in N$: $h(z)$ est le point où la parallèle à N passant par z coupe l'axe réel. Autrement dit, h est la projection du plan sur l'axe réel parallèlement à N .
4. Les fibres de h sont les droites $h^{-1}(c) = c + N$, parallèles à N . Sur la grille, la fibre de $c \in \Gamma_H$ est formée des points régulièrement espacés du vecteur $(2\pi, \delta_g)$, qui a la direction de N .

Démonstration. Point 1. La formule $h(x + it) = x - at$ est linéaire en (x, t) ; $h(x) = x$ pour $t = 0$.

Point 2. $h(x + it) = 0 \iff x = at \iff x + it = t(a + i)$. La pente de la droite est $t/(at) = 1/a$.

Point 3. Si $z = x + it$, alors $z - h(z) = at + it = t(a + i) \in N$.

Point 4. $h(z) = c \iff z - c \in N$. Sur la grille, $h(m\delta_f + in\delta_g) = h(m'\delta_f + in'\delta_g)$ si et seulement si $m - m' = a^2(n - n')$; deux points consécutifs de la fibre diffèrent donc de $a^2\delta_f + i\delta_g = 2\pi + i\delta_g$, qui est colinéaire à $a + i$ puisque $2\pi = a\delta_g$. $\square$

Remarque 8 (Lecture par la résolution). h réalise la lecture externe de ω [2, prop. 14] : la coordonnée verticale est convertie en unités fines par le facteur a , puis reportée sur l'axe réel. La coordonnée $y' = at$ est l'« unité fine virtuelle » sous-jacente à l'axe grossier. La projection est donc un rangement de tout le plan sur la seule graduation fine.

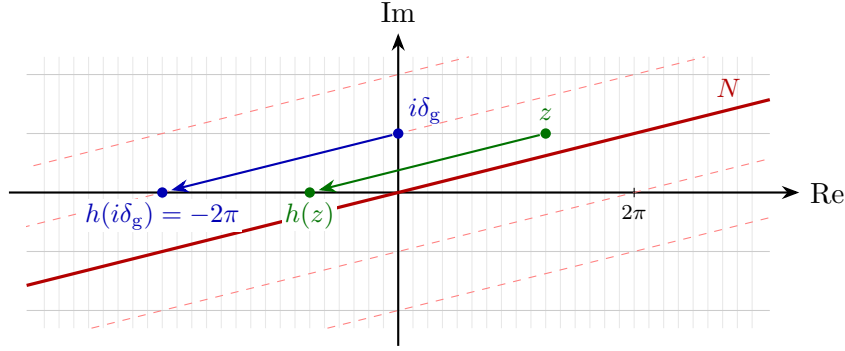


FIGURE 1 – La projection h , dessinée avec $a = 4$ (pas grossier vertical δ_g , pas fin horizontal $\delta_f = \delta_g/4$, et $2\pi = 4\delta_g$). Le noyau N a pour pente $J = 1/a$; h projette chaque point sur l'axe réel parallèlement à N (flèches). Le point $i\delta_g$ est envoyé sur -2π : un pas grossier vertical devient un tour complet sur l'axe réel. Pour $a = 2^{n\infty}$, la pente J est infinitésimale et les droites parallèles à N sont infiniment proches de l'horizontale.

5 L'équivalence définie par h et sa promotion

Définition 9 (L'équivalence $\sim_h$ et la pseudo-métrique d_h). Pour $z, w \in \mathcal{P}_{\mathbb{C}}$, on pose $z \sim_h w \iff h(z) = h(w)$, et $d_h(z, w) = |h(z) - h(w)|$.

Proposition 10 (Le quotient est une droite). d_h est une pseudo-métrique, nulle exactement entre points équivalents. Les classes de $\sim_h$ sont les droites $c + N$, $c \in \tilde{\mathbb{R}}$; la classe de 0 est le noyau N . Le quotient de Kolmogorov de $(\mathcal{P}_{\mathbb{C}}, d_h)$ s'identifie, par h , à la droite $\tilde{\mathbb{R}}$ munie de la distance $|u - v|$. Il n'est pas réduit à un point.

Démonstration. d_h est la composée de h et de la distance de $\tilde{\mathbb{R}}$; elle est donc symétrique, vérifie l'inégalité triangulaire, et s'annule exactement lorsque $h(z) = h(w)$. Le quotient est l'image de h , c'est-à-dire $\tilde{\mathbb{R}}$ (théorème 7), et h y devient une isométrie. $\square$

Le plan est donc équivalent, par h , à une droite. Voyons ce que devient cette équivalence à la promotion.

Théorème 11 (Double lecture de h à la promotion). Soit $z = x + it$ limité.

1. Lecture grossière : $\text{st}(Jh(z)) = -\text{st}(\text{Im } z)$.
2. Lecture fine : $h(z)$ est limité si et seulement si at est limité, c'est-à-dire si $\text{Im } z$ est infinitésimal, d'ordre au plus J ; dans ce cas $\text{st } h(z) = \text{st}(x) - \text{st}(at)$.

Démonstration. Point 1. $Jh(z) = Jx - t$, et Jx est infinitésimal car x est limité; d'où $\text{st}(Jh(z)) = -\text{st}(t)$.

Point 2. $h(z) = x - at$ avec x limité; $h(z)$ est limité si et seulement si at l'est, et alors st est additive. $\square$

Lu à la résolution fine, h ne voit en général qu'une quantité illimitée; lu à la résolution grossière, par le facteur J , il ne voit que la partie imaginaire. C'est la dualité de résolution de ω [2, § 6.2], vue à travers la promotion.

Théorème 12 (Promotion des classes). Soit $c \in \tilde{\mathbb{R}}$ tel que la classe $c + N$ contienne un point limité $z_0 = x_0 + it_0$. Alors

$$\text{st}((c + N) \cap \mathcal{L}) = \mathbb{R} + i \text{st}(t_0),$$

la droite horizontale de $\mathbb{C}$ de partie imaginaire $\text{st}(t_0)$. En particulier, la classe nulle N se promeut en l'axe réel tout entier. Enfin, pour z, w limités, $z \sim_h w \Rightarrow \text{st}(\text{Im } z) = \text{st}(\text{Im } w)$.

Démonstration. Les points de la classe sont les $z_0 + s(a + i)$, $s \in \widetilde{\mathbb{R}}$. Un tel point est limité si et seulement si sa l'est : dans ce cas $s = (sa)/a$ est infinitésimal, et

$$\text{st}(z_0 + s(a + i)) = \text{st}(x_0) + \text{st}(sa) + i \text{st}(t_0).$$

Quand $s = r/a$ avec r réel standard quelconque, $\text{st}(sa) = r$ parcourt $\mathbb{R}$. Pour N , on prend $z_0 = 0$. Enfin, si $z \sim_h w$, alors $Jh(z) = Jh(w)$, et le théorème 11 donne $\text{st}(\text{Im } z) = \text{st}(\text{Im } w)$. $\square$

Corollaire 13 (Réponse pour l'équivalence $\sim_h$). *Par h , le plan complexe est équivalent à une droite, et non à un grain nul. La classe nulle N , qui pourrait sembler jouer le rôle de grain nul, se promeut en l'axe réel $\mathbb{R}$ tout entier, et non en 0. À la promotion, les classes de $\sim_h$ deviennent les droites horizontales de $\mathbb{C}$: la relation ne retient plus que la partie imaginaire.*

Remarque 14. Ce renversement est instructif. Au niveau des grains, les classes de h sont des droites de pente infinitésimale J , qui traversent les niveaux : en suivant une classe, on avance de 2π horizontalement à chaque pas grossier vertical. À la promotion, cette pente s'annule, les classes deviennent horizontales, et le paramètre qui les distingue est la partie imaginaire, lue à la résolution grossière. L'information fine de h , la partie réelle, disparaît dans la promotion de Jh .

6 Pourquoi une pseudo-métrique nulle ne dit rien

On pourrait vouloir aller plus loin, en construisant sur le plan une mesure égale à la somme de deux mesures opposées, et la relation qu'elle définit.

Proposition 15 (La mesure nulle et la pseudo-métrique nulle). *Soit μ une mesure additive sur le plan.*

1. *La somme d'une mesure additive μ et de son opposée $-\mu$ est la mesure nulle.*
2. *Une relation de la forme $z \mathcal{R} w \iff \mu(\{z\}) + (-\mu)(\{w'\}) = 0$, où w' se déduit de w par une rotation, relie z et w dès que $\mu(\{z\}) = \mu(\{w'\})$; si μ est sans atome, elle relie tous les couples.*
3. *Sur un ensemble quelconque X , la pseudo-métrique identiquement nulle a pour quotient de Kolmogorov un seul point.*

Démonstration. Point 1. $(\mu - \mu)(A) = 0$ pour tout A .

Point 2. Si μ est sans atome, $\mu(\{z\}) = 0$ pour tout z .

Point 3. Tous les points sont à distance nulle les uns des autres, donc tous identifiés. $\square$

Le point 3 vaut pour $\mathbb{R}$, pour un segment, pour un ensemble fini : conclure que $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}$ est équivalent à un point par une pseudo-métrique nulle ne dit rien du plan complexe, mais seulement du choix de la pseudo-métrique.

Proposition 16 (Compatibilité avec la promotion). *Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur $\mathcal{L}$ compatible avec la promotion, c'est-à-dire telle que $z \sim w \Rightarrow \text{st}(z) = \text{st}(w)$. Alors $1 \not\sim 0$. En particulier, aucune équivalence compatible avec la promotion ne rend les points limités du plan équivalents à un seul grain nul.*

Démonstration. $\text{st}(1) = 1 \neq 0 = \text{st}(0)$. $\square$

C'est la traduction, dans le plan, de la mise en garde de [1, rem. 121] : un grain d'épaisseur infinitésimale n'est pas un zéro, et un ensemble qui contient des points standard non nuls ne peut pas être un grain nul.

7 Le grain nul au sens exact : la monade de 0

Définition 17 (Pseudo-métrie standard). Pour $z, w \in \mathcal{L}$, on pose $d_{\text{st}}(z, w) = \text{st} |z - w|$.

Théorème 18 (Le quotient de Kolmogorov est $\mathbb{C}$). d_{st} est une pseudo-métrie sur $\mathcal{L}$, nulle exactement entre points infiniment proches. Son quotient de Kolmogorov est $\mathbb{C}$, et l'application quotient est la promotion st . Les classes sont les monades

$$\mathfrak{M}(z_0) = \{z \in \mathcal{L} : z \simeq z_0\}, \quad z_0 \in \mathbb{C}.$$

Démonstration. st est additive et croissante sur les réels limités, donc d_{st} vérifie l'inégalité triangulaire ; elle est symétrique, et $d_{\text{st}}(z, w) = 0 \iff z - w \simeq 0$. L'application $z \mapsto \text{st}(z)$ est surjective sur $\mathbb{C}$, et $d_{\text{st}}(z, w) = |\text{st} z - \text{st} w|$. $\square$

C'est la promotion $\widetilde{\mathbb{R}}_{\text{fin}}/\mathfrak{m} = \mathbb{R}$ de [1], étendue au plan. Dans cette lecture, le *grain nul* a un sens exact.

Définition 19 (Grain nul). Le *grain nul* est la monade $\mathfrak{M}(0)$, formée des éléments infinitésimaux de $\widetilde{\mathbb{R}}[i]$. C'est la classe de 0 pour d_{st} .

Proposition 20 (Chaque grain du plan est dans une monade). *Chaque grain de la grille Γ (rectangle de côtés δ_f et δ_g) a un diamètre infinitésimal, donc est contenu dans une seule monade s'il contient un point limité. Le grain nul contient une infinité illimitée de grains de Γ , par exemple les a grains $[m\delta_f, (m+1)\delta_f[\times [0, \delta_g[, 0 \leq m < a$.*

Démonstration. Le diamètre d'un grain est $\sqrt{\delta_f^2 + \delta_g^2} \simeq 0$. Les grains cités sont contenus dans le rectangle $[0, \delta_g[\times [0, \delta_g[,$ de diamètre $\sqrt{2}\delta_g \simeq 0$, qui contient 0. $\square$

Théorème 21 (L'hélice descendante). *Les puissances de ω se répartissent ainsi :*

1. pour $k \geq 1$, $\omega^{-k} = (-i)^k 2^{-kn_\infty}$ appartient au grain nul $\mathfrak{M}(0)$; ces points sont deux à deux distincts, et leurs modules forment la hiérarchie des infinitésimaux stratifiés

$$2^{-n_\infty} > 2^{-2n_\infty} > 2^{-3n_\infty} > \dots > 0$$

de [1, th. 64] ;

2. $\omega^0 = 1$ est standard ;

3. pour $k \geq 1$, ω^k est illimité : il n'est pas dans $\mathcal{L}$ et n'a pas de promotion.

Démonstration. $|\omega^k| = 2^{kn_\infty}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$; pour $k \leq -1$ c'est un infinitésimal, pour $k \geq 1$ un nombre illimité. Les modules sont distincts, donc les points aussi. $\square$

Remarque 22 (Le grain nul n'est pas un zéro). Le grain nul contient les points $\omega^{-1}, \omega^{-2}, \dots$, deux à deux distincts et ordonnés par leur niveau : il porte toute une hiérarchie d'infinitésimaux. C'est seulement la promotion qui les envoie tous sur le même point 0. Conformément à [1, rem. 121], le grain nul est donc *équivalent* à 0 au sens de d_{st} , sans lui être *égal* : c'est exactement la nuance que l'on cherchait, mais elle s'applique au grain nul, et non au plan tout entier.

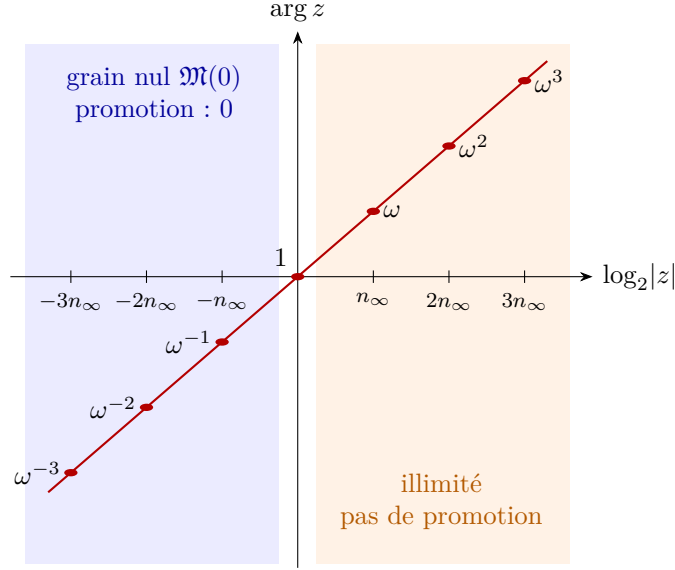


FIGURE 2 – L’hélice des puissances de ω dans le plan de l’argument, prolongée aux exposants négatifs. La moitié descendante ($k < 0$, à gauche) est entièrement dans le grain nul et se promeut en 0 ; la moitié montante ($k > 0$, à droite) est illimitée ; seul $\omega^0 = 1$ est un point standard.

8 Le zéro par compensation : le barycentre du situs

L’idée d’une « somme de deux mesures opposées » a une forme exacte, qui concerne le cercle et non le plan.

Proposition 23 (Le barycentre du situs est 0).

$$\sum_{k=0}^{a-1} e^{ik\delta_g} = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{a^2-1} e^{ik\delta_f} = 0.$$

Les jonctions de chaque niveau du situs ont pour barycentre l’origine. Plus précisément, a étant pair, le demi-tour associe chaque jonction z à la jonction $-z$, et les contributions opposées se compensent deux à deux.

Démonstration. Le demi-tour est la rotation de $\pi = (a/2)\delta_g = (a^2/2)\delta_f$, avec $a/2$ et $a^2/2$ hyperentiers : il envoie jonction sur jonction, et $z + (-z) = 0$. On peut aussi utiliser la somme géométrique : pour $q = e^{i\delta_g} \neq 1$, $\sum_{k=0}^{a-1} q^k = (q^a - 1)/(q - 1) = 0$ car $q^a = e^{2\pi i} = 1$; de même au niveau fin. $\square$

Remarque 24 (Le changement de niveau détruit la compensation). Les rotations de module 1 se compensent ; l’opérateur ω , qui change de niveau, non. Par exemple, l’orbite de i sous le quart de tour vérifie $1 + i + i^2 + i^3 = 0$, tandis que

$$1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 = (1 - a^2)(1 + ai) \neq 0.$$

Le zéro par compensation est donc une propriété du cercle, c’est-à-dire de la phase ; il disparaît dès que l’on fait intervenir le module, c’est-à-dire la résolution.

Vérification. $1 + ai + (ai)^2 + (ai)^3 = 1 + ai - a^2 - a^3i = (1 - a^2) + ai(1 - a^2)$. $\square$

Le cercle définit ainsi un *centre* par compensation. Ce centre est un point, l’origine ; il ne rend pas le plan nul.

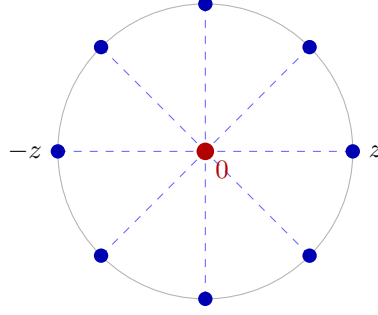


FIGURE 3 – Le barycentre du situs (dessiné avec $a = 8$). Chaque jonction est associée à la jonction opposée par le demi-tour ; les contributions se compensent deux à deux, et le barycentre est l'origine.

9 Deux droites superposées

On peut aussi se représenter le plan comme « deux droites superposées » dont les contributions s'annulent. Cette image contient une idée exacte, à condition de distinguer deux façons d'assembler deux droites. Nous montrons ensuite une réciproque : de deux droites superposées de somme orientée nulle, on déduit le plan complexe, moyennant une hypothèse que nous explicitons.

9.1 Somme directe et superposition

Notons $L = \widetilde{\mathbb{R}}$ la droite, $\sigma : L \rightarrow L, x \mapsto -x$, le demi-tour (l'involution de la symétrisation [1, prop. 71]), et

$$V = L \oplus L, \quad \iota_1(x) = (x, 0), \quad \iota_2(y) = (0, y)$$

le *dédoublément* de L : deux copies de la droite, placées dans deux directions indépendantes. Le plan complexe stratal est une telle somme directe, $\mathcal{P}_{\mathbb{C}} = \widetilde{\mathbb{R}} \oplus i\widetilde{\mathbb{R}}$ [1, déf. 86] : chaque point s'écrit de façon unique comme la somme d'un point de chaque axe.

Définition 25 (Superposition). La *superposition* des deux copies est l'application

$$s : V \rightarrow L, \quad s(x, y) = x - y,$$

qui dépose la première copie sur L telle quelle ($s \circ \iota_1 = \text{id}$) et la seconde retournée ($s \circ \iota_2 = \sigma$).

Proposition 26 (La projection h est une superposition). *Si l'on mesure la coordonnée verticale dans l'unité fine, $y' = at$, alors $h(x + it) = s(x, y')$. Autrement dit, h superpose l'axe réel et l'axe imaginaire sur l'axe réel, le second retourné par ω : l'axe imaginaire arrive sur $-\widetilde{\mathbb{R}}$, puisque $\omega \cdot i = -a$.*

Démonstration. $h(x + it) = x - at = x - y' = s(x, y')$. □

Il faut donc distinguer :

- la **somme directe** $V = L \oplus L$, qui est un espace de dimension 2 : le plan ;
- la **superposition** $s(V) = L$, qui replie les deux copies sur une seule droite, l'une retournée.

9.2 La somme orientée est nulle

Proposition 27 (Somme orientée nulle, grain par grain). *Munissons chacune des deux copies de la graduation fine $\delta_f \mathbb{Z}$, et considérons, sur une fenêtre symétrique hyperfinie $[-M\delta_f, M\delta_f]$, les grains orientés $g_m = [m\delta_f, (m+1)\delta_f]$, $-M \leq m < M$, parcourus dans le sens croissant. Après superposition, la première copie apporte les grains $+g_m$, et la seconde, retournée par σ , les grains $\sigma(g_m)$ parcourus de $-m\delta_f$ vers $-(m+1)\delta_f$, c'est-à-dire $-g_{-m-1}$. Alors*

$$\sum_{m=-M}^{M-1} g_m + \sum_{m=-M}^{M-1} (-g_{-m-1}) = 0.$$

En termes de mesures orientées, $[L] + \sigma_*[L] = 0$.

Démonstration. L'application $m \mapsto -m-1$ est une bijection de $\{-M, \dots, M-1\}$ sur lui-même ; les deux sommes sont donc opposées. Pour la droite entière, σ renverse l'orientation et conserve l'ensemble L , d'où $\sigma_*[L] = -[L]$. $\square$

C'est la forme exacte de l'intuition d'une « mesure additive nulle » : ce ne sont pas les deux droites qui s'annulent, mais leurs *orientations*, et c'est le demi-tour σ , c'est-à-dire $i^2 = -1$, qui produit le retournement. C'est le même mécanisme que pour le barycentre du situs (proposition 23), où chaque jonction z est compensée par $-z$.

Remarque 28 (Le lieu de la compensation). Les deux contributions s'annulent point par point là où $s(x, y) = 0$, c'est-à-dire sur la diagonale $x = y$ de V . En unités réelles, $y = at$, cette diagonale est la droite $x = at$: c'est exactement le noyau N de h , de pente J (théorème 7). La diagonale à 45° , lue en unités fines sur les deux copies, devient la droite de pente infinitésimale J lue en unités réelles.

Remarque 29 (Ce qui ne s'annule pas). Ce qui s'annule est la somme orientée des deux axes superposés. Le plan, lui, ne s'annule pas : un point comme $1+i$ n'est sur aucun des deux axes ; il est la *somme* d'un point de chaque axe. Pour la mesure d'aire du plan, la superposition envoie une droite entière (une fibre de s) sur chaque point de L , et aucune compensation ne se produit.

9.3 La réciproque : du repliement au plan complexe

La superposition seule ne crée pas de seconde dimension : une droite munie du demi-tour σ reste une droite.

Lemme 30 (Pas de racine carrée du demi-tour sur une seule droite). *Il n'existe pas d'application $\tilde{\mathbb{R}}$ -linéaire $\lambda : L \rightarrow L$ telle que $\lambda^2 = \sigma$. En particulier, aucun changement d'échelle, et donc aucun changement de grain, n'a pour carré le demi-tour.*

Démonstration. Une application linéaire de $L = \tilde{\mathbb{R}}$ dans lui-même est la multiplication par un élément λ de $\tilde{\mathbb{R}}$, et $\lambda^2 \geq 0 > -1$. C'est l'analogue de [1, prop. 72] : l'exponentielle réelle ne peut pas atteindre -1 . $\square$

Il faut donc deux copies *distinctes*. Or deux copies de même grain, superposées, sont indiscernables. C'est le changement de grain qui les distingue : l'une porte le grain fin, l'autre le grain grossier, et ce sont alors deux strates sur un même support, au sens du principe de superposition stratale [1, rem. 108].

La racine carrée du demi-tour comme aller-retour en résolution

Définition 31 (Dédoublément stratal). Soit $c \in \widetilde{\mathbb{R}}$ inversible, par exemple $c = 2^{n_\infty}$. Dans $V = L \oplus L$, la première copie porte le grain fin δ_f et la seconde le grain $c\delta_f$ (le grain grossier δ_g lorsque $c = 2^{n_\infty}$). Les deux structures déjà construites fournissent deux façons d'identifier les copies :

- *l'identification directe*, issue du dédoublement : $d_c : x \mapsto cx$, de la copie fine vers la copie grossière ; elle envoie le m -ième grain fin sur le m -ième grain grossier ;
- *l'identification par la superposition*, qui dépose la seconde copie retournée : $r_c : y \mapsto \sigma(y/c) = -y/c$, de la copie grossière vers la copie fine.

L'échange des copies est l'application

$$J(x, y) = (r_c(y), d_c(x)) = (-y/c, cx) :$$

l'aller se fait par le dédoublement, avec passage au grain grossier ; le retour se fait par la superposition, avec retour au grain fin et retournement.

Remarque 32 (Dans la lecture normée, l'échange est $\hat{i}$). Avec $c = a$ et chaque copie normée par son propre grain, l'échange J est exactement le quart de tour normé $\hat{i}$ de la section 3 : J est la traduction en longueurs de $\hat{i}$ (remarque 3).

Proposition 33 (La racine carrée du demi-tour est un aller-retour en résolution). *Soit J l'échange de la définition 31.*

1. $J^2 = -\text{Id}$: l'échange est une racine carrée du demi-tour.
2. Dans J^2 , les changements de grain se compensent (facteur $c \cdot c^{-1} = 1$) ; le signe -1 provient du retournement σ , traversé exactement une fois.
3. Si le retournement est traversé à l'aller et au retour, ou jamais, l'échange devient $E(x, y) = (\pm y/c, \pm cx)$ avec le même signe, et $E^2 = +\text{Id}$: c'est une symétrie, et non une rotation.
4. Compté en grains, avec $x = m\delta_f$ sur la copie fine et $y = n(c\delta_f)$ sur la copie grossière, l'échange agit sur les indices par

$$(m, n) \mapsto (-n, m) :$$

c'est exactement le quart de tour du réseau des indices.

5. J est l'application J_c du théorème 38 ci-dessous.

Démonstration. Point 1. $J^2(x, y) = J(-y/c, cx) = (-cx/c, -cy/c) = (-x, -y)$.

Point 2. La composante x passe par d_c puis par r_c , soit $x \mapsto cx \mapsto -cx/c$; de même pour y . Le produit des échelles vaut 1, et le seul signe vient de σ .

Point 3. $E^2(x, y) = E(\pm y/c, \pm cx) = (x, y)$, les deux signes égaux se multipliant en $+1$.

Point 4. $J(m\delta_f, n c\delta_f) = (-n\delta_f, m c\delta_f)$.

Point 5. Comparer les formules. □

La racine carrée du demi-tour n'a donc pas à être postulée : elle est la composition des deux identifications que fournissent le dédoublement et la superposition. Le seul choix qui reste est celui de la jambe qui porte le retournement, et il ne fixe que l'orientation du plan. C'est aussi la différence avec l'opérateur externe $\omega = 2^{n_\infty}i$ de [2, § 6] : ω monte d'un niveau sur les deux jambes, et $\omega^2 = -2^{2n_\infty}$; l'échange J monte à l'aller et redescend au retour, ce qui ramène son carré exactement à -1 .

Ingrédient	Ce qu'il apporte
le changement de grain (fin / grossier)	il <i>distingue</i> les deux copies : deux strates sur un même support ; il se compense dans J^2
le retournement de la superposition	le signe -1 , c'est-à-dire le demi-tour
l'échange (aller direct, retour par la superposition)	la <i>racine carrée</i> : $J^2 = -\text{Id}$; compté en grains, le quart de tour des indices
le choix de la jambe retournée	l'orientation : i ou $-i$

TABLE 1 – Les ingrédients de la racine carrée du demi-tour.

Version géométrique : orthogonalité et orbite des orientations

La proposition 33 est algébrique : elle calcule J^2 . On peut en donner une lecture plus géométrique, en faisant agir J non sur des points, mais sur les deux droites elles-mêmes, munies de leur orientation. Deux précautions sont nécessaires. D'abord, une droite passant par 0 vérifie $-\Delta = \Delta$ comme ensemble : les écritures $\pm\Delta$ n'ont de sens que pour des droites *orientées*. Ensuite, dire que J est une rotation d'un droit suppose une métrique ; pour la longueur usuelle, J n'est une isométrie que si $c = \pm 1$ (théorème 38). La bonne métrique est celle qui compte en grains.

Définition 34 (Droites orientées du dédoublement, métrique en grains). On garde les notations de la définition 31, avec $c = 2^{n_\infty}$.

- On note Δ^{--} la copie fine $\iota_1(L)$ et Δ^- la copie grossière $\iota_2(L)$, et l'on munit chacune d'une orientation $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{+1, -1\}$; l'état des deux droites est le couple $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.
- Les deux droites sont *superposées en sens opposés* lorsque $\varepsilon_2 = -\varepsilon_1$.
- Le *produit scalaire en grains* sur V est

$$\langle v, v' \rangle_g = mm' + nn', \quad v = (m\delta_f, n c\delta_f), \quad v' = (m'\delta_f, n' c\delta_f);$$

il mesure chaque composante dans sa propre graduation.

Proposition 35 (Orthogonalité des deux droites). 1. Pour $\langle \cdot, \cdot \rangle_g$, l'échange J est une isométrie ; dans la base des grains, sa matrice est

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire la rotation d'un angle droit.

2. $J(\Delta^{--}) = \Delta^-$, en respectant l'orientation, et $J(\Delta^-) = \Delta^{--}$, en la renversant.
3. $\Delta^{--} \perp \Delta^-$ pour $\langle \cdot, \cdot \rangle_g$: la droite grossière est l'image de la droite fine par un quart de tour.

Démonstration. Point 1. Par la proposition 33, point 4, J agit sur les indices par $(m, n) \mapsto (-n, m)$. C'est la matrice annoncée ; elle conserve $m^2 + n^2$, donc $\langle \cdot, \cdot \rangle_g$.

Point 2. $J(x, 0) = (0, cx)$: le point d'indice m de la copie fine va sur le point d'indice m de la copie grossière, avec le même signe. $J(0, y) = (-y/c, 0)$: le point d'indice n de la copie grossière va sur le point d'indice $-n$ de la copie fine.

Point 3. Pour $v = (m\delta_f, 0) \in \Delta^{--}$ et $v' = (0, n c\delta_f) \in \Delta^-$, on a $\langle v, v' \rangle_g = m \cdot 0 + 0 \cdot n = 0$. Géométriquement : une rotation d'un angle droit envoie toute droite sur une droite orthogonale, et $\Delta^- = J(\Delta^{--})$ par le point 2. $\square$

L'orthogonalité est donc exacte, mais relative à la lecture en résolution : pour la longueur usuelle, J étire un axe d'un facteur 2^{n_∞} et écrase l'autre, et l'angle droit n'est pas conservé au sens métrique. C'est la même situation que pour la symétrie par i dans le plan à deux résolutions [2].

L'orbite des orientations. Après superposition, les deux droites sont portées par le même support vertical. Un quart de tour ne peut plus y être vu comme une rotation : il ne laisse qu'une trace sur les *orientations*. Le point 2 de la proposition 35 donne cette trace :

$$J : (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \mapsto (-\varepsilon_2, \varepsilon_1), \quad J^2 : (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \mapsto (-\varepsilon_1, -\varepsilon_2).$$

Un pas de J retourne *une seule* des deux droites ; deux pas les retournent toutes les deux, ce qui est le demi-tour global.

La figure 4 montre ce passage dans la lecture de l'auteur, où l'on part des deux droites verticales confondues. Au départ, les deux droites sont superposées sur le support vertical, en sens opposés : la somme orientée est nulle. Un pas de J fait accomplir un *angle droit* à la droite fine, qui passe en position horizontale, tandis que la droite grossière reste sur le support et se retourne, ce qui est un *angle plat* : les deux droites sont alors orthogonales. Un second pas ramène la droite fine sur le support vertical par un second angle droit, la droite grossière ne bougeant plus. Au total, chacune des deux droites a tourné d'un angle plat : c'est $J^2 = -\text{Id}$, et l'on retrouve deux droites confondues de sens opposés, toutes deux retournées. Les orientations obtenues sont exactement celles de l'orbite de la proposition 36 ci-dessous : au pas intermédiaire, les deux droites sont de même sens, et si on les rabat sur le support, la somme vaut $2[L]$.

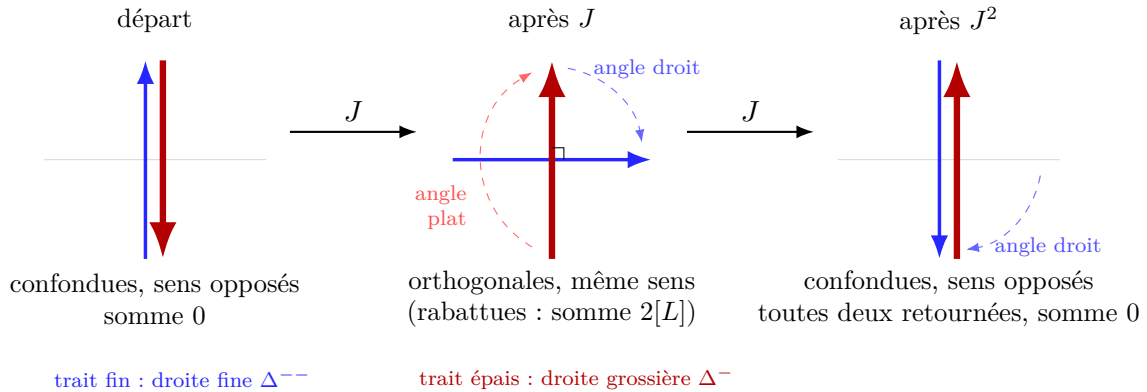


FIGURE 4 – Le passage par les deux droites orthogonales. On part de deux droites verticales confondues, de sens opposés (légèrement écartées sur la figure pour rester visibles). Au premier pas de J , la droite fine tourne d'un angle droit et la droite grossière d'un angle plat : les deux droites sont orthogonales. Au second pas, la droite fine tourne d'un second angle droit et revient sur le support. Chaque droite a finalement tourné d'un angle plat : $J^2 = -\text{Id}$.

Proposition 36 (La somme nulle voit les pas pairs de J). *Superposons les deux droites sur leur support commun, et mesurons-les sur la graduation fine, qui raffine la grossière. La somme orientée vaut $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)[L]$, où $[L]$ est la droite orientée vers le haut. En partant de deux droites superposées en sens opposés, $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (+1, -1)$, l'orbite de J est*

$$(+, -) \xrightarrow{J} (+, +) \xrightarrow{J} (-, +) \xrightarrow{J} (-, -) \xrightarrow{J} (+, -),$$

de sommes orientées successives $0, 2[L], 0, -2[L], 0$. Par conséquent :

1. la configuration de somme orientée nulle est invariante par J^2 , mais pas par J ;
2. les états de somme nulle sont exactement les pas pairs de l'orbite ;
3. J^2 n'est pas l'identité sur les droites étiquetées (fine et grossière) : il échange $(+, -)$ et $(-, +)$. Il n'est invisible que sur la somme orientée.

Démonstration. L'orbite se calcule avec la formule de J sur les orientations. La somme orientée est bien définie parce que la graduation grossière est une réunion de grains fins : les deux mesures orientées vivent sur une grille commune, et la compensation $[L] - [L] = 0$ y est exacte (*Une théorie de la mesure du grain* [3], th. 15). Les points 1 à 3 se lisent sur l'orbite. $\square$

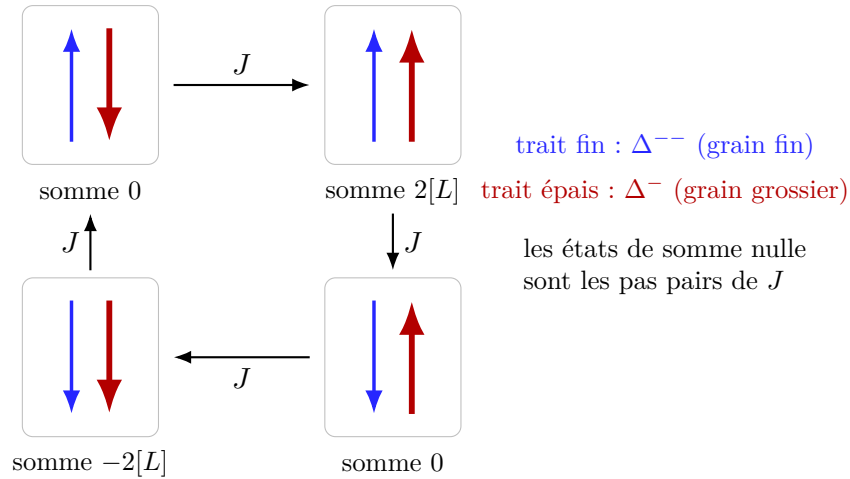


FIGURE 5 – L'orbite de J sur les orientations de deux droites superposées. Un pas de J retourne une seule des deux droites et fait sortir de la somme nulle ; deux pas les retournent toutes les deux et y ramènent.

Remarque 37 (Ce que l'on peut conclure). La lecture géométrique établit trois choses : les deux droites sont orthogonales pour la métrique en grains, parce que l'une est l'image de l'autre par un quart de tour ; la superposition à somme orientée nulle est invariante par J^2 et non par J ; et le quart de tour est la dynamique cachée dont la superposition à somme nulle ne voit que les pas pairs. Elle ne permet pas de dire que la représentation orthogonale et la représentation superposée sont équivalentes au sens fort, puisque J lui-même fait sortir de la somme nulle. L'équivalence vaut au niveau des sommes orientées, et pour les puissances paires de J seulement.

Le théorème suivant montre que cet échange est, à l'échelle c près, le seul possible, et qu'il fait du dédoublement le plan complexe.

Théorème 38 (Le plan complexe se déduit de la superposition). *Soit $V = L \oplus L$ le dédoublement de L .*

1. Les applications linéaires $J_* : V \rightarrow V$ qui envoient $\iota_1(L)$ sur $\iota_2(L)$ et vérifient $J_*^2 = -\text{Id}$ sont exactement les

$$J_c(x, y) = (-y/c, cx), \quad c \in \widetilde{\mathbb{R}} \text{ inversible.}$$

2. Pour chaque c , V muni de J_c est un module libre de rang 1 sur $\widetilde{\mathbb{R}}[i]$, où i agit par J_c , engendré par $\iota_1(1) : l'application $\Phi_c(x, y) = x + iy/c$ l'identifie au plan complexe stratal $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}$, et $\Phi_c \circ J_c = i \cdot \Phi_c$.$

3. J_c est une isométrie de la structure euclidienne de V si et seulement si $c = \pm 1$. Pour $c = 1$, $\Phi_1(x, y) = x + iy$, et J_1 est le quart de tour : on retrouve exactement $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}$ et son i .
4. Pour $c = 1$, la superposition se relit dans $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}$: $s(x, y) = \text{Re}((1 + i)(x + iy))$, et la somme orientée des deux axes repliés est nulle (proposition 27).

Démonstration. Point 1. Comme J_* envoie $\iota_1(L)$ dans $\iota_2(L)$ et est linéaire, il existe $c \in \tilde{\mathbb{R}}$ tel que $J_*(x, 0) = (0, cx)$; c est inversible car J_* l'est ($J_*^{-1} = -J_*$). Alors $J_*(0, cx) = J_*^2(x, 0) = (-x, 0)$, donc $J_*(0, y) = (-y/c, 0)$. Par linéarité, $J_* = J_c$. Réciproquement, $J_c^2(x, y) = J_c(-y/c, cx) = (-x, -y)$.

Point 2. On pose $(\alpha + i\beta) \cdot v = \alpha v + \beta J_c v$; comme $J_c^2 = -\text{Id}$, c'est une action de $\tilde{\mathbb{R}}[i]$. Tout $v = (x, y)$ s'écrit $v = x \iota_1(1) + (y/c) J_c \iota_1(1)$, de façon unique, donc $v = (x + i y/c) \cdot \iota_1(1)$. Enfin $\Phi_c(J_c(x, y)) = -y/c + i x = i(x + i y/c)$.

Point 3. $J_c(1, 0) = (0, c)$ a pour norme $|c|$: si J_c est une isométrie, $|c| = 1$. Réciproquement, $J_{\pm 1}$ est une rotation d'un quart de tour, dans un sens ou dans l'autre.

Point 4. $(1 + i)(x + iy) = (x - y) + i(x + y)$. □

Remarque 39 (Le choix de l'échelle c et les deux lectures). Les structures J_c sont toutes conjuguées au quart de tour par $D_c = \text{diag}(1, c)$: $J_c = D_c J_1 D_c^{-1}$. Pour $c = 2^{n\infty}$, il y a deux façons de lire J_c . *En longueurs*, avec la même unité sur les deux copies, J_c n'est pas une isométrie : on retrouve, à l'inversion de l'échelle près ($c = 1/J$ au lieu de J), la *lecture métrique* de [2, § 8]. *En grains*, chaque copie comptée dans son propre grain, J_c est exactement le quart de tour des indices (proposition 33, point 4) : c'est la *lecture en résolution*. Pour $c = \pm 1$, les deux lectures coïncident et J_c est le quart de tour isométrique ; le changement de grain est alors porté séparément par l'opérateur $\omega = 2^{n\infty} i$, qui n'est pas une structure complexe, puisque $\omega^2 = -2^{2n\infty} \neq -1$.

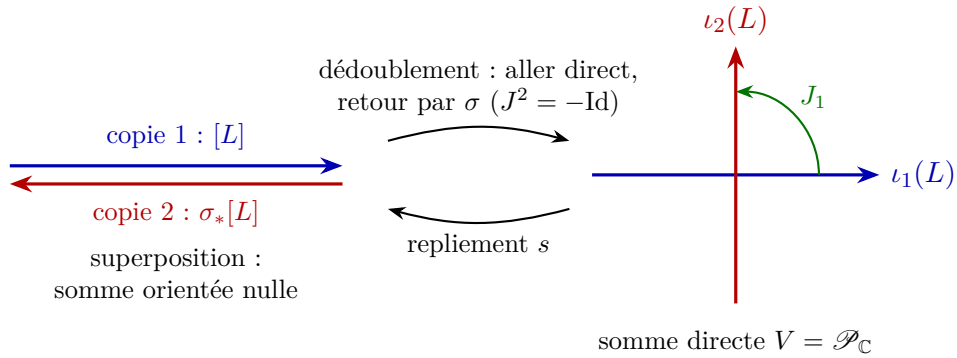


FIGURE 6 – Superposition et dédoublement. À gauche, les deux copies de la droite, superposées avec des orientations opposées : leur somme orientée est nulle. À droite, le dédoublement : les deux copies deviennent deux axes indépendants, échangés par le quart de tour J_1 , racine carrée du demi-tour. Le repliement s ramène la croix des axes sur la droite superposée.

Remarque 40 (Portée de la réciproque). La réciproque est plus faible qu'une construction du plan à partir d'un grain nul, mais elle est exacte, et elle ne postule pas i : de deux droites superposées, de grains différents et de somme orientée nulle, on déduit le plan complexe. Le changement de grain distingue les deux copies ; la superposition fournit le demi-tour ; l'échange, qui va par le dédoublement et revient par la superposition, en fournit la racine carrée, c'est-à-dire i . Le plan obtenu est unique à l'échelle c près, et unique tout court si l'on exige que l'échange soit une isométrie ; le seul choix restant, celui de la jambe retournée, fixe l'orientation.

10 Le grain nul orienté et l'anti-Dirac

La section 6 a montré qu'une pseudo-métrique identiquement nulle sur les *points* ne dit rien. Il en va autrement si l'on travaille sur des *mesures orientées* : on obtient alors une équivalence exacte entre les deux droites superposées et le grain nul, à condition de les regarder comme des objets de même nature, des sommes de grains orientés.

10.1 Les chaînes de grains

Définition 41 (Chaîne). Pour $m \in \tilde{\mathbb{Z}}$, notons $g_m = [m\delta_f, (m+1)\delta_f]$ le grain fin parcouru dans le sens croissant, et $-g_m$ le même grain parcouru dans le sens décroissant. Une *chaîne* est une somme formelle hyperfinie

$$c = \sum_m \varepsilon_m g_m, \quad \varepsilon_m \in \tilde{\mathbb{Z}},$$

où seuls un nombre hyperfini de coefficients sont non nuls. Les chaînes forment un groupe additif, dans lequel $g_m + (-g_m) = 0$. La chaîne est dite *limitée* si sa longueur totale $\sum_m |\varepsilon_m| \delta_f$ est limitée.

Définition 42 (Action et équivalence par la promotion). Une chaîne agit sur toute fonction test standard f (continue, à support compact) par

$$c(f) = \sum_m \varepsilon_m \int_{g_m} {}^*f,$$

où *f est le prolongement de f . Pour deux chaînes limitées, on pose

$$c \approx c' \iff \text{st}(c(f)) = \text{st}(c'(f)) \text{ pour toute fonction test standard } f.$$

Chaque fonction test f définit la pseudo-métrique $d_f(c, c') = |\text{st}((c - c')(f))|$, et $c \approx c'$ si et seulement si $d_f(c, c') = 0$ pour tout f .

Pour une chaîne limitée, $|c(f)| \leq (\sum_m |\varepsilon_m| \delta_f) \sup |f|$ est limité, donc $\text{st}(c(f))$ existe. L'équivalence $\approx$ est la promotion appliquée aux mesures orientées, au lieu des points : elle identifie deux chaînes dont les actions ne diffèrent que d'un infinitésimal, au sens des distributions de Schwartz [4]. Contrairement à la pseudo-métrique nulle de la section 6, les d_f ne sont pas identiquement nulles.

10.2 L'équivalence des droites superposées et du grain nul

Sur une fenêtre $[-M\delta_f, M\delta_f]$, notons

$$c_{\text{sup}} = \sum_{m=-M}^{M-1} g_m + \sum_{m=-M}^{M-1} (-g_{-m-1})$$

la chaîne des deux droites superposées de la proposition 27, la seconde retournée par le demi-tour.

Théorème 43 (Droites superposées et grain nul orienté). 1. $c_{\text{sup}} = 0$ dans le groupe des chaînes.

2. Le grain nul orienté $g_0 = [0, \delta_f]$ vérifie $g_0 \approx 0$. Plus généralement, toute chaîne de longueur totale infinitésimale est équivalente à 0.

3. Par conséquent $c_{\text{sup}} \approx g_0$, et $c_{\text{sup}} \neq g_0$: les deux droites superposées de somme orientée nulle sont équivalentes au grain nul orienté, sans lui être égales.
4. L'équivalence n'est pas triviale : si $A > 0$ est standard et $M\delta_f = A$, la chaîne $\sum_{m=-M}^{M-1} g_m$ d'une seule droite orientée n'est pas équivalente à 0.

Démonstration. Point 1. Proposition 27 : l'application $m \mapsto -m - 1$ est une bijection de $\{-M, \dots, M-1\}$.

Point 2. $|g_0(f)| = |\int_0^{\delta_f} *f| \leq \delta_f \sup|f|$, infinitésimal puisque $\sup|f|$ est standard. De même pour toute chaîne de longueur totale infinitésimale.

Point 3. $c_{\text{sup}} = 0 \approx g_0$; et $g_0 \neq 0$ dans le groupe des chaînes.

Point 4. Soit $f \geq 0$ une fonction test standard, de support dans $] - A, A[$ et d'intégrale $\int f > 0$. L'action de la chaîne est $\int_{-A}^A *f$, qui vaut $\int f$ par transfert : c'est un réel standard non nul. $\square$

10.3 L'anti-Dirac comme orbite du quart de tour normé

On construit maintenant l'anti-Dirac avec le quart de tour normé $\hat{i}$ de la section 3, et non avec ω .

Définition 44 (Chaînes de la croix). Sur Γ_H , notons $g_m^H = [m\delta_f, (m+1)\delta_f]$ le grain fin parcouru dans le sens croissant ; sur Γ_V , notons $g_n^V = i[n\delta_g, (n+1)\delta_g]$ le grain grossier parcouru vers le haut. Une *chaîne de la croix* est une somme formelle hyperfinie de ces grains, à coefficients dans $\tilde{\mathbb{Z}}$; elle agit sur une fonction test standard f du plan par intégration le long des grains, et l'équivalence $\approx$ se définit comme ci-dessus.

Lemme 45 (Action de $\hat{i}$ sur les grains).

$$\hat{i}_* g_m^H = g_m^V, \quad \hat{i}_* g_n^V = -g_{-n-1}^H.$$

Démonstration. $\hat{i}$ envoie les indices $(m, 0)$ et $(m+1, 0)$ sur $(0, m)$ et $(0, m+1)$: le grain fin d'indice m devient le grain grossier d'indice m , parcouru vers le haut. Il envoie $(0, n)$ et $(0, n+1)$ sur $(-n, 0)$ et $(-n-1, 0)$: le grain grossier d'indice n devient le grain fin $[-(n+1)\delta_f, -n\delta_f]$, parcouru vers la gauche, c'est-à-dire $-g_{-n-1}^H$. $\square$

Théorème 46 (L'anti-Dirac est l'orbite de $\hat{i}$). Soit $c_M = \sum_{m=-M}^{M-1} g_m^H$ un segment orienté centré de Γ_H , et

$$A_M = c_M + \hat{i}_* c_M + \hat{i}_*^2 c_M + \hat{i}_*^3 c_M$$

la croix orientée, somme de son orbite sous $\hat{i}$.

1. $\hat{i}_*^2 c_M = -c_M$: le demi-tour retourne le segment centré.
2. $A_M = 0$ exactement, grain par grain. Les deux branches horizontales se compensent sur la graduation fine, les deux branches verticales sur la graduation grossière : aucun raffinement commun ni aucun arrondi n'est nécessaire.
3. $c_M + \hat{i}_*^2 c_M = c_{\text{sup}}$: les deux droites superposées du théorème 43 sont la moitié horizontale de la croix orientée.
4. Aucune branche prise seule n'est équivalente à 0 : si $M\delta_f = A$ est standard, chaque branche a une action standard non nulle sur une fonction test positive convenable.
5. Avec ω au lieu de $\hat{i}$, la compensation échoue : $\omega_*^2 c_M$ est le segment dilaté d'un facteur a^2 et retourné, et $c_M + \omega_*^2 c_M \neq 0$.

Démonstration. Point 1. Par le lemme, $\hat{i}_*^2 g_m^H = \hat{i}_* g_m^V = -g_{-m-1}^H$. Sur la fenêtre centrée, $m \mapsto -m-1$ est une bijection de $\{-M, \dots, M-1\}$, donc $\hat{i}_*^2 c_M = -c_M$.

Point 2. $c_M + \hat{i}_*^2 c_M = 0$ par le point 1, et $\hat{i}_* c_M + \hat{i}_*^3 c_M = \hat{i}_*(c_M + \hat{i}_*^2 c_M) = 0$. La première égalité porte sur des grains fins de Γ_H , la seconde sur des grains grossiers de Γ_V : chaque compensation a lieu sur la graduation propre de son axe.

Point 3. $\hat{i}_*^2 c_M = \sum_m (-g_{-m-1}^H)$ est la seconde somme de la définition de c_{sup} .

Point 4. Pour la branche horizontale, c'est le théorème 43, point 4. Pour la branche verticale, qui couvre $i[-M\delta_g, M\delta_g]$, on prend $f \geq 0$ standard, de support près de $i[\frac{1}{2}, 1]$ et non identiquement nulle sur ce segment : l'action est l'intégrale standard de f le long de ce segment, non nulle.

Point 5. $\omega^2 = -a^2$ envoie g_m^H sur un segment de longueur $a^2\delta_f$, réunion de a^2 grains fins. Sur un grain fin de $[A, a^2A]$, c_M a le coefficient 0 et $\omega_*^2 c_M$ un coefficient non nul : la somme n'est pas nulle. $\square$

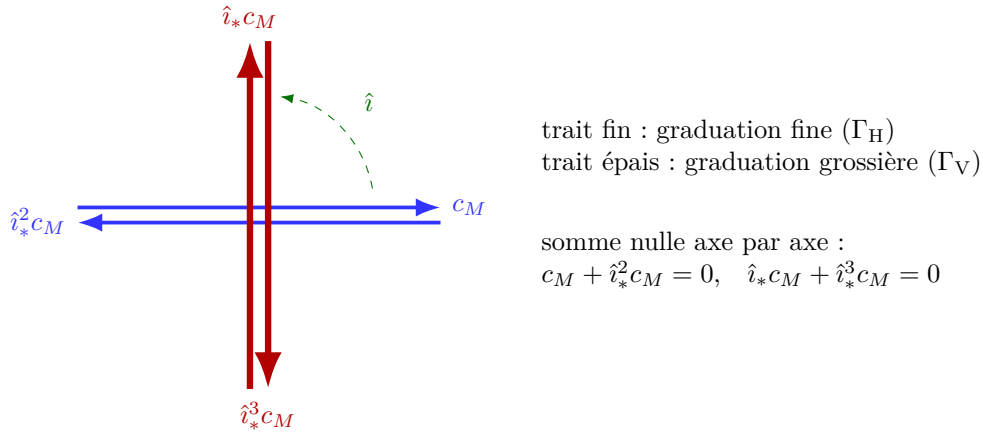


FIGURE 7 – La croix orientée : l'orbite sous le quart de tour normé d'un segment centré c_M de l'axe fin. Sur chaque axe, les deux images sont le même segment centré parcouru en sens opposés (légèrement écartées pour rester visibles) : elles se compensent sur la graduation de leur axe.

Remarque 47 (La croix et le barycentre). La croix orientée est la version « chaînes » du barycentre $1 + i + i^2 + i^3 = 0$ de la section 8. Comme pour le barycentre, la compensation repose sur le demi-tour $\hat{i}^2 = -\text{Id}$, et elle demande un segment *centré* : pour un segment quelconque, l'image par le demi-tour est son symétrique par rapport à 0, qui n'est pas son opposé. Elle échoue avec ω pour la même raison que $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 \neq 0$: les quatre images vivent sur quatre strates différentes.

10.4 Le Dirac, le dipôle et l'anti-Dirac

Le même grain nul peut porter plusieurs densités, qui se promeuvent de façons très différentes.

Proposition 48 (Trois densités sur le grain nul). *Soit f une fonction test standard.*

1. Masse unité concentrée. La mesure $\mu_0(f) = \frac{1}{\delta_f} \int_{g_0} *f$ vérifie st $\mu_0(f) = f(0)$: elle se promeut en la mesure de Dirac δ_0 .
2. Longueur orientée. st $g_0(f) = 0$: le grain nul orienté se promeut en la mesure nulle.

3. Dipôle. Le bord du grain, $\partial g_0 = \delta_{\delta_f} - \delta_0$, se promeut en 0 ; mais, si f est de classe C^1 , son quotient par l'épaisseur vérifie

$$\text{st}\left(\frac{f(\delta_f) - f(0)}{\delta_f}\right) = f'(0) :$$

$\frac{1}{\delta_f} \partial g_0$ se promeut en $-\delta'_0$, la dérivée de la mesure de Dirac (au sens des distributions, $\delta'_0(f) = -f'(0)$).

Démonstration. Point 1. Par la moyenne, $\frac{1}{\delta_f} \int_0^{\delta_f} *f = *f(\xi)$ avec $0 \leq \xi \leq \delta_f$, et $*f(\xi) \simeq f(0)$ par continuité.

Point 2. Théorème 43, point 2.

Point 3. $\partial g_0(f) = f(\delta_f) - f(0) \simeq 0$ par continuité ; le quotient est un taux d'accroissement sur un grain, dont la partie standard est $f'(0)$. $\square$

Objet	Étendue, masse	Promotion	Lecture
masse 1 sur le grain nul (densité $1/\delta_f$)	étendue nulle, masse 1	δ_0	concentration maximale : le Dirac
bord du grain nul divisé par δ_f	étendue nulle, deux masses opposées	$-\delta'_0$	le dipôle
grain nul orienté (densité 1)	étendue et masse infinitésimales	0	le grain nul
deux droites superposées (densités ± 1)	étendue illimitée, somme nulle	0	moitié horizontale de l'anti-Dirac
croix orientée (orbite de $\hat{i}$)	étendue sur les deux axes, somme nulle	0 (et = 0 exactement)	l'anti-Dirac : étalement maximal à somme nulle

TABLE 2 – Densités portées par le grain nul et par les droites superposées.

La croix orientée réalise ainsi l'*anti-Dirac* : le Dirac concentre une masse 1 dans un grain d'étendue nulle ; la croix étale sur les deux axes une densité ± 1 de somme nulle, et les droites superposées en sont la moitié horizontale. Le premier se promeut en δ_0 , le second en 0. Le grain nul orienté est à la frontière des deux : d'étendue et de masse infinitésimales, il se promeut lui aussi en 0, et c'est par là que l'anti-Dirac lui est équivalent.

10.5 La chaîne complète

On peut maintenant relier le grain nul au plan complexe, en précisant la nature de chaque lien :

$$\underbrace{g_0}_{\text{grain nul orienté}} \approx 0 = \underbrace{A_M}_{\text{croix orientée}} \supset \underbrace{c_{\text{sup}}}_{\text{droites superposées}} \longrightarrow \underbrace{\mathcal{P}_{\mathbb{C}}}_{\text{plan complexe}} .$$

- $\approx$ est l'équivalence par la promotion des mesures orientées (théorème 43) : faible, mais exacte ;
- $=$ est l'égalité dans le groupe des chaînes : la croix orientée est nulle (théorème 46), et $\supset$ indique que les droites superposées en sont la moitié horizontale ;
- $\longrightarrow$ est le dédoublement stratal (définition 31, proposition 33 et théorème 38) : les deux copies, distinguées par leur grain, sont échangées par un aller-retour en résolution, qui est une racine carrée du demi-tour.

- Remarque 49* (Les limites de l'équivalence). 1. L'équivalence porte sur des *mesures orientées*, et non sur des ensembles de points. Le plan, en tant qu'ensemble de points, n'est pas une chaîne : ce sont ses deux axes, repliés par h , qui forment les droites superposées. Le plan est relié au grain nul par ce repliement et par le dédoublement, il ne lui est pas identifié.
2. La classe de 0 pour $\approx$ est grande : elle contient tout grain orienté isolé, toute chaîne de longueur totale infinitésimale, et toute configuration qui se compense. Être équivalent au grain nul orienté signifie donc « avoir une action promue nulle », ce qui est un énoncé modeste, mais précis.
3. La même chaîne g_0 , munie de la densité $1/\delta_f$, n'est pas équivalente à 0 : elle se promeut en δ_0 . Le « grain nul » n'est pas nul par nature ; il l'est par la densité qu'on lui fait porter.

11 Synthèse : quatre équivalences

Pseudo-métrique	Quotient	Classe de 0	Promotion
nulle ($d \equiv 0$)	un point, pour tout ensemble	tout l'ensemble	incompatible : identifie 1 et 0
$d_h = h(z) - h(w) $	la droite $\tilde{\mathbb{R}}$	le noyau N , droite de pente J	classes $\rightarrow$ droites horizontales ; $N \rightarrow \mathbb{R}$
$d_{st} = st z - w $	$\mathbb{C}$	la monade $\mathfrak{M}(0)$: le grain nul	c'est la promotion elle-même
$d_f(c, c') = st((c - c')(f)) $, sur les chaînes	des mesures signées sur $\mathbb{R}$	les chaînes d'action infinitésimale, dont le grain nul orienté et les droites superposées	promotion des mesures orientées

TABLE 3 – Quatre façons d'identifier des objets : trois sur les points du plan, une sur les mesures orientées.

La question initiale se résout ainsi.

- La pseudo-métrique nulle rend le plan équivalent à un point, mais elle le ferait pour n'importe quel ensemble, et elle contredit la promotion.
- La pseudo-métrique issue de h rend le plan équivalent à une droite ; sa classe nulle se promeut en l'axe réel, et non en 0.
- La pseudo-métrique de la promotion possède un grain nul exact, la monade de 0 ; mais ce grain nul est une classe parmi d'autres, et le plan n'est équivalent à lui que dans son voisinage infinitésimal de l'origine.
- Sur les mesures orientées, l'équivalence par la promotion rend les deux droites superposées de somme orientée nulle équivalentes au grain nul orienté, sans les lui rendre égales ; et le dédoublement ramène des droites superposées au plan complexe.
- L'anti-Dirac se construit avec le quart de tour normé $\hat{i}$: la croix orientée est exactement nulle, et sa moitié horizontale est formée des droites superposées.

12 Conclusion

L'application $h(x + y) = x + \omega y$ exprime correctement l'idée que ω range l'axe grossier sur l'axe fin : elle envoie toute la grille du plan dans la graduation fine, en convertissant chaque pas grossier vertical en un tour complet. C'est la projection du plan sur l'axe réel parallèlement à une droite de pente infinitésimale $J = 2^{-n_\infty}$.

Elle ne rend pas le plan équivalent à un grain nul : elle le rend équivalent à une droite, et, à la promotion, sa classe nulle devient l'axe réel tout entier. Le grain nul existe bien, mais au sens de la promotion : c'est la monade de 0, dans laquelle s'enfonce la moitié descendante de l'hélice des puissances de ω , et qui porte la hiérarchie des infinitésimaux stratifiés du chapitre 15 de [1]. Le zéro apparaît aussi par compensation, comme barycentre des jonctions du situs, grâce au demi-tour, et comme somme orientée des deux axes repliés l'un sur l'autre. Réciproquement, deux droites superposées de somme orientée nulle, distinguées par leur grain, redonnent le plan complexe : i y apparaît comme un aller-retour en résolution qui traverse une fois le retournement. Et, sur les mesures orientées, ces deux droites superposées sont équivalentes au grain nul orienté : avec leurs images par le quart de tour normé $\hat{i}$, elles forment la croix orientée, un anti-Dirac qui étale une densité de somme nulle là où le Dirac concentre une masse unité. Dans tous ces cas, on retrouve la distinction centrale de la théorie du grain : un grain nul est *équivalent* à zéro par la promotion, sans lui être *égal*.

Références

- [1] H. Genvrin, *Théorie du grain*, manuscrit, 2026 ; chap. 13 (Exponentiation) et chap. 15 (Cardinal et promotion algébrique).
- [2] H. Genvrin, *Du cercle complexe au plan complexe : deux axes, deux résolutions*, manuscrit, 2026.
- [3] H. Genvrin, *Une théorie de la mesure du grain*, manuscrit, 2026.
- [4] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, Hermann, 1950–1951.
- [5] A. Robinson, *Non-standard Analysis*, North-Holland, 1966.
- [6] S. Willard, *General Topology*, Addison-Wesley, 1970.