

# Le plan complexe animé

## d'un mouvement de rotation intrinsèque

Quatre états, deux résolutions et l'hélice des niveaux

Hugues Genvrin

Septembre 2026

### Résumé

Dans une note antérieure, l'auteur observe que les rotations engendrées par  $i$  forment un groupe cyclique d'ordre 4, qui agit transitivement sur quatre « états » du plan complexe, avec 0 pour pivot et pour barycentre. Dans le cadre usuel, cette structure est une *symétrie* : les quatre états sont le même plan, et le plan réel possède la même, à ceci près que, dans le plan complexe,  $i$  est extrait des quatre demi-axes et agit comme une rotation de l'espace entier. Nous montrons que la théorie du grain en fait un *mouvement*. Dans la lecture à deux résolutions, le quart de tour échange le grain fin et le grain grossier : les quatre états deviennent quatre grilles réellement discernables, dont le cycle se décompose en un échange de niveau et un retournement. Le paramètre du mouvement est le niveau de résolution : l'opérateur  $\omega = 2^{n\infty} i$  fait monter d'un niveau en tournant d'un quart de tour, et l'orbite d'une grille est une hélice qui ne se referme pas. La phase de ce mouvement est périodique de période 4, sa hauteur ne revient jamais. À la promotion, les niveaux s'écrasent et l'on retrouve exactement la symétrie de la note d'origine. Nous discutons enfin pourquoi il vaut mieux parler de mouvement de rotation intrinsèque que de spin.

## Table des matières

|          |                                                                    |          |
|----------|--------------------------------------------------------------------|----------|
| <b>1</b> | <b>Introduction</b>                                                | <b>2</b> |
| <b>2</b> | <b>La note d'origine</b>                                           | <b>2</b> |
| 2.1      | Le groupe et ses états . . . . .                                   | 2        |
| 2.2      | L'extraction de $i$ : un point qui agit sur tout le plan . . . . . | 3        |
| 2.3      | Ce qui manque encore pour un mouvement . . . . .                   | 3        |
| <b>3</b> | <b>Des états discernables : la lecture à deux résolutions</b>      | <b>4</b> |
| 3.1      | Le quart de tour échange les grains . . . . .                      | 4        |
| 3.2      | Le cycle se décompose en échange et retournement . . . . .         | 4        |
| <b>4</b> | <b>Le paramètre du mouvement : le niveau de résolution</b>         | <b>5</b> |
| 4.1      | Une échelle de niveaux adjacents . . . . .                         | 5        |
| 4.2      | Énoncé du mouvement de rotation intrinsèque . . . . .              | 6        |
| 4.3      | Le pivot et le barycentre . . . . .                                | 7        |
| <b>5</b> | <b>À la promotion, le mouvement redevient une symétrie</b>         | <b>7</b> |
| <b>6</b> | <b>Pourquoi ne pas parler de spin</b>                              | <b>7</b> |

## 1 Introduction

La note *Le plan complexe animé d'un mouvement de rotation intrinsèque* [1] part d'une image : le plan complexe tourne sur lui-même comme une toupie, par pas d'un quart de tour, en quatre étapes, autour du pivot 0. Les énoncés qu'elle contient sont exacts (section 2). Mais un lecteur objectera aussitôt que ce qui est décrit est une symétrie, et non un mouvement : le plan tourné d'un quart de tour est le même plan, les figures de la note l'écrivent d'ailleurs avec un signe « = », et le plan réel admet une symétrie de même forme. La note contient déjà une réponse partielle : le  $i$  qu'elle manipule n'est pas une rotation ajoutée au plan, il est extrait de ses quatre demi-axes et agit comme une transformation globale de l'espace (section 2, proposition 3).

L'objet du présent texte est de montrer que cette objection, juste dans le cadre usuel, tombe dans la théorie du grain [2], et de dire précisément pourquoi. Deux ingrédients sont nécessaires, et la théorie du grain fournit les deux :

1. des *états discernables* : dans la lecture à deux résolutions [3], les quatre états sont quatre grilles distinctes, et non quatre étiquetages d'un même plan (section 3) ;
2. un *paramètre* le long duquel les états se succèdent : le niveau de résolution, parcouru par l'opérateur  $\omega = 2^{n_\infty} i$  (section 4).

La section 5 montre qu'à la promotion le mouvement redevient la symétrie de la note, et la section 6 explique pourquoi nous ne parlons pas de spin.

## 2 La note d'origine

### 2.1 Le groupe et ses états

Soit  $R$  le quart de tour de centre  $O = 0$ , c'est-à-dire la multiplication par  $i$ . Les rotations qu'il engendre forment le groupe cyclique

$$G = \langle i \rangle = \{\text{Id}, i, i^2, i^3\} \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}.$$

Un *état* du plan est le plan muni d'un repère étiqueté : on marque le point d'étiquette 1 et le point d'étiquette  $i$ . On note  $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}$  l'état de référence (le point 1 à droite, le point  $i$  en haut) et  $\mathcal{P}_{\mathbb{C}_k} = i^k \mathcal{P}_{\mathbb{C}}$  l'état obtenu en faisant tourner le repère étiqueté de  $k$  quarts de tour.

*Remarque 1* (Convention active ou passive). Nous faisons tourner le repère (convention *active*) : dans  $\mathcal{P}_{\mathbb{C}_1}$ , l'étiquette 1 est en haut. Les figures de la note réétiquettent les points fixes (convention *passive*), ce qui place l'étiquette 1 en bas. Les deux conventions se déduisent l'une de l'autre en changeant  $k$  en  $-k$  ; aucun énoncé n'en dépend.

**Proposition 2** (Énoncés de la note). 1.  $G$  agit sur  $E = \{\mathcal{P}_{\mathbb{C}_0}, \dots, \mathcal{P}_{\mathbb{C}_3}\}$  de façon simplement transitive : pour deux états, il existe une unique rotation de  $G$  qui envoie l'un sur l'autre.

2. 0 est l'unique point fixe commun des rotations non triviales de  $G$ .

3.  $1 + i + i^2 + i^3 = 0$  : le barycentre de l'orbite de 1 est le pivot.

*Démonstration.* Point 1.  $i^j \mathcal{P}_{\mathbb{C}_k} = \mathcal{P}_{\mathbb{C}_{j+k}}$ , les indices étant lus modulo 4 ; la rotation qui envoie  $\mathcal{P}_{\mathbb{C}_k}$  sur  $\mathcal{P}_{\mathbb{C}_\ell}$  est  $i^{\ell-k}$ , et elle seule. Point 2.  $i^k z = z$  avec  $i^k \neq 1$  impose  $z = 0$ . Point 3.  $1 + i - 1 - i = 0$ .  $\square$

Le point 1 est un peu plus fort que la transitivité énoncée dans la note : le stabilisateur de chaque état est trivial, de sorte que  $E$  est une copie de  $G$  lui-même (un « torseur »). C'est ce qui permet de lire la suite des états comme les positions successives d'une toupie : chaque position est atteinte par une rotation et une seule.

## 2.2 L'extraction de $i$ : un point qui agit sur tout le plan

La note ne se donne pas la rotation de l'extérieur : elle l'extrait des quatre demi-axes. Les quatre points unités du plan complexe s'écrivent indifféremment

$$(1, i, -1, -i) \quad \text{ou} \quad (i^4, i, i^2, i^3),$$

et la seconde écriture fait apparaître, implicitement, un élément  $i$  dont les quatre points sont les puissances. Cette extraction n'est pas forcée : on peut lire les quatre points comme de simples positions. Mais elle est *disponible*, parce que le plan complexe porte une multiplication, et c'est elle qui transforme un point en une action sur l'espace entier.

**Proposition 3** (Extraction de  $i$ ). *1. Les quatre points  $\{1, i, -1, -i\}$  forment, pour la multiplication de  $\mathbb{C}$ , le groupe cyclique d'ordre 4 ; ils sont l'orbite de 1 sous la multiplication par  $i$ .*  
*2. Ce groupe a exactement deux générateurs,  $i$  et  $i^3 = -i$  : l'élément extrait est déterminé au choix de l'orientation près.*  
*3. L'élément extrait, qui est un point du demi-axe imaginaire, définit l'application  $z \mapsto iz$  sur le plan entier. C'est une rotation : elle fixe 0 et conserve les distances,  $|iz - iw| = |z - w|$ . Sa restriction aux quatre points unités est la permutation circulaire  $1 \mapsto i \mapsto -1 \mapsto -i \mapsto 1$ .*

*Démonstration. Point 1.*  $i^4 = 1$  et les puissances  $i^0, \dots, i^3$  sont distinctes. *Point 2.* Dans un groupe cyclique d'ordre 4, les générateurs sont les puissances  $i^k$  avec  $k$  premier à 4, soit  $k = 1$  et  $k = 3$ . *Point 3.*  $|iz - iw| = |i||z - w| = |z - w|$ , et  $i \cdot 0 = 0$ .  $\square$

Le point 3 est la dualité propre au plan complexe : chaque point  $z$  y est aussi une opération, la multiplication par  $z$ . Le point  $i$ , pris sur un demi-axe, devient ainsi une *transformation globale de l'espace*, qui emporte avec elle tous les points du plan, et pas seulement les quatre points unités dont on l'a extrait. C'est en ce sens précis que la rotation de la note est *intrinsèque* : elle est tirée du plan lui-même.

*Remarque 4* (Ce que le plan réel n'a pas). Le plan réel  $\mathbb{R}^2$  possède les mêmes quatre points unités  $(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)$ , mais pas de multiplication qui en fasse des opérations : le point  $(0, 1)$  n'agit sur rien. Le quart de tour  $R(x, y) = (-y, x)$  doit y être *ajouté* de l'extérieur, comme une matrice. Dans  $\mathbb{C}$ , il est *extrait* des points eux-mêmes.

## 2.3 Ce qui manque encore pour un mouvement

**Proposition 5** (Dans le cadre usuel, une symétrie intrinsèque). *1. Les quatre états ont le même ensemble sous-jacent :  $i^k \mathbb{C} = \mathbb{C}$  pour tout  $k$ . Ils ne diffèrent que par leurs étiquettes.*  
*2. Le plan réel  $\mathbb{R}^2$ , muni du quart de tour  $R(x, y) = (-y, x)$  ajouté de l'extérieur, satisfait les mêmes énoncés que la proposition 2.*

*Démonstration.* La multiplication par  $i$  est une bijection de  $\mathbb{C}$  sur lui-même. Pour le point 2,  $R^4 = \text{Id}$ ,  $R^2 = -\text{Id}$ , et la somme  $(1, 0) + (0, 1) + (-1, 0) + (0, -1)$  est nulle.  $\square$

La note établit donc déjà une chose que le plan réel n'a pas : la rotation y est intrinsèque, extraite des points du plan et agissant sur l'espace entier (proposition 3). Mais, dans le cadre usuel, cette action globale laisse le plan invariant : l'image de  $\mathbb{C}$  par la rotation est  $\mathbb{C}$ , et les états successifs ne diffèrent que par leurs étiquettes. Pour parler de *mouvement*, il manque encore deux choses : des états discernables autrement que par leurs étiquettes, et un paramètre le long duquel ils se succèdent. Les deux sections suivantes fournissent l'un et l'autre.

### 3 Des états discernables : la lecture à deux résolutions

#### 3.1 Le quart de tour échange les grains

Dans la lecture à deux résolutions [3], l'axe horizontal porte le grain fin  $\delta_f$  et l'axe vertical le grain grossier  $\delta_g = 2^{n_\infty} \delta_f$ . On note

$$\Pi(\delta_1, \delta_2) = \delta_1 \tilde{\mathbb{Z}} + i \delta_2 \tilde{\mathbb{Z}}, \quad \Gamma = \Pi(\delta_f, \delta_g).$$

Les deux niveaux d'observation sont distincts et congruents, de rapport  $2^{n_\infty}$  : c'est le théorème 24 du document *Niveau d'observation* [5].

**Définition 6** (États de grille). L'état de grille  $\Gamma_k$  est la grille  $R^k(\Gamma)$  munie du repère étiqueté tourné de  $k$  quarts de tour.

**Proposition 7** (Les grilles alternent).

$$R(\Gamma) = \Pi(\delta_g, \delta_f) \neq \Gamma, \quad R^2(\Gamma) = \Gamma.$$

*Autrement dit, après un quart de tour, le grain fin est sur l'axe vertical ; après un demi-tour, la grille est revenue, mais son repère est retourné.*

*Démonstration.*  $R(m\delta_f + i n\delta_g) = -n\delta_g + i m\delta_f$  : la partie réelle parcourt  $\delta_g \tilde{\mathbb{Z}}$  et la partie imaginaire  $\delta_f \tilde{\mathbb{Z}}$ , d'où  $R(\Gamma) = \Pi(\delta_g, \delta_f)$ . Cette grille diffère de  $\Gamma$  : le point  $\delta_f$  est dans  $\Gamma$ , mais pas dans  $\Pi(\delta_g, \delta_f)$ , car  $\delta_f \notin \delta_g \tilde{\mathbb{Z}}$ . Enfin  $R^2 = -\text{Id}$  et  $-\Gamma = \Gamma$ .  $\square$

**Théorème 8** (Quatre états discernables). Les quatre états de grille  $\Gamma_0, \dots, \Gamma_3$  sont deux à deux distincts, et  $G$  agit sur eux de façon simplement transitive. Chaque état est caractérisé par deux données :

- la position des niveaux (quel axe porte le grain fin), qui dépend de  $k$  modulo 2 ;
- l'orientation du repère, qui distingue  $k$  de  $k + 2$ .

*Démonstration.* Par la proposition 7,  $\Gamma_k$  et  $\Gamma_{k+1}$  n'ont pas la même grille sous-jacente.  $\Gamma_k$  et  $\Gamma_{k+2}$  ont la même grille, mais leurs repères sont opposés : l'étiquette 1 est en  $i^k$  dans l'un et en  $-i^k$  dans l'autre. La transitivité simple se démontre comme au point 1 de la proposition 2.  $\square$

#### 3.2 Le cycle se décompose en échange et retournement

Le théorème 8 donne une lecture précise de la toupie. Un quart de tour *échange les niveaux* entre les deux axes ; deux quarts de tour reviennent à la même répartition des niveaux mais *retournent* l'orientation. C'est exactement la structure de l'échange  $J$  de *Plan complexe et grain nul* [4] (prop. 28) : un aller-retour entre les deux niveaux, dont le carré est le demi-tour  $-\text{Id}$ , le signe venant du retournement de la superposition.

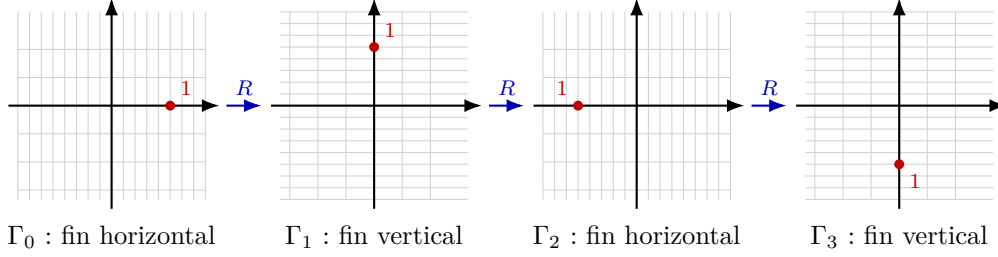


FIGURE 1 – Les quatre états de grille (convention active). D'un état au suivant, le grain fin change d'axe; d'un état au surlendemain, la grille revient mais l'étiquette 1 est passée de l'autre côté du pivot. Les rapports de pas sont dessinés finis.

*Remarque 9* (Pourquoi quatre, et non deux). Si l'on oublie les étiquettes, il ne reste que deux grilles,  $\Pi(\delta_f, \delta_g)$  et  $\Pi(\delta_g, \delta_f)$ , et le mouvement serait un simple va-et-vient. Le groupe  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  n'est pas le produit de deux groupes d'ordre 2 : le retournement n'est pas une opération indépendante de l'échange, il est le *carré* de l'échange. C'est ce qui fait du cycle une rotation, et non une succession de deux symétries (voir *Niveau d'observation* [5], prop. 25, pour la différence entre le quart de tour  $J_c$  et le miroir  $E_c$ ).

*Remarque 10* (La brisure de symétrie rend le mouvement visible). Dans le plan réel, le quart de tour est une symétrie de la grille carrée : les états successifs ont la même grille, et le mouvement est invisible. Dans la lecture à deux résolutions, le quart de tour n'est pas une symétrie de la grille rectangulaire ([3], symétrie brisée) : c'est précisément cette brisure qui rend les états discernables. Le mouvement de rotation intrinsèque est la face positive de la symétrie brisée au niveau des grains.

## 4 Le paramètre du mouvement : le niveau de résolution

### 4.1 Une échelle de niveaux adjacents

Posons  $a = 2^{n_\infty}$  et, pour  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $L_m = a^m \delta_f$ ; ainsi  $L_0 = \delta_f$ ,  $L_1 = \delta_g$ , et deux niveaux  $L_m$ ,  $L_{m+1}$  consécutifs sont congruents de rapport  $a$ . La grille  $\Gamma = \Pi(L_0, L_1)$  occupe la *fenêtre* des deux niveaux adjacents  $(0, 1)$ .

L'opérateur  $\omega = a i$  de [3] fait un quart de tour et multiplie les longueurs par  $a$ .

**Théorème 11** (L'hélice des états). *Pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ ,*

$$\omega^j \Gamma = \begin{cases} \Pi(L_j, L_{j+1}) & \text{si } j \text{ est pair,} \\ \Pi(L_{j+1}, L_j) & \text{si } j \text{ est impair,} \end{cases}$$

*et le repère étiqueté de  $\omega^j \Gamma$  est celui de l'état  $\Gamma_{j \bmod 4}$ , dilaté par  $a^j$ . Autrement dit, l'état  $j$  de l'orbite est déterminé par*

- *sa hauteur : la fenêtre des niveaux adjacents  $(j, j+1)$  ;*
- *sa phase :  $j$  modulo 4, qui fixe l'axe du grain fin et l'orientation, comme au théorème 8.*

*Démonstration.*  $\omega^j = a^j i^j$ , donc  $\omega^j \Gamma = R^j(a^j \Gamma)$  et  $a^j \Gamma = \Pi(a^j L_0, a^j L_1) = \Pi(L_j, L_{j+1})$ . Par la proposition 7, appliquée à cette grille,  $R^j$  échange les deux pas si  $j$  est impair et les conserve si  $j$  est pair. Le repère étiqueté tourne de  $j$  quarts de tour et se dilate de  $a^j$ .  $\square$

**Corollaire 12** (Le mouvement ne se referme pas). *L'application  $j \mapsto \omega^j \Gamma$  est injective : deux états d'indices différents sont différents, même s'ils ont la même phase. La phase est périodique de période 4 ; la hauteur ne revient jamais.*

*Démonstration.* Si  $j \neq j'$ , les fenêtres  $(j, j+1)$  et  $(j', j'+1)$  diffèrent, car les niveaux  $L_m$  sont deux à deux distincts ( $a \neq 1$ ); les grilles  $\omega^j \Gamma$  et  $\omega^{j'} \Gamma$  n'ont donc pas les mêmes pas.  $\square$

| $j$ | $\omega^j$ | fenêtre de niveaux | axe du grain fin | étiquette 1 en | phase      |
|-----|------------|--------------------|------------------|----------------|------------|
| 0   | 1          | (0, 1)             | horizontal       | 1              | $\Gamma_0$ |
| 1   | $a i$      | (1, 2)             | vertical         | $a i$          | $\Gamma_1$ |
| 2   | $-a^2$     | (2, 3)             | horizontal       | $-a^2$         | $\Gamma_2$ |
| 3   | $-a^3 i$   | (3, 4)             | vertical         | $-a^3 i$       | $\Gamma_3$ |
| 4   | $a^4$      | (4, 5)             | horizontal       | $a^4$          | $\Gamma_0$ |

TABLE 1 – Les premiers états de l'hélice. La phase revient après quatre pas; la fenêtre de niveaux a monté de quatre crans.

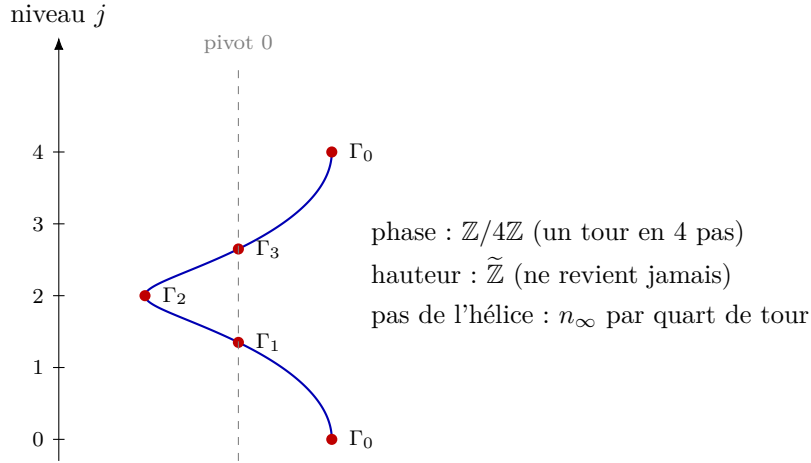


FIGURE 2 – L'hélice des états : à chaque pas, un quart de tour autour du pivot et un cran de niveau. Après un tour complet, on retrouve la phase de départ, quatre niveaux plus haut.

## 4.2 Énoncé du mouvement de rotation intrinsèque

Nous pouvons maintenant donner à l'image de la note son sens précis.

**Théorème 13** (Mouvement de rotation intrinsèque). *L'espace du grain, pris dans deux niveaux de résolution adjacents, est animé d'un mouvement de rotation intrinsèque dont le paramètre est le niveau de résolution :*

1. à chaque passage d'un niveau au suivant, il tourne d'un quart de tour autour du pivot 0, et le grain fin change d'axe;
2. les états successifs sont discernables par leur grille, et non seulement par leurs étiquettes (théorème 8);
3. la phase du mouvement a la période 4 de la note d'origine; sa hauteur ne revient jamais (corollaire 12);
4. le sens de rotation est fixé par le choix de  $i$  ou de  $-i$ .

*Démonstration.* Les points 1 à 3 résument les théorèmes 8 et 11 et le corollaire 12. Pour le point 4, remplacer  $i$  par  $-i$  remplace  $\omega$  par  $\bar{\omega} = -a i$ , dont l'hélice tourne dans l'autre sens.  $\square$

*Remarque 14* (Le sens de rotation est un choix). La conjugaison  $z \mapsto \bar{z}$  laisse  $\Gamma$  invariante (c'est une symétrie du rectangle) et échange les hélices de  $\omega$  et de  $\bar{\omega}$ . Les deux sens de rotation sont donc également compatibles avec la grille : le sens est une *chiralité*, fixée par un choix, comme le choix de la jambe qui porte le retournement dans *Plan complexe et grain nul* [4].

### 4.3 Le pivot et le barycentre

**Proposition 15** (Équilibre de la toupie). *1. Le pivot 0 est l'unique point fixe de  $\omega$  et de toutes ses puissances non nulles.*

*2. Les phases s'équilibrent :  $\sum_{j=0}^3 \omega^j / |\omega^j| = 1 + i + i^2 + i^3 = 0$ .*

*3. Les positions, elles, ne s'équilibrent pas :  $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 = (1 - a^2)(1 + a i) \neq 0$ .*

*Démonstration.* Point 1.  $\omega^j z = z$  avec  $\omega^j \neq 1$  impose  $z = 0$ , et  $\omega^j \neq 1$  pour  $j \neq 0$  puisque  $|\omega^j| = a^j \neq 1$ . Point 2.  $\omega^j / |\omega^j| = i^j$ . Point 3.  $1 + a i - a^2 - a^3 i = (1 - a^2) + a i(1 - a^2)$ .  $\square$

La toupie de la note est donc équilibrée si l'on ne regarde que la direction de chaque état, et déséquilibrée si l'on tient compte de sa hauteur. Le barycentre nul de la note est celui de la phase.

## 5 À la promotion, le mouvement redevient une symétrie

**Théorème 16** (Restauration). *1. Les jonctions limitées de chacune des grilles  $\Gamma_0, \dots, \Gamma_3$  ont pour promotion  $\mathbb{C}$  tout entier : les quatre états ont la même image.*

*2. Sur  $\mathbb{C}$ , le quart de tour  $\text{st}(iz) = i \text{st}(z)$  est une symétrie, et l'on retrouve exactement la proposition 2.*

*3. L'hélice n'a pas d'image limitée :  $|\omega^j| = a^j$  est illimité pour  $j \geq 1$  et infinitésimal pour  $j \leq -1$ . Seule sa phase,  $i^j$ , passe à la promotion.*

*Démonstration.* Le point 1 est le théorème de restauration de [3] appliqué à  $\Pi(\delta_f, \delta_g)$  et à  $\Pi(\delta_g, \delta_f)$  : les deux pas étant infinitésimaux, tout nombre complexe standard est infiniment proche d'une jonction de chacune. Le point 2 vient de ce que  $\text{st}$  est multiplicative sur les éléments limités. Le point 3 est immédiat.  $\square$

Le schéma est celui que l'on retrouve partout dans la théorie du grain : une structure nette au niveau des grains (ici un mouvement, avec des états discernables et une hauteur), dont la promotion ne garde que l'ombre (ici la symétrie d'ordre 4). La note d'origine décrivait cette ombre ; la théorie du grain en donne l'objet.

## 6 Pourquoi ne pas parler de spin

L'image de la toupie suggère le mot de *spin*. Nous l'évitons, pour deux raisons.

1. *Le spin n'est pas la rotation de l'espace.* En physique, le spin décrit la façon dont un objet se transforme quand on fait tourner l'espace ; un espace en rotation d'ensemble, lui, ne se distingue pas d'un repère tournant. Ce que nous avons décrit est une propriété de l'espace du grain, non d'un objet placé dans cet espace.

|                                            | cadre usuel /<br>promotion                                          | théorie du grain                                                 |
|--------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|
| les quatre états                           | un même plan, étiqueté de quatre façons                             | quatre grilles discernables                                      |
| ce que fait le quart de tour               | une symétrie                                                        | échange les niveaux entre les axes                               |
| paramètre                                  | aucun                                                               | le niveau de résolution                                          |
| orbite                                     | cycle d'ordre 4                                                     | hélice : phase d'ordre 4, hauteur sans retour                    |
| barycentre                                 | 0                                                                   | 0 en phase, non nul en position                                  |
| origine de la rotation                     | extraite des points de $\mathbb{C}$ (dans $\mathbb{R}^2$ : ajoutée) | idem                                                             |
| distingue $\mathbb{C}$ de $\mathbb{R}^2$ ? | par l'origine de la rotation, non par les états                     | oui, aussi par les états (rapport de congruence $2^{n_\infty}$ ) |

TABLE 2 – Symétrie et mouvement.

2. *La phase revient après un tour.* La signature du spin  $\frac{1}{2}$  est qu'un tour complet change le signe, et qu'il en faut deux pour revenir. Ici  $i^4 = 1$  : la phase revient après un seul tour. C'est le comportement d'un vecteur, non d'un spineur. Le choix du sens de rotation fait plutôt penser à une hélicité.

*Remarque 17* (Une piste : la hauteur compte les tours). Il y a pourtant une structure qui mérite attention. Sur l'hélice, un tour complet ne ramène pas au même état : la phase revient, mais la hauteur a monté de quatre niveaux (corollaire 12). Le niveau enregistre ainsi le nombre de tours effectués. C'est, en termes mathématiques, la structure du *revêtement universel* du groupe des rotations du plan : on remplace le cercle des angles par une droite qui garde la mémoire des tours. En physique des systèmes plans, c'est ce revêtement qui permet des comportements de rotation non entiers (les anyons). Si un « quasi-spin » existe dans la théorie du grain, c'est vraisemblablement là qu'il faut le chercher : une hélicité dont le nombre de tours est compté par le niveau de résolution. Nous laissons la question ouverte.

## 7 Synthèse et questions ouvertes

Ce qui est établi.

- Les énoncés de la note d'origine sont exacts ; l'action de  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  sur les états est même simplement transitive. L'élément  $i$ , extrait des quatre demi-axes, agit comme une rotation de l'espace entier : la symétrie est intrinsèque au plan complexe, alors que le plan réel doit se la donner de l'extérieur. Dans le cadre usuel, cette symétrie ne suffit pas encore à faire un mouvement.
- Dans la lecture à deux résolutions, les quatre états sont quatre grilles discernables ; le quart de tour échange les niveaux, et le demi-tour retourne l'orientation.
- Le niveau de résolution fournit le paramètre du mouvement : l'orbite de  $\omega = 2^{n_\infty} i$  est une hélice, de phase périodique et de hauteur sans retour.
- À la promotion, le mouvement redevient la symétrie de la note : seule la phase passe

au continu.

Il est donc légitime de dire que *l'espace du grain, pris dans deux niveaux de résolution adjacents, est animé d'un mouvement de rotation intrinsèque*, à condition de préciser que son paramètre est le niveau de résolution.

### Questions ouvertes.

1. *Mouvement plus fin.* L'opérateur  $\omega$  saute d'une strate à la suivante, mais entre deux strates il y a  $n_\infty$  niveaux de résolution, que le flot  $2^p$  parcourt un à un (*Niveau d'observation* [5]). Peut-on paramétrer l'hélice par ces niveaux de résolution, et obtient-on alors une rotation par des angles plus petits qu'un quart de tour, par exemple  $\frac{\pi}{2n_\infty}$  par niveau ?
2. *Spineurs.* Existe-t-il, dans la théorie du grain, un objet qui change de signe après un tour complet de l'hélice et ne revient qu'après deux ?
3. *Dimension supérieure.* Avec trois axes et trois niveaux congruents, quelles rotations intrinsèques apparaissent, et retrouve-t-on la structure des quaternions ?

### Références

- [1] H. Genvrin, *Le plan complexe animé d'un mouvement de rotation intrinsèque*, note, mars 2026.
- [2] H. Genvrin, *Théorie du grain*, manuscrit, 2026.
- [3] H. Genvrin, *Du cercle complexe au plan complexe : deux axes, deux résolutions*, manuscrit, 2026.
- [4] H. Genvrin, *Plan complexe et grain nul*, manuscrit, 2026.
- [5] H. Genvrin, *Niveau d'observation*, manuscrit, 2026.