

Anomalie cartésienne et champ

Le principe d'équivalence comme grain hétérogène de l'axe q

Hugues GENVRIN

Octobre 2026

Cadre

On rappelle la lecture stratale. Une application dérivable f impose sur son axe d'arrivée un *grain* local — le facteur de stratification — égal à son jacobien $|f'|$; l'anomalie cartésienne est le fait que ce grain ne soit pas constant. Le long d'une trajectoire $t \mapsto y(t)$, on note $q = m\dot{y}$ la quantité de mouvement et $C = m\ddot{y}$ la force.

1. Le système uniformément accéléré et le champ constant

Définition 1 (Accélération uniforme). Un système est *uniformément accéléré* si la force est constante :

$$dq = C dt, \quad C = \text{cte}, \quad \text{soit} \quad q(t) = q_0 + C t.$$

Proposition 1 (Équivalence avec un champ constant). *Une force constante C imprime à tout corps la même accélération $a = C/m$. Elle est donc localement indiscernable de l'action d'un champ vectoriel constant $g = a$ s'appliquant identiquement en tout point de l'espace. C'est le principe d'équivalence d'Einstein (la cabine accélérée $\equiv$ le champ uniforme).*

Remarque 1. L'équivalence est *exacte* pour un champ uniforme, et seulement *locale* pour une gravité réelle (§4).

2. Le grain de l'axe q : une stratification hétérogène

Le mot « déformé » se justifie dès qu'on précise *contre quel axe* on lit le grain de q .

Proposition 2 (Grain de q contre le temps : uniforme). *Contre l'axe du temps, $q(t) = q_0 + Ct$ est affine : le grain*

$$\frac{dq}{dt} = C$$

est constant. Aucune anomalie ; la stratification temporelle de q est homogène.

Proposition 3 (Grain de q contre l'espace : hétérogène). *Contre l'axe des positions, le grain de q n'est pas constant :*

$$\frac{dq}{dy} = \frac{C}{\dot{y}} = \frac{mC}{q}.$$

Il varie donc comme $1/q$: dense là où le moment est petit, épars là où il est grand.

Démonstration. Par la règle de dérivation en chaîne le long de la trajectoire,

$$\frac{dq}{dy} = \frac{dq/dt}{dy/dt} = \frac{C}{\dot{y}},$$

puis $\dot{y} = q/m$ donne $dq/dy = mC/q$. □

Corollaire 1 (La loi en racine). *En intégrant $q dq = mC dy$ (départ au repos en y_0),*

$$\frac{1}{2}q^2 = mC(y - y_0) \quad \implies \quad q(y) = \sqrt{2mC(y - y_0)} \propto \sqrt{y - y_0}.$$

Le grain $dq/dy = mC/q \propto 1/\sqrt{y - y_0}$ diverge au point de rebroussement ($q = 0$) et s'amincit en aval.

Remarque 2 (Réconciliation des deux lectures). « q dérive à taux constant » (contre le temps, grain C) et « q est déformé » (contre l'espace, grain mC/q) sont toutes deux exactes : elles décrivent le même mouvement lu contre deux axes différents. La *déformation* dont il est question est la stratification hétérogène $dq/dy = mC/q$ — une anomalie cartésienne au sens du Théorème 62, avec ici un profil en racine (comme le logarithme y produisait la métrique stratale, le champ constant produit un grain en $1/\sqrt{\cdot}$).

Remarque 3 (Déformation homogène = champ uniforme). La déformation des incréments $dt \mapsto dq = C dt$ est une dilatation à *facteur constant* : son coefficient vaut C en tout point. Cette *homogénéité* est la signature d'un champ identique partout — un champ uniforme (vertical) sur tout l'espace. Elle ne contredit pas l'hétérogénéité de la Proposition 3 : les deux lectures sont reliées par la reparamétrisation temps $\rightarrow$ espace,

$$\frac{dq}{dy} = \underbrace{\frac{dq}{dt}}_{= C \text{ (le champ)}} \cdot \underbrace{\frac{dt}{dy}}_{= 1/\dot{y} \text{ (la cinématique)}} = \frac{C}{\dot{y}}.$$

L'homogénéité *vit dans le champ* (le facteur constant C , le terme $dt \mapsto C dt$) ; l'hétérogénéité contre l'espace *ne vient pas du champ* mais du facteur $1/\dot{y}$ — la trajectoire échantillonne l'espace de plus en plus vite. Enfin, une déformation homogène (C constant) se supprime par un changement *global* de repère — un pur Γ (section 5) ; si $C = C(y)$ dépendait du lieu, la déformation serait elle-même inhomogène et relèverait de la courbure (section 6). D'où la ligne de partage :

$$\underbrace{dt \mapsto C dt}_{\text{homogène}} \Leftrightarrow \Gamma \text{ supprimable}; \quad \underbrace{dt \mapsto C(y) dt}_{\text{inhomogène}} \Leftrightarrow R \text{ irréductible (marée)}.$$

3. Déformation stratale homogène du grain dq

On reprend, sur l'axe de la quantité de mouvement, la construction de l'article *La chute libre : une interprétation physique de la théorie du grain* (cité [CL] ci-dessous), qui établit la loi des nombres impairs de Galilée au niveau des grains. Le cas de q est plus simple : c'est le cas $p = 1$ des lois de puissance de [CL, prop. 10], celui où il n'y a pas de stratification.

Notations de [CL]. n_∞ est un hyperentier, $k \geq 1$ un entier et $\varepsilon = 2^{-kn_\infty}$. La grille de résolution $-kn_\infty$ découpe $[0, 1[$ en 2^{kn_∞} grains $[m\varepsilon, (m+1)\varepsilon[$; leurs extrémités sont les jonctions. La promotion est réalisée par la partie standard st .

Normalisation. Chute sans vitesse initiale, de durée T et de hauteur L : $q(t) = Ct$ et $x(t) = \frac{1}{2}at^2$, avec $a = C/m$. On pose $\tau = t/T$, $X = x/L$ comme dans [CL], et $Q = q/(CT)$. Il vient

$$Q(\tau) = \tau, \quad X(\tau) = \tau^2, \quad \text{donc} \quad X = Q^2.$$

Le temps et la quantité de mouvement ont le poids 1, l'espace le poids 2.

Théorème 1 (Grain homogène de q). *Découpons le temps en grains uniformes $\tau_m = m\varepsilon$, $0 \leq m \leq 2^{kn_\infty}$. Pendant le m -ième grain de temps, la quantité de mouvement parcourt le grain*

$$H_m = [Q(\tau_m), Q(\tau_{m+1})[= [m\varepsilon, (m+1)\varepsilon[.$$

1. Les extrémités de H_m sont des jonctions de la grille de résolution $-kn_\infty$: la même résolution que le temps (poids 1).
2. H_m contient exactement un grain de cette grille, pour tout m .
3. Les M premiers grains de temps couvrent exactement M grains : $\sum_{m=0}^{M-1} 1 = M$.

Démonstration. $Q(\tau_m) = m\varepsilon$ est une jonction ; l'épaisseur de H_m est ε ; la somme vaut M . $\square$

Remarque 4 (Déformation stratale homogène). C'est la stratification fonctionnelle [CL, th. 1] à facteur constant, $|Q'(\tau)| = 1$: le cas de l'article sur la réflexivité ($f(x) = ax$), et l'Exemple 11 de [CL] ($p = 1$, pas de stratification). En unités physiques, un grain de temps d'épaisseur $T\varepsilon$ produit un grain de quantité de mouvement d'épaisseur $CT\varepsilon$: c'est la déformation homogène $dt \mapsto C dt$, de facteur constant C .

Proposition 4 (Raffinement et dilatation). 1. À la résolution $-(N+1)$, le grain H_m^N se coupe en H_{2m}^{N+1} et H_{2m+1}^{N+1} , qui contiennent chacun un grain : $1 + 1 = 2^1$, le nombre de grains de résolution $-(N+1)$ contenus dans un grain de résolution $-N$. La loi est compatible avec le raffinement de la tour ([CL, prop. 7], avec $p = 1$).

2. Les dilatations de [CL, prop. 8] s'étendent en $D_\lambda : (\tau, Q, X) \mapsto (\lambda\tau, \lambda Q, \lambda^2 X)$: elles laissent invariantes à la fois $Q = \tau$ et $X = Q^2$.

Proposition 5 (Le grain homogène de q engendre les nombres impairs). Puisque $X = Q^2$, le m -ième grain d'espace de [CL, th. 6] est l'image de H_m par l'élévation au carré, $G_m = [Q(\tau_m)^2, Q(\tau_{m+1})^2[$, et son épaisseur vaut exactement

$$|G_m| = (Q(\tau_m) + Q(\tau_{m+1})) |H_m| = (m + (m+1)) \varepsilon \cdot \varepsilon = (2m+1) \varepsilon^2.$$

Le nombre impair $2m+1 = m + (m+1)$ est la somme des comptages cumulés de grains de q aux deux jonctions du grain de temps. Réciproquement, deux nombres impairs consécutifs diffèrent de $2 = 2 \times 1$: la loi des nombres impairs est la trace, au poids 2, du grain homogène de poids 1.

Démonstration. $Q(\tau_{m+1})^2 - Q(\tau_m)^2 = (Q(\tau_{m+1}) + Q(\tau_m))(Q(\tau_{m+1}) - Q(\tau_m))$, avec $Q(\tau_{m+1}) - Q(\tau_m) = \varepsilon$. $\square$

Remarque 5 (La vitesse comme facteur de stratification). C'est la Proposition 13 de [CL] lue sur l'axe q : $(2m+1)\varepsilon^2 = v(\tau_m)\varepsilon + \varepsilon^2$ avec $v = X'(\tau) = 2\tau = 2Q$. L'axe des positions est stratifié par la fonction $Q \mapsto Q^2$, de facteur local $2Q$; l'axe de q ne l'est pas. Lue dans l'autre sens, $Q = \sqrt{X}$ stratifie l'axe q contre l'espace par le facteur $1/(2\sqrt{X})$: c'est le grain hétérogène $dq/dy = mC/q$ de la section 2.

Proposition 6 (Triple équivalence). *Les trois énoncés suivants sont équivalents :*

- (i) **Déformation stratale homogène** : pour tout mobile et en tout lieu, chaque grain de temps produit un grain de quantité de mouvement d'épaisseur $CT\varepsilon$, avec $C = mg$ et g le même pour tous (théorème 1) ;
- (ii) **Champ homogène** : un champ vectoriel constant g agit identiquement en tout point de l'espace ;
- (iii) **Référentiel uniformément accéléré** : on décrit des corps libres depuis un repère qui accélère de $-g$ par rapport à un repère inertiel.

Démonstration. (i) $\Leftrightarrow$ (ii) : un grain de q d'épaisseur $mgT\varepsilon$, le même pour tout mobile et en tout lieu, signifie que chaque corps reçoit la même accélération g où qu'il soit : c'est la définition d'un champ homogène. (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) : si y' est la position dans un repère inertiel, la position vue d'un repère accéléré de $-g$ est $y = y' + \frac{1}{2}gt^2$, d'où $q = q' + mgt$. Un corps libre (grains de q' d'épaisseur nulle) y présente exactement les grains d'épaisseur $mgT\varepsilon$, pour tout corps et en tout lieu. Aucune mesure faite dans le repère ne distingue les deux descriptions. $\square$

Proposition 7 (Effacement dans le référentiel en chute libre). *Dans le repère qui accélère avec a , $q' = q - Ct$ et $x' = x - \frac{1}{2}at^2$. Les grilles deviennent :*

	<i>laboratoire (champ)</i>	<i>chute libre</i>
grains de q par grain de temps	1 (poids 1, homogène)	0
grains fins d'espace dans G_m	$2m + 1$ (poids 2, impairs)	1 ou 0 ($p = 1$)

Partie du repos, la particule est immobile dans ce repère : toutes les jonctions coïncident. Avec une vitesse initiale v_0 , on a $x' = v_0t$, c'est-à-dire le cas $p = 1$ de [CL] : chaque grain de temps produit un grain d'espace uniforme, et il n'y a plus de stratification.

Remarque 6 (Transformation globale, et non locale). Le passage au référentiel en chute libre est une transformation *globale* : la même en tout point et à tout instant, comme l'invariance d'échelle de [CL, rem. 9]. Il n'efface qu'un champ homogène. Si le facteur dépendait du lieu, $C = C(y)$, les grains de q ne seraient plus homogènes, deux mobiles voisins recevraient des grains différents, et aucune transformation globale ne les ramènerait tous deux à zéro : c'est l'effet de marée (section 6). Il faudrait alors une version *locale* (un repère en chute libre par région, raccordés par une règle), ce qui rejoint la perspective ouverte en conclusion de [CL]. C'est exactement ce que réalise la relativité générale : des repères en chute libre locaux, raccordés par la connexion Γ , dont l'obstruction est la courbure R .

Référence. [CL] H. Genvrin, *La chute libre : une interprétation physique de la théorie du grain*, manuscrit, 2026. La figure *principe_equivalence_graphes* illustre le tableau : panneaux (a)–(b) pour le laboratoire, (c)–(d) pour la chute libre.

4. Approche réciproque : le grain temporel

La section 3 lit la déformation du temps vers la quantité de mouvement, $dt \mapsto dq = C dt$. On examine ici le sens réciproque : la quantité de mouvement « déforme-t-elle » le temps ? Il faut distinguer deux choses, une *relecture* du temps à travers q , qui est exacte mais n'apprend rien de nouveau, et une vraie *déformation* du grain temporel, qui est un effet physique mesuré.

4.1 La quantité de mouvement comme horloge

Proposition 8 (Réciproque homogène). *En champ uniforme ($C \neq 0$), $q(t) = q_0 + Ct$ est strictement monotone, donc inversible :*

$$t(q) = \frac{q - q_0}{C}, \quad \frac{dt}{dq} = \frac{1}{C} \quad (\text{constant}).$$

Dans les notations de la section 3, $\tau(Q) = Q$: chaque grain H_m de quantité de mouvement renvoie exactement un grain de temps $[\tau_m, \tau_{m+1}]$. La stratification réciproque est homogène, de poids 1, et elle est la même pour le champ uniforme et pour le référentiel uniformément accéléré.

Démonstration. $Q(\tau) = \tau$ est l'identité, donc sa réciproque aussi. Les deux descriptions ayant le même $q(t)$ (proposition 6), elles ont la même réciproque. $\square$

En champ uniforme, la quantité de mouvement est donc un bon paramètre de temps : une horloge, dont le grain est homogène et de même poids que le grain temporel.

Remarque 7 (Relecture, et non déformation). La réciproque $t(q)$ est une reparamétrisation : on gradue le même mouvement autrement, mais rien n'agit sur le temps. En mécanique newtonienne, le temps est absolu, et un champ ne change la marche d'aucune horloge. Il faut donc écrire « le temps se lit à travers q » plutôt que « q déforme le temps ».

Remarque 8 (L'identité des lois ne se déduit pas de la réciproque). Les réciproques de deux fonctions égales sont égales. Si la stratification réciproque est la même pour le champ et pour le référentiel accéléré, c'est parce que $q(t)$ est le même dans les deux cas, c'est-à-dire parce que les lois du mouvement sont déjà identiques. Conclure de la réciproque à l'identité des lois serait circulaire : une bijection ne crée pas d'information.

Remarque 9 (Limites de la réciproque). La réciproque a deux limites.

1. En chute libre, q' est constant : $q'(t)$ n'est pas inversible, et la quantité de mouvement cesse de mesurer le temps. L'horloge « q » n'existe que là où le champ agit.
2. Pour un mouvement où $q(t)$ n'est pas monotone (oscillateur), la réciproque donnerait un temps multivalué. L'approche réciproque est une propriété du champ uniforme, et non un principe général.

4.2 La vraie déformation du grain temporel : le décalage gravitationnel

Il existe bien une déformation du grain temporel par le champ, identique pour le champ uniforme et le référentiel accéléré. Elle ne vient pas de $q(t)$, mais de la propagation de la lumière : c'est l'une des premières prédictions qu'Einstein a tirées du principe d'équivalence (1907–1911).

Proposition 9 (Décalage des horloges dans un repère accéléré). *Dans un repère uniformément accéléré de g , deux horloges au repos, séparées d'une hauteur h dans le sens de l'accélération, battent dans le rapport*

$$d\tau_{\text{haut}} = \left(1 + \frac{gh}{c^2}\right) d\tau_{\text{bas}} \quad (\text{au premier ordre en } gh/c^2).$$

Esquisse. Un signal lumineux émis en bas atteint le haut au bout d'une durée $\Delta t \approx h/c$. Pendant ce temps, le récepteur a gagné la vitesse $\Delta v = g \Delta t = gh/c$ par rapport à l'émetteur au moment de l'émission, et il s'éloigne du signal. L'effet Doppler au premier ordre donne $f_{\text{reçue}} = f_{\text{émise}} (1 - \Delta v/c) = f_{\text{émise}} (1 - gh/c^2)$. L'horloge du bas paraît donc ralentie vue d'en haut, dans le rapport $1 - gh/c^2$, ce qui équivaut à l'énoncé au premier ordre. $\square$

Corollaire 2 (Même effet dans un champ uniforme). *Par le principe d'équivalence (proposition 6), le même rapport vaut dans un champ uniforme g , l'horloge la plus haute étant au potentiel le plus élevé, $\Delta\Phi = gh$. En champ faible, cela se généralise en*

$$d\tau = \left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right) dt.$$

Remarque 10 (Lecture en grains). Découpons le temps propre de l'horloge du bas en grains uniformes. Vus d'en haut, chacun est dilaté du même facteur $1 + gh/c^2$: c'est une déformation stratale homogène du grain temporel, constante dans le temps et fixée par la hauteur. Cette fois, l'argument n'est pas circulaire : l'entrée est le principe d'équivalence et la propagation de la lumière, la sortie est une prédiction nouvelle, et non une relecture. Le facteur contient c^2 , ce qui montre qu'on est sorti de la mécanique newtonienne.

Remarque 11 (Vérifications expérimentales). Pound et Rebka (1960) ont mesuré ce décalage sur la tour de Harvard, pour $h = 22,5$ m, soit $gh/c^2 \approx 2,5 \times 10^{-15}$. Des horloges optiques l'ont détecté en 2010 pour un écart de hauteur de 33 cm ($gh/c^2 \approx 3,6 \times 10^{-17}$). Les horloges des satellites GPS doivent en tenir compte : l'effet gravitationnel les fait avancer d'environ 45 μ s par jour.

4.3 Global et local, pour le grain temporel

Remarque 12. Dans un champ uniforme, le facteur $1 + gh/c^2$ ne dépend que de la hauteur, linéairement. Il relève, comme le grain de q , de la connexion Γ : deux horloges au repos dans un laboratoire en chute libre ne présentent aucun décalage (au premier ordre et sans effet de marée). Dans un champ réel, Φ n'est pas linéaire, et la partie non uniforme du décalage ne s'efface par aucun changement de repère global : c'est à nouveau la courbure (section 6).

Remarque 13 (Sur le temps comme information). Si l'on identifie le grain temporel au *temps propre*, l'énoncé « la matière, dans sa relation avec les champs, déforme le grain temporel » reçoit un contenu précis : la masse fixe le potentiel par l'équation de Poisson, $\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho$, et le potentiel fixe la marche du temps propre, $d\tau = (1 + \Phi/c^2) dt$. Lire ensuite le temps comme « information » reste une interprétation, qui ne change aucune de ces relations.

5. Le champ uniforme comme terme de connexion (supprimable)

Proposition 10 (Une anomalie de repère). *Le grain hétérogène $dq/dy = mC/q$ est un artefact de repère. Dans le référentiel en chute libre (qui accélère à $a = C/m$), la même trajectoire est inertielle : q y est constant, son grain redevient trivial, et l'anomalie disparaît.*

Remarque 14. Un champ uniforme est donc, dans le langage affine, un pur *terme de connexion* Γ : il se supprime globalement par un seul changement de repère. C'est la même chose que les forces fictives (Coriolis, centrifuge) vues comme symboles de Christoffel. En ce sens précis, un champ uniforme est une gravité « fausse » — une anomalie cartésienne du repère, non une propriété de l'espace.

6. La frontière honnête : marée et courbure

Proposition 11 (Ce qu'aucun repère n'efface). *Une gravité réelle n'est pas constante : elle pointe vers un centre et faiblit avec la distance. Deux corps lâchés côte à côte ne restent pas parallèles — ils convergent. Cet écart relatif (effet de marée) ne se supprime par aucun changement de repère.*

Remarque 15 (Connexion contre courbure). La partie *uniforme* d'un champ est une connexion Γ (supprimable, plate) ; la partie *non-uniforme* est la courbure de Riemann R (irréductible). La marée est la déviation géodésique,

$$\frac{D^2 \xi^i}{d\tau^2} = -R^i_{jkl} u^j \xi^k u^l,$$

où ξ sépare deux géodésiques voisines et u est la quadrivitesse. Le grain uniforme de la §2 relève de Γ (supprimable) ; la marée relève de R (irréductible). La signature de la vraie gravité est l'*éche* de la *constance* du champ.

7. La masse comme charnière

Remarque 16 (Pourquoi ce champ est géométrisable). On peut réabsorber le champ dans la géométrie (le repère, la connexion) parce que $C = ma$ avec a le même pour tous les corps : universalité de la chute libre. Le champ agit identiquement quelle que soit la masse, donc on l'attribue à l'espace. Contraste : un champ électrique donne $q_{\text{él}}E$, et $q_{\text{él}}/m$ varie d'un corps à l'autre — impossible à géométriser. La *charge gravitationnelle est la masse*, et l'égalité de la masse inerte et de la masse grave est exactement la charnière qui rend l'opération légitime. (C'est le cas limite du fil « $\mathbf{q}$ peut être une charge quelconque » : ici la charge *est* le préfacteur inertielle.)

8. Statut du principe et conjecture sur l'écoulement du temps

8.1 Ce qui est démontré, ce qui est supposé

On sépare ici trois niveaux, qui ont des statuts différents.

Proposition 12 (Le niveau démontré : changement de repère). *On oriente l'axe vertical vers le haut. Soit une cabine d'accélération a plongée dans un champ qui imprime à tout corps la même accélération g . Un corps libre a , relativement à la cabine,*

$$\ddot{y}_{\text{rel}} = g - a, \quad \text{soit} \quad dq_{\text{rel}} = m(g - a) dt.$$

En particulier, pour $g = 0$, on obtient $\ddot{y}_{\text{rel}} = -a$: un champ apparaît. Pour $a = g$ (chute libre), on obtient $\ddot{y}_{\text{rel}} = 0$: le champ disparaît.

Démonstration. Si y est la position dans un repère inertielle et y_c celle de la cabine, on a $y_{\text{rel}} = y - y_c$. En dérivant deux fois, $\ddot{y}_{\text{rel}} = \ddot{y} - \ddot{y}_c = g - a$. □

Remarque 17 (Le niveau empirique : l'égalité des masses). La proposition 12 suppose que g est le même pour tous les corps. Pour une force quelconque, l'accélération vaut (charge/ m) $\times$ champ. Pour un champ électrique, elle vaut $q_{\text{él}}E/m$ et varie d'un corps à l'autre : aucune cabine ne peut l'annuler pour tous à la fois. Pour la pesanteur, l'accélération vaut $(m_{\text{grave}}/m_{\text{inerte}})g$. Elle n'est universelle que si $m_{\text{grave}} = m_{\text{inerte}}$ (section 7). Cette égalité ne se démontre pas. C'est un fait d'expérience, vérifié de Galilée à Eötvös, et jusqu'à environ 10^{-15} par le satellite MICROSCOPE. C'est l'*hypothèse* du principe d'équivalence dans sa forme faible.

Remarque 18 (Le niveau postulé : l'extension d'Einstein). Einstein ne se contente pas d'affirmer qu'aucune expérience de *mécanique* ne distingue localement la cabine accélérée du champ uniforme. Il affirme qu'*aucune expérience de physique*, quelle qu'elle soit (lumière, horloges, électromagnétisme), ne les distingue. Cette extension ne se déduit de rien. Elle est posée, puis testée par ses

conséquences : le décalage gravitationnel des horloges (section 4.2) et la déviation de la lumière. Le mot *principe* a ici son sens habituel en physique : un énoncé que l'on suppose et que l'on met à l'épreuve, pas un théorème.

Niveau	Énoncé	Statut
cinématique	$\ddot{y}_{\text{rel}} = g - a$	démontré (changement de repère)
universalité	$m_{\text{grave}} = m_{\text{inerte}}$	empirique
extension	toute la physique, localement	postulé, testé

8.2 La conjecture

Énoncé initial. Dans la cabine en chute libre, $g - a = 0$, donc

$$dq_{\text{rel}} = (g - a) dt = 0 \cdot dt.$$

Écrit comme une mesure de Stieltjes, cela donne $dq_{\text{rel}} = d(0 \cdot t) = 0$. Le facteur jacobien qui relie dq à dt s'annule. Tout se passerait alors « comme si le temps ne s'écoulait pas dans la cabine ».

8.3 Analyse : ce que dit l'annulation du jacobien

Proposition 13 (L'axe d'arrivée dégénère, pas l'axe de départ). *Soit l'application $t \mapsto q_{\text{rel}}(t)$, de facteur de stratification $g - a$. Si $g - a = 0$, l'image de tout intervalle de temps $[t, t + dt]$ est le point $\{q_{\text{rel}}(t)\}$. La mesure de Stieltjes dq_{rel} est alors la mesure nulle : $\int \varphi dq_{\text{rel}} = 0$ pour toute fonction φ . L'intervalle dt , lui, n'est pas modifié.*

Démonstration. Par le Théorème 62, l'intervalle $[t, t + dt]$ est envoyé sur $[q_{\text{rel}}, q_{\text{rel}} + (g - a) dt] = [q_{\text{rel}}, q_{\text{rel}}]$. La nullité du facteur écrase l'axe d'arrivée (celui des q). Elle n'agit pas sur l'axe de départ (le temps). $\square$

Remarque 19 (Ce qui est réfuté). $dq_{\text{rel}} = 0$ signifie que la quantité de mouvement relative est constante, c'est-à-dire l'absence de force : c'est l'inertie dans la cabine. Cela ne signifie pas $dt = 0$. D'ailleurs la position relative continue d'évoluer : une bille lancée avec une vitesse initiale traverse la cabine en ligne droite, ce qui demande du temps. La lecture « le temps ne s'écoule pas » confond l'annulation d'un facteur de stratification avec l'annulation de l'intervalle qu'il stratifie.

Proposition 14 (La réciproque est singulière : l'horloge q dégénère). *Pour lire le temps à travers q , il faut la réciproque $q \mapsto t$, dont le facteur vaut $dt/dq = 1/(g - a)$. Si $g - a = 0$, ce facteur est infini et la réciproque n'est pas définie.*

Remarque 20 (Lien avec le contre-exemple de l'anomalie cartésienne). C'est la situation de la Proposition 76 : $f(x) = x^2$ a une dérivée nulle en 0, et sa réciproque $\sqrt{y}$ y a une tangente verticale, avec un facteur infini. Ici, un facteur nul à l'aller (de t vers q) donne un facteur infini au retour (de q vers t). La conclusion correcte n'est donc pas que le temps s'arrête. C'est que *la quantité de mouvement cesse d'être une horloge*, parce qu'elle ne « bat » plus (cf. section 4.1, première limite). Le temps continue de s'écouler, mais il faut le mesurer avec une autre horloge.

8.4 Reformulation de la conjecture

Remarque 21 (Conjecture reformulée). *L'annulation d'un facteur jacobien entre le temps et une grandeur X ne signale pas un arrêt du temps. Elle signale une anomalie cartésienne de l'horloge X : la réciproque $X \mapsto t$ devient singulière, et X cesse de pouvoir paramétrer le temps. Réciproquement, une vraie déformation du grain temporel est un facteur fini et non nul entre deux temps, $d\tau/dt$; elle ne se lit pas sur dq .*

Remarque 22 (Où l'intuition retrouve un contenu physique). Il existe un cas où un facteur entre deux temps s'annule vraiment. Autour d'une masse sphérique M , le temps propre d'une horloge au repos à la distance r et le temps t d'un observateur lointain sont liés par

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{r_s}{r}} dt, \quad r_s = \frac{2GM}{c^2}.$$

En champ faible, ce facteur vaut approximativement $1 + \Phi/c^2$ avec $\Phi = -GM/r$: on retrouve le corollaire de la section 4.2. À l'horizon ($r \rightarrow r_s$), le facteur tend vers 0. Vue de loin, l'horloge semble s'arrêter. Mais c'est une singularité *de coordonnées* : un observateur en chute libre traverse l'horizon en un temps propre fini, sans rien remarquer de local. C'est encore une anomalie cartésienne, cette fois de l'horloge t de l'observateur lointain. La conjecture reformulée s'applique donc au cas même où l'on croirait voir le temps s'arrêter : c'est la coordonnée t qui dégénère comme horloge, pas le temps propre.

Remarque 23 (Statut). L'analyse des propositions 13 et 14 est démontrée. Les formules de la relativité générale citées sont établies. Ce qui reste *conjectural*, c'est l'énoncé général de la conjecture reformulée dans le cadre du grain : toute annulation d'un facteur de stratification temporel serait une anomalie de l'horloge choisie, supprimable par un changement de paramétrage (ou de repère), et jamais un arrêt intrinsèque du temps propre. Pour la mettre à l'épreuve, il faudrait examiner d'autres cas (horizon de Rindler du référentiel uniformément accéléré, horizons cosmologiques), en vérifiant à chaque fois qu'un temps propre fini existe au point où le facteur s'annule.

8.5 La conjecture et l'égalité des masses

Si la conjecture est juste, induit-elle une distinction entre masse grave et masse inerte, ou au contraire leur couplage ? On relâche l'hypothèse d'égalité pour le voir.

Proposition 15 (Facteur jacobien avec deux masses distinctes). *Pour chaque corps, on pose $\eta = m_{\text{grave}}/m_{\text{inerte}}$. Dans un champ g , un corps en chute libre a l'accélération ηg . Une cabine de paramètre η_c tombe avec $a = \eta_c g$. Pour un corps libre dans la cabine,*

$$dq_{\text{rel}} = m_{\text{inerte}} (\eta - \eta_c) g dt.$$

Le facteur jacobien de $t \mapsto q_{\text{rel}}$ est donc $m_{\text{inerte}}(\eta - \eta_c) g$, et non $m(g - a)$ en général.

Démonstration. L'accélération relative vaut $\eta g - \eta_c g$, et $dq_{\text{rel}} = m_{\text{inerte}} \ddot{y}_{\text{rel}} dt$. □

Corollaire 3 (Deux cas). 1. *Si $\eta = 1$ pour tous les corps (égalité des masses), le facteur est nul pour tous les corps à la fois. Aucune quantité de mouvement relative ne varie : q n'est une horloge pour aucun corps dans la cabine. C'est la situation de la conjecture.*

2. *Si η dépend du matériau, le facteur ne s'annule plus. Deux corps de matériaux différents dérivent lentement l'un par rapport à l'autre, et q_{rel} croît proportionnellement au temps : la*

quantité de mouvement redevient une horloge, très lente et propre à chaque matériau. La cabine ne peut plus effacer le champ pour tous les corps, comme pour un champ électrique (section 7).

Remarque 24 (Réponse : couplage, et non distinction). La conjecture ne distingue pas les deux masses : elle *suppose* leur égalité. Une horloge « quantité de mouvement » qui se remettrait à battre en chute libre serait précisément la signature d’une violation. C’est ce que cherche le satellite MICROSCOPE : deux masses d’épreuve en chute libre commune, dont on mesure la dérive relative. L’absence de dérive, jusqu’à $|\eta_1 - \eta_2| \lesssim 10^{-15}$, signifie qu’à cette précision l’horloge q ne bat pas.

Remarque 25 (Deux parties de la conjecture, deux statuts). 1. *La partie générale* (section 8.4) — l’annulation d’un facteur jacobien signale la dégénérescence de l’horloge, et non l’arrêt du temps — porte sur les applications et leurs réciproques. Elle ne dit rien des masses et resterait vraie si elles différaient.

2. *La partie physique* — en chute libre, ce facteur est nul pour tous les corps — est *équivalente* au principe d’équivalence faible. Elle ne l’explique pas : la poser comme loi, c’est postuler l’égalité des masses sous un autre nom. En déduire ensuite cette égalité serait circulaire.

Remarque 26 (Extension : le principe d’équivalence fort). En relativité générale, l’égalité s’étend à toute forme d’énergie, y compris l’énergie de liaison gravitationnelle d’un corps. Une violation donnerait l’effet Nordtvedt : la Terre et la Lune, dont les proportions d’énergie gravitationnelle interne diffèrent, tomberaient différemment vers le Soleil. La télémétrie laser Terre–Lune n’en détecte aucun. Dans le langage du grain : l’horloge q_{rel} entre la Terre et la Lune ne bat pas non plus.

Conclusion

Dans ton vocabulaire : un champ uniforme est une *anomalie cartésienne du repère* — le grain de l’axe q y est hétérogène contre l’espace ($dq/dy = mC/q$), mais cette hétérogénéité se gauge par passage en chute libre, ce qui la range du côté de la connexion Γ . La vraie gravité est la part de l’anomalie qu’aucun repère n’efface : la courbure R , c’est-à-dire la marée. Enfin, l’annulation du facteur $g - a$ en chute libre n’arrête pas le temps : elle fait seulement dégénérer l’horloge q (section 8). C’est la même anomalie que celle de la coordonnée t à l’horizon.