

Une théorie de la mesure du grain

Mesures positives, orientées et sommatoires sur un niveau de résolution,
et premières explorations

Hugues Genvrin

Octobre 2026

Résumé

Nous jetons un pont entre la théorie du grain et la théorie de la mesure. La motivation est de définir rigoureusement une mesure sommatoire *nulle* obtenue à partir de deux mesures orientées en sens inverse, prises sur un même niveau de résolution, et de préciser en quel sens cette mesure nulle « s'identifie » à un grain infinitésimal. La première partie est rigoureuse. Un niveau de résolution définit une algèbre de parties, dont les atomes sont les grains; on y construit successivement la mesure positive, la mesure orientée et la mesure sommatoire. La compensation de deux mesures orientées opposées est *exacte* lorsqu'elles vivent sur une grille commune, et seulement infinitésimale sinon. Nous distinguons trois zéros (exact, infinitésimal, faible) et montrons qu'ils forment une seule classe pour la promotion : celle-ci envoie toute mesure orientée de variation limitée sur une mesure de Radon standard, par le théorème de représentation de Riesz, sans avoir besoin d'aucune hypothèse de saturation. Le grain est alors un élément *non nul* de la monade de la mesure nulle : il lui est équivalent sans lui être égal. La seconde partie est exploratoire. Les niveaux homogènes forment une filtration; la réciproque d'une déformation jacobienne de l'axe vertical est une mesure sur l'axe des abscisses déformé, dont la densité est le jacobien, qui apparaît ainsi comme une dérivée de Radon–Nikodym; un jacobien infinitésimal fabrique un Dirac; et un repliement fabrique le zéro sommatoire exact.

Table des matières

1	Introduction	2
	Partie I : mesure sur un niveau de résolution	3
2	Le niveau de résolution comme algèbre de parties	3
2.1	Grains et grille	3
2.2	L'algèbre du niveau	3
2.3	L'emboîtement des niveaux	4
3	Mesure positive de niveau	4
4	Mesure orientée	5
4.1	Définition	5
4.2	Décomposition de Jordan	6
5	Mesure sommatoire et compensation exacte	6

6	Trois zéros	7
7	Promotion : des mesures de niveau aux mesures de Radon	8
7.1	Le théorème de promotion	8
7.2	Trois zéros, une classe	9
7.3	Le cadre de Loeb	9
	Partie II : explorations	10
8	Familles de niveaux : une filtration	10
8.1	La tour des algèbres	10
9	Grains déformés : le jacobien comme dérivée de Radon–Nikodym	11
9.1	Sens direct : déformation de l’axe vertical	11
9.2	Réciproque : mesure sur l’axe des abscisses déformé	12
9.3	Points critiques : le jacobien change le niveau	13
9.4	Un jacobien infinitésimal fabrique un Dirac	13
10	Le repliement fabrique le zéro sommatoire	14
10.1	Image orientée d’un segment replié	14
10.2	Lecture	14
11	Synthèse et questions ouvertes	15

1 Introduction

Dans *Théorie du grain* [1], la mesure apparaît déjà sous une forme précise : au chapitre 10, le cercle unité de circonférence 1 se factorise à la résolution $-n_\infty$ en 2^{n_∞} grains de mesure 2^{-n_∞} (prop. 52), puis à la résolution $-2n_\infty$ en 2^{2n_∞} sous-grains, chaque grain grossier contenant exactement 2^{n_∞} sous-grains (prop. 53). Le théorème 53 décrit le « passage de mesure nulle à mesure non nulle » : la mesure 2^{-n_∞} d’un grain est conservée d’un niveau à l’autre, mais son statut change. Au chapitre 4, l’intégrale stratifiée (déf. 42) est une somme de Riemann sur la mosaïque fine, compatible avec l’intégrale classique (th. 25). Enfin, la définition 88 et la remarque 121 insistent : un grain n’est pas un zéro, mais un infinitésimal stratifié ; « zéro épais » est un oxymore.

Le présent texte organise ces éléments en une théorie de la mesure, dans l’ordre proposé par l’auteur : mesure positive, puis mesure orientée, puis mesure sommatoire. La question directrice est la suivante.

Peut-on définir rigoureusement une mesure sommatoire nulle à partir de deux mesures orientées en sens inverse, prises sur un même niveau de résolution, et en quel sens cette mesure nulle s’identifie-t-elle à un grain infinitésimal ?

La réponse que nous donnons est en deux temps. La somme de deux mesures orientées opposées sur une grille commune est le zéro *exact* (théorème 15). Le grain, lui, n’est pas le zéro exact : c’est un zéro *infinitésimal*. Les deux sont confondus par la promotion (théorème 27), de sorte que le grain est *équivalent* à la mesure nulle sans lui être égal. C’est, transposée aux mesures, la distinction de la définition 88 du livre entre le point du continu et le grain d’apparence ponctuelle.

Ce pont n’est pas sans précédent : depuis Loeb [4], l’analyse non standard sait construire des mesures standard à partir de mesures hyperfinies [5, 6]. Nous indiquons en section 7.3 ce

que ce cadre apporterait et ce qu'il demande ; mais toute la première partie est démontrée sans lui.

Plan. La partie I (sections 2 à 7) est rigoureuse. La partie II (sections 8 à 10) est exploratoire : les énoncés y sont démontrés dans des cas modèles, mais leur portée générale reste à établir. La section 11 récapitule et liste les questions ouvertes.

Partie I Mesure sur un niveau de résolution

2 Le niveau de résolution comme algèbre de parties

2.1 Grains et grille

On travaille sur le support $X = [0, 1[$ de $\widetilde{\mathbb{R}}$, qui s'identifie au cercle unité de circonférence 1 déroulé (déf. 77 du livre). Pour $k \geq 1$, on pose

$$N_k = 2^{kn_\infty}, \quad \delta_k = 2^{-kn_\infty} = \frac{1}{N_k}, \quad x_j = j \delta_k, \quad b_j = [x_j, x_{j+1}[\quad (0 \leq j < N_k).$$

Lorsque le niveau doit être précisé, on écrit $x_j^{(k)}$ et $b_j^{(k)}$. Les grains $b_0, \dots, b_{N_k-1}$ forment une partition hyperfinie de X ; leur épaisseur commune δ_k est un infinitésimal non nul.

2.2 L'algèbre du niveau

Une partie de X « visible au niveau k » est une réunion de grains. Il faut préciser quelles familles d'indices sont permises : on ne peut pas prendre n'importe quelle partie (au sens externe) de $\{0, \dots, N_k - 1\}$, sans quoi les cardinaux, et donc les mesures, ne seraient plus des éléments de $\widetilde{\mathbb{R}}$.

Hypothèse 1 (Admissibilité). Pour chaque k , on dispose d'une famille $\mathcal{S}_k$ de parties *admissibles* de $\{0, \dots, N_k - 1\}$, qui contient les singletons et les intervalles d'entiers, est stable par complémentaire, par intersection et par réunion finie, et dont chaque élément S possède un cardinal $\#S$ dans $\{0, \dots, N_k\}$, additif sur les réunions disjointes.

Dans la terminologie de l'analyse non standard, $\mathcal{S}_k$ est la famille des parties *internes* ; dans celle du livre, ce sont les parties décrites par des indicatrices admissibles au sens de la définition 41.

Définition 2 (Algèbre du niveau k). On pose $B_S = \bigcup_{j \in S} b_j$ pour $S \in \mathcal{S}_k$, et

$$\mathcal{A}_k = \{B_S : S \in \mathcal{S}_k\}.$$

Proposition 3. $\mathcal{A}_k$ est une algèbre de Boole de parties de X , dont les atomes sont exactement les grains du niveau k . L'application $S \mapsto B_S$ est un isomorphisme d'algèbres de Boole de $\mathcal{S}_k$ sur $\mathcal{A}_k$.

Démonstration. Les grains étant deux à deux disjoints et recouvrant X , on a $X \setminus B_S = B_{S^c}$, $B_S \cap B_T = B_{S \cap T}$ et $B_S \cup B_T = B_{S \cup T}$; l'hypothèse 1 donne la stabilité. L'application $S \mapsto B_S$ est injective, car deux ensembles d'indices distincts diffèrent par un grain entier, qui est non vide. Un élément non vide de $\mathcal{A}_k$ contient au moins un grain, et un grain ne contient aucun élément non vide de $\mathcal{A}_k$ autre que lui-même : les atomes sont donc les grains. $\square$

Remarque 4 (Algèbre ou tribu?). L'auteur propose de définir la grille d'un niveau donné comme une *tribu*. Au sens strict, une tribu est stable par réunion dénombrable. Ici, $\mathcal{A}_k$ est stable par réunion *hyperfinie* admissible, mais une réunion dénombrable, au sens externe, de parties admissibles n'a pas de raison d'être admissible : la réunion des grains b_j d'indice j *standard*, c'est-à-dire la partie de X formée des points situés à un nombre standard de grains de 0, n'est pas de la forme B_S (si elle l'était, l'ensemble des entiers standard serait admissible, et il aurait un plus grand élément). Le terme juste est donc « algèbre hyperfinie » (ou « tribu interne »). Ce n'est pas une faiblesse : c'est précisément ce qui permet de calculer exactement, grain par grain, et la promotion se chargera du passage au dénombrable (section 7).

2.3 L'emboîtement des niveaux

Proposition 5 (Emboîtement). *Pour tout k , chaque grain du niveau k est la réunion disjointe de 2^{n_∞} grains du niveau $k+1$:*

$$b_j^{(k)} = \bigcup_{\ell=0}^{2^{n_\infty}-1} b_{j2^{n_\infty}+\ell}^{(k+1)}.$$

Par conséquent $\mathcal{A}_k \subset \mathcal{A}_{k+1}$, sous la condition naturelle que $S \in \mathcal{S}_k$ entraîne $\{j2^{n_\infty} + \ell : j \in S, 0 \leq \ell < 2^{n_\infty}\} \in \mathcal{S}_{k+1}$.

Démonstration. On a $\delta_k = 2^{n_\infty} \delta_{k+1}$, donc $x_j^{(k)} = j2^{n_\infty} \delta_{k+1} = x_{j2^{n_\infty}}^{(k+1)}$ et $x_{j+1}^{(k)} = x_{(j+1)2^{n_\infty}}^{(k+1)}$; l'intervalle $[x_j^{(k)}, x_{j+1}^{(k)}[$ est donc la réunion des 2^{n_∞} grains fins d'indices $j2^{n_\infty}, \dots, j2^{n_\infty} + 2^{n_\infty} - 1$. C'est la proposition 53 du livre. $\square$

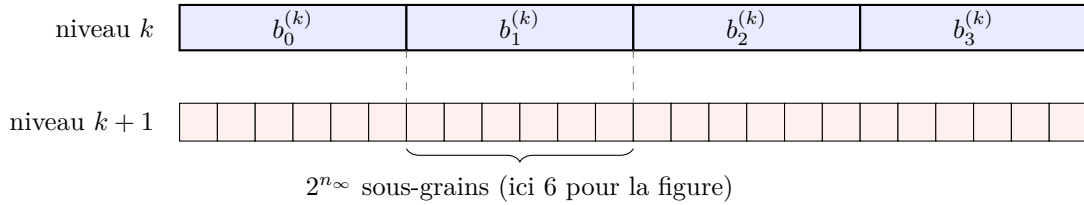


FIGURE 1 – L'emboîtement des niveaux : chaque grain du niveau k est une réunion de grains du niveau $k+1$, donc $\mathcal{A}_k \subset \mathcal{A}_{k+1}$.

3 Mesure positive de niveau

Définition 6 (Mesure de niveau). La *mesure de niveau k* est l'application $\mu_k : \mathcal{A}_k \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$ définie par

$$\mu_k(B_S) = \delta_k \cdot \#S.$$

Plus généralement, une *mesure positive de niveau k* est une application $m : \mathcal{A}_k \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ additive sur les réunions disjointes. Elle est entièrement déterminée par ses *poïds* $m_j = m(b_j)$, par $m(B_S) = \sum_{j \in S} m_j$.

La somme $\sum_{j \in S} m_j$ est une somme hyperfinie : elle a au plus N_k termes et a un sens dans $\tilde{\mathbb{R}}$, comme l'intégrale stratifiée du livre (prop. 27).

Proposition 7 (Propriétés de μ_k). 1. μ_k est additive, $\mu_k(X) = 1$, et $\mu_k(b_j) = \delta_k$ pour tout grain.

2. Si $a = x_p$ et $b = x_q$ sont des points de la grille avec $p \leq q$, alors $\mu_k([a, b]) = b - a$: la mesure de niveau est la longueur.
3. (Compatibilité) La restriction de μ_{k+1} à $\mathcal{A}_k$ est μ_k .

Démonstration. Point 1. L'additivité vient de celle du cardinal (hypothèse 1) ; $\mu_k(X) = \delta_k N_k = 1$; un grain correspond à un singleton.

Point 2. $[x_p, x_q]$ est la réunion des grains d'indices $p, \dots, q-1$, donc sa mesure est $(q-p)\delta_k = x_q - x_p$.

Point 3. D'après la proposition 5, B_S est, au niveau $k+1$, la réunion de $2^{n_\infty} \#S$ grains fins, de mesure $2^{n_\infty} \#S \cdot \delta_{k+1} = \#S \cdot \delta_k$. $\square$

Le point 3 est la version mesurée du théorème 53 du livre : la mesure d'un grain grossier est conservée quantitativement d'un niveau à l'autre.

Proposition 8 (Radon–Nikodym au niveau). *Toute mesure positive m de niveau k s'écrit de manière unique*

$$m(B_S) = \sum_{j \in S} \rho_j \mu_k(b_j), \quad \rho_j = \frac{m_j}{\delta_k}.$$

La famille $\rho = (\rho_j)$ est la densité de m par rapport à μ_k .

Démonstration. Chaque atome a une mesure $\mu_k(b_j) = \delta_k \neq 0$, donc on peut diviser : $m_j = \rho_j \delta_k$ équivaut à $\rho_j = m_j / \delta_k$. $\square$

Remarque 9. Dans la théorie classique, le théorème de Radon–Nikodym demande une hypothèse d'absolue continuité et une démonstration non triviale. Au niveau de résolution, il se réduit à une division, parce que tous les atomes ont une mesure non nulle. C'est une première trace de ce que le grain apporte : il n'y a pas, au niveau, d'ensemble non vide de mesure nulle. Les ensembles de mesure nulle n'apparaîtront qu'à la promotion.

4 Mesure orientée

4.1 Définition

Définition 10 (Mesure orientée de niveau). Une *mesure orientée* de niveau k est une application additive $\nu : \mathcal{A}_k \rightarrow \widetilde{\mathbb{R}}$, à valeurs de signe quelconque. Elle est déterminée par ses poids $c_j = \nu(b_j) \in \widetilde{\mathbb{R}} : \nu(B_S) = \sum_{j \in S} c_j$. On note $\mathcal{M}_k$ l'ensemble de ces mesures ; c'est un module sur $\widetilde{\mathbb{R}}$, isomorphe à $\widetilde{\mathbb{R}}^{N_k}$ par $\nu \mapsto (c_j)_j$.

Le signe de c_j est l'*orientation* du grain b_j pour ν . Le cas fondamental est celui du *grain orienté* $\pm g_j$, où g_j désigne la mesure de poids δ_k sur b_j et 0 ailleurs : c'est le grain muni de sa mesure, parcouru dans un sens ou dans l'autre.

Définition 11 (Segment orienté). Pour $a = x_p$ et $b = x_q$ sur la grille, on note $[a \rightarrow b]$ la mesure orientée

$$[a \rightarrow b] = \begin{cases} \sum_{p \leq j < q} g_j & \text{si } p \leq q, \\ -\sum_{q \leq j < p} g_j & \text{si } q < p. \end{cases}$$

Proposition 12 (Chasles au niveau). *Pour a, b, c sur la grille du niveau k ,*

$$[a \rightarrow b] + [b \rightarrow c] = [a \rightarrow c], \quad [b \rightarrow a] = -[a \rightarrow b],$$

et ces égalités sont exactes, grain par grain.

Démonstration. Par définition, $[a \rightarrow b]$ a le poids $\text{sgn}(b - a) \delta_k$ sur les grains situés entre a et b , et 0 ailleurs. On vérifie l'égalité grain par grain, dans chacune des six dispositions relatives de a, b, c ; par exemple, si $a < c < b$, les grains entre c et b reçoivent $+\delta_k - \delta_k = 0$ et ceux entre a et c reçoivent $+\delta_k$. $\square$

4.2 Décomposition de Jordan

Proposition 13 (Jordan et Hahn au niveau). *Toute $\nu \in \mathcal{M}_k$ s'écrit $\nu = \nu^+ - \nu^-$ avec*

$$\nu^+(b_j) = \max(c_j, 0), \quad \nu^-(b_j) = \max(-c_j, 0),$$

et cette décomposition est la seule, parmi les écritures $\nu = m_1 - m_2$ avec m_1, m_2 positives, qui minimise $m_1 + m_2$. La variation totale est $|\nu| = \nu^+ + \nu^-$, de poids $|c_j|$, et $P = \bigcup_{c_j > 0} b_j$ est un ensemble de Hahn : $\nu \geq 0$ sur P et $\nu \leq 0$ sur son complémentaire.

Démonstration. Si $\nu = m_1 - m_2$, alors pour chaque grain $c_j = m_{1,j} - m_{2,j}$ avec $m_{1,j}, m_{2,j} \geq 0$, donc $m_{1,j} + m_{2,j} \geq |c_j|$, avec égalité si et seulement si l'un des deux poids est nul, c'est-à-dire si $(m_{1,j}, m_{2,j}) = (c_j^+, c_j^-)$. La minimalité se lit ainsi grain par grain. Il faut que $\{j : c_j > 0\}$ soit admissible, ce que nous admettons comme partie de l'hypothèse 1 (c'est le cas pour les parties internes). $\square$

5 Mesure sommatoire et compensation exacte

Définition 14 (Mesure sommatoire). Une *mesure sommatoire* de niveau k est une somme $\sum_{i \in I} \nu_i$ de mesures orientées du même niveau, indexée par une famille hyperfinie admissible; c'est encore un élément de $\mathcal{M}_k$, de poids $\sum_i c_{i,j}$ sur le grain b_j .

La différence avec une simple mesure orientée n'est pas de nature, mais de lecture : une mesure sommatoire garde la trace des mesures orientées qui la composent, et c'est ce qui permet de parler de *compensation*.

Théorème 15 (Compensation exacte). *Soient $\nu \in \mathcal{M}_k$ et ν' la mesure orientée en sens inverse, de poids $-c_j$. Alors la mesure sommatoire $\nu + \nu'$ est la mesure nulle, grain par grain :*

$$(\nu + \nu')(b_j) = 0 \quad \text{pour tout } j.$$

En particulier, pour a, b sur la grille, $[a \rightarrow b] + [b \rightarrow a] = 0$.

Démonstration. $c_j + (-c_j) = 0$ dans $\widetilde{\mathbb{R}}$ pour chaque j , et la somme hyperfinie de zéros est nulle. La seconde assertion est la proposition 12. $\square$

Le théorème est élémentaire; son intérêt est dans l'hypothèse. La compensation exacte demande que les deux mesures soient définies sur la *même* algèbre, c'est-à-dire sur une grille commune. Si les deux mesures orientées décrivent « le même segment » sur deux grilles différentes, la compensation n'est plus qu'infinitésimale.

Proposition 16 (Grilles décalées). *Soient $a < b$ sur la grille du niveau k , et $a' = a + s$, $b' = b + s'$ avec $0 < s, s' < \delta_k$. On considère l'algèbre engendrée par les grains du niveau k et les points a', b' , munie de la mesure de longueur. Alors*

$$[a \rightarrow b] + [b' \rightarrow a'] \neq 0, \quad |[a \rightarrow b] + [b' \rightarrow a']|(X) = s + s' \leq 2\delta_k.$$

Démonstration. Les deux mesures orientées coïncident, au signe près, sur $[a', b[$; il reste $+$ la longueur sur $[a, a'[$ (de mesure s) et $-$ la longueur sur $[b, b'[$ (de mesure s'). La variation totale est $s + s'$, non nulle et infinitésimale. $\square$

Remarque 17 (Le sens exact de « même niveau »). La condition de l’auteur, « des mesures prises sur un même niveau de résolution », est donc exactement la condition nécessaire à la compensation exacte. Plus précisément, ce qu’il faut, c’est une grille *commune*. Deux niveaux d’une même famille dyadique en ont toujours une, le plus fin (proposition 5) : c’est pourquoi la condition n’est pas restrictive dans la tour des niveaux $-kn_\infty$ (section 8). Deux grilles décalées d’une fraction de grain n’en ont pas ; elles ne compensent qu’à un infinitésimal près.

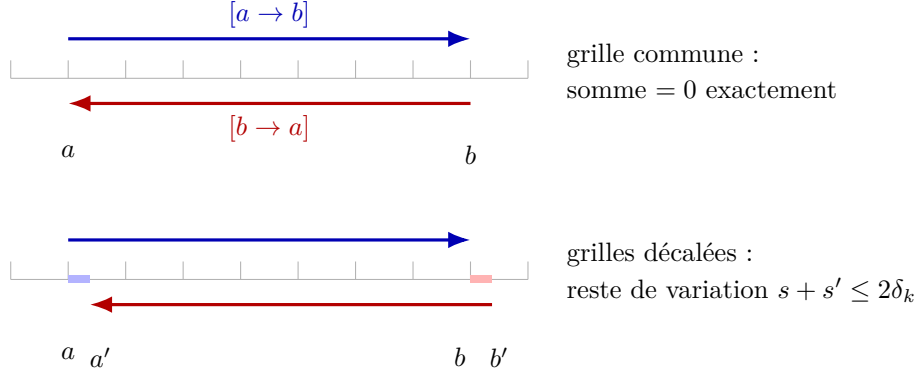


FIGURE 2 – Compensation exacte sur une grille commune (en haut) ; compensation seulement infinitésimale sur deux grilles décalées (en bas).

6 Trois zéros

Pour une mesure orientée $\nu \in \mathcal{M}_k$ et une fonction φ définie sur la grille, on pose

$$\langle \varphi, \nu \rangle = \sum_{j=0}^{N_k-1} \varphi(x_j) c_j,$$

l’intégrale stratifiée de φ contre ν (pour $\nu = \mu_k$, c’est la définition 42 du livre). Une fonction standard continue φ sur $[0, 1]$ s’étend à $\tilde{\mathbb{R}}$ par transfert, et l’on utilise le lemme suivant.

Lemme 18 (Continuité à l’échelle du grain). *Si φ est standard et continue sur $[0, 1]$, alors*

$$\omega_\varphi(\delta_k) := \max_{|x-y| \leq \delta_k} |\varphi(x) - \varphi(y)|$$

est infinitésimal. En particulier $\varphi(x) \approx \varphi(y)$ dès que x et y sont dans un même grain ou dans deux grains voisins.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ standard. Par continuité uniforme de φ sur le compact $[0, 1]$, il existe $\eta > 0$ standard tel que $|x - y| \leq \eta \Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \varepsilon$, et cet énoncé se transfère à $\tilde{\mathbb{R}}$. Comme $\delta_k < \eta$, on a $\omega_\varphi(\delta_k) \leq \varepsilon$. Ceci valant pour tout ε standard, $\omega_\varphi(\delta_k)$ est infinitésimal. $\square$

Définition 19 (Trois zéros). Une mesure orientée $\nu \in \mathcal{M}_k$ est

1. un *zéro exact* si $\nu = 0$, c’est-à-dire $c_j = 0$ pour tout j ;
2. un *zéro infinitésimal* si sa variation totale $|\nu|(X)$ est infinitésimale ;
3. un *zéro faible* si $|\nu|(X)$ est limitée et si $\langle \varphi, \nu \rangle \approx 0$ pour toute fonction φ standard continue sur $[0, 1]$.

L'ensemble des zéros infinitésimaux est la *monade* de la mesure nulle pour la variation totale ; on le note $\mathfrak{M}(0)$.

Proposition 20 (Hiérarchie stricte). *Zéro exact $\Rightarrow$ zéro infinitésimal $\Rightarrow$ zéro faible, et les deux implications sont strictes :*

1. le grain g_j (poids δ_k sur b_j) est un zéro infinitésimal non nul ;
2. la paire opposée $D_{j+1} - D_j$, où D_j a le poids 1 sur b_j , est un zéro faible, de variation totale 2 ;
3. le tapis alterné τ_k , de poids $(-1)^j \delta_k$ sur b_j , est un zéro faible de variation totale 1.

Démonstration. La première implication est évidente. Pour la seconde, si $|\nu|(X)$ est infinitésimale et φ standard continue, $|\langle \varphi, \nu \rangle| \leq \max |\varphi| \cdot |\nu|(X)$ est le produit d'un standard par un infinitésimal.

Point 1. $|g_j|(X) = \delta_k$, infinitésimal et non nul.

Point 2. $\langle \varphi, D_{j+1} - D_j \rangle = \varphi(x_{j+1}) - \varphi(x_j)$, infinitésimal par le lemme 18 ; la variation totale vaut 2, qui n'est pas infinitésimal.

Point 3. $|\tau_k|(X) = N_k \delta_k = 1$. Comme N_k est pair, on regroupe les termes par paires :

$$\langle \varphi, \tau_k \rangle = \delta_k \sum_{m=0}^{N_k/2-1} (\varphi(x_{2m}) - \varphi(x_{2m+1})),$$

d'où $|\langle \varphi, \tau_k \rangle| \leq \delta_k \cdot \frac{N_k}{2} \cdot \omega_\varphi(\delta_k) = \frac{1}{2} \omega_\varphi(\delta_k) \approx 0$. □

Remarque 21 (Le tapis alterné, un anti-Dirac). Le Dirac D_j concentre une masse 1 sur un seul grain. Le tapis alterné fait l'inverse : il étale une masse totale 1 sur *tous* les grains, avec des orientations alternées, et son effet sur toute fonction continue est nul. C'est la version mesure de l'anti-Dirac introduit dans *Plan complexe et grain nul* [3] : un étalement maximal, de somme nulle.

Remarque 22 (Au-delà de la variation limitée). Le dipôle $(D_{j+1} - D_j)/\delta_k$ a une variation totale $2/\delta_k$ illimitée ; il n'est pas un zéro faible, et pour φ standard de classe C^1 , $\langle \varphi, (D_{j+1} - D_j)/\delta_k \rangle \approx \varphi'(\text{st } x_j)$: il agit comme la distribution $-\delta'_{\text{st } x_j}$. Les mesures de variation illimitée sortent de la théorie de la mesure et mènent aux distributions de Schwartz [8].

7 Promotion : des mesures de niveau aux mesures de Radon

7.1 Le théorème de promotion

Théorème 23 (Promotion d'une mesure orientée). *Soit $\nu \in \mathcal{M}_k$ de variation totale limitée. Il existe une unique mesure de Radon signée standard $\text{st}_* \nu$ sur $[0, 1]$ telle que, pour toute fonction φ standard continue sur $[0, 1]$,*

$$\int_{[0,1]} \varphi d(\text{st}_* \nu) = \text{st} \langle \varphi, \nu \rangle.$$

L'application st_ est additive, commute à la multiplication par les scalaires standard, envoie les mesures positives sur des mesures positives, et vérifie $\|\text{st}_* \nu\| \leq \text{st} |\nu|(X)$.*

Démonstration. Pour φ standard continue, $|\langle \varphi, \nu \rangle| \leq \|\varphi\|_\infty |\nu|(X)$ est limité, donc $\Lambda(\varphi) = \text{st} \langle \varphi, \nu \rangle$ est un réel. La promotion étant additive et multiplicative sur les éléments limités ($\mathbb{R} = \mathbb{R}_{\text{fin}}/\mathfrak{m}$), Λ est une forme linéaire sur l'espace $C([0, 1])$ des fonctions standard continues, de norme au plus $\text{st} |\nu|(X)$. Si $\nu \geq 0$ et $\varphi \geq 0$, alors $\langle \varphi, \nu \rangle \geq 0$, donc $\Lambda(\varphi) \geq 0$. Le théorème de représentation de Riesz [7] fournit une unique mesure de Radon signée m sur $[0, 1]$ telle que $\Lambda(\varphi) = \int \varphi dm$; elle est positive si Λ l'est. On pose $\text{st}_* \nu = m$. □

Remarque 24. Ce théorème ne demande *aucune* hypothèse de saturation : le passage au dénombrable, que l'algèbre du niveau ne permet pas (remarque 4), est entièrement pris en charge par le théorème de Riesz, du côté standard. La promotion des mesures est ainsi l'exact analogue de la promotion des nombres : elle fabrique l'objet standard (une vraie mesure, σ -additive, avec des ensembles non vides de mesure nulle) à partir d'un objet de niveau (une mesure finiment additive sans ensemble non vide de mesure nulle).

Proposition 25 (Exemples). 1. $\text{st}_* \mu_k = \lambda$, la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$, pour tout niveau k .

2. $\text{st}_* D_j = \delta_{\text{st } x_j}$, la mesure de Dirac au point $\text{st } x_j \in [0, 1]$.

3. Si f est standard continue et ν a les poids $f(x_j)\delta_k$, alors $\text{st}_* \nu = f d\lambda$.

4. $\text{st}_* g_j = 0$, $\text{st}_*(D_{j+1} - D_j) = 0$, $\text{st}_* \tau_k = 0$.

Démonstration. Point 1. $\langle \varphi, \mu_k \rangle$ est une somme de Riemann de pas infinitésimal ; par le théorème 25 du livre, sa promotion est $\int_0^1 \varphi$.

Point 2. $\langle \varphi, D_j \rangle = \varphi(x_j) \approx \varphi(\text{st } x_j)$ par le lemme 18.

Point 3. $\langle \varphi, \nu \rangle = \sum \varphi(x_j) f(x_j) \delta_k$ est une somme de Riemann de φf , standard continue.

Point 4. Ce sont les zéros de la proposition 20. $\square$

7.2 Trois zéros, une classe

Définition 26 (Équivalence par la promotion). Deux mesures orientées ν, ν' de variation limitée (de niveaux éventuellement différents) sont *équivalentes*, et l'on écrit $\nu \simeq \nu'$, si $\text{st}_* \nu = \text{st}_* \nu'$, c'est-à-dire si $\langle \varphi, \nu \rangle \approx \langle \varphi, \nu' \rangle$ pour toute φ standard continue.

Théorème 27 (Trois zéros, une classe). 1. La classe de la mesure nulle est exactement l'ensemble des zéros faibles ; elle contient $\mathfrak{M}(0)$, qui contient le zéro exact.

2. La somme de deux mesures orientées opposées sur une grille commune est le zéro exact ; sur deux grilles décalées, c'est un zéro infinitésimal. Dans les deux cas elle est équivalente à 0.

3. Le grain g_j est équivalent à la mesure nulle sans lui être égal :

$$g_j \simeq 0 = \nu + (-\nu), \quad g_j \neq 0.$$

Démonstration. Le point 1 est la définition des zéros faibles combinée à la proposition 20. Le point 2 découle du théorème 15 et de la proposition 16. Le point 3 est la proposition 25, point 4. $\square$

Ce théorème donne la forme rigoureuse de la motivation initiale. La mesure sommatoire nulle, obtenue par compensation de deux mesures orientées opposées sur un même niveau, est le zéro *exact*. Le grain n'est pas ce zéro : c'est un élément non nul de sa monade. L'identification « mesure nulle = grain » est donc juste à la *promotion près*, et fausse au niveau. On retrouve, pour les mesures, la distinction de la définition 88 du livre entre le point (de mesure exactement nulle) et le grain (infinitésimal non nul), et la remarque 121 : le grain n'est pas un « zéro épais », il est équivalent au zéro.

7.3 Le cadre de Loeb

Le théorème 23 promeut les mesures *via* leur action sur les fonctions continues. L'analyse non standard dispose d'une construction plus forte, due à Loeb [4] : à partir d'une mesure

	exact	infinitésimal	faible
définition	$c_j = 0$ pour tout j	$ \nu (X) \approx 0$	$\langle \varphi, \nu \rangle \approx 0$
exemple	$[a \rightarrow b] + [b \rightarrow a]$	grain g_j	tapis alterné τ_k
variation totale	0	δ_k	1
promotion	0	0	0

TABLE 1 – Les trois zéros d’un niveau de résolution. Ils sont distincts au niveau et confondus par la promotion.

hyperfinie, elle construit une vraie tribu et une mesure σ -additive $L(\mu_k)$ sur X lui-même, et l’on montre [5, 6] que, pour tout borélien $A \subset [0, 1]$,

$$L(\mu_k)(\text{st}^{-1}(A)) = \lambda(A).$$

La mesure de Lebesgue est donc l’image, par la promotion des points, de la mesure de comptage normalisée d’un seul niveau de résolution, quel qu’il soit.

Cette construction demande une propriété de *saturation* ($\aleph_1$ -saturation : toute suite décroissante de parties internes non vides a une intersection non vide), qui ne figure pas, à notre connaissance, dans l’axiomatique du livre (dont le transfert est « à la Łoś », chap. 5). Deux options sont donc ouvertes : rester au théorème 23, entièrement rigoureux dans le cadre actuel, ou ajouter la saturation comme axiome et obtenir la théorie de Loeb complète. Nous ne tranchons pas ici.

Partie II Explorations

8 Familles de niveaux : une filtration

8.1 La tour des algèbres

Par la proposition 5, les algèbres des niveaux homogènes $-kn_\infty$ forment une suite croissante

$$\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}_3 \subset \dots$$

C’est ce que la théorie des probabilités appelle une *filtration*. Passer d’un niveau fin à un niveau grossier, c’est oublier l’information interne aux grains grossiers.

Définition 28 (Famille cohérente). Une famille $(\nu_k)_{k \geq 1}$, avec $\nu_k \in \mathcal{M}_k$, est *cohérente* si ν_{k+1} restreinte à $\mathcal{A}_k$ est ν_k pour tout k .

La famille (μ_k) est cohérente (proposition 7, point 3). La cohérence est la condition de compatibilité de Kolmogorov, transposée à la tour des niveaux.

Proposition 29 (Moyenne sur les sous-grains). Si (ν_k) est cohérente, de densités $\rho^{(k)}$ par rapport à μ_k , alors la densité au niveau k est la moyenne des densités au niveau $k+1$ sur les sous-grains :

$$\rho_j^{(k)} = \frac{1}{2^{n_\infty}} \sum_{\ell=0}^{2^{n_\infty}-1} \rho_{j2^{n_\infty}+\ell}^{(k+1)}.$$

Démonstration. $\rho_j^{(k)} \delta_k = \nu_k(b_j^{(k)}) = \sum_\ell \nu_{k+1}(b_{j2^{n_\infty}+\ell}^{(k+1)}) = \sum_\ell \rho_{j2^{n_\infty}+\ell}^{(k+1)} \delta_{k+1}$, et $\delta_k = 2^{n_\infty} \delta_{k+1}$. $\square$

Autrement dit, $\rho^{(k)}$ est l'espérance conditionnelle de $\rho^{(k+1)}$ sachant $\mathcal{A}_k$, et la suite des densités est une *martingale* pour la filtration des niveaux. C'est un pont possible vers le calcul stochastique non standard (mouvement brownien d'Anderson [6]), que nous ne développons pas.

Proposition 30 (La promotion ne dépend pas du niveau). *Si (ν_k) est cohérente et si $|\nu_{k+1}|(X)$ est limitée, alors $\text{st}_* \nu_k = \text{st}_* \nu_{k+1}$.*

Démonstration. Pour φ standard continue, en regroupant les sous-grains par grain grossier,

$$\langle \varphi, \nu_k \rangle - \langle \varphi, \nu_{k+1} \rangle = \sum_j \sum_\ell (\varphi(x_j^{(k)}) - \varphi(x_{j2^{n_\infty}+\ell}^{(k+1)})) \nu_{k+1}(b_{j2^{n_\infty}+\ell}^{(k+1)}),$$

dont la valeur absolue est majorée par $\omega_\varphi(\delta_k) |\nu_{k+1}|(X)$, infinitésimal par le lemme 18. $\square$

Remarque 31 (Compensation entre niveaux). Une mesure orientée du niveau k et la mesure opposée du niveau $k+1$ se compensent *exactement* dès qu'on les lit sur $\mathcal{A}_{k+1}$, qui les contient toutes deux. Dans une famille homogène, « même niveau » peut donc toujours être remplacé par « niveau commun ». La situation change pour des grilles incommensurables, par exemple de pas 2^{-n_∞} et $\sqrt{2} \cdot 2^{-n_\infty}$: l'algèbre qu'elles engendrent a des atomes de tailles irrégulières, et la compensation exacte des « mêmes » segments est en général impossible (proposition 16). Deux grilles de pas 2^{-n_∞} et 3^{-n_∞} , en revanche, ont le raffinement commun de pas 6^{-n_∞} : ce qui compte est la commensurabilité des pas, pas leur égalité.

9 Grains déformés : le jacobien comme dérivée de Radon–Nikodym

Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une fonction standard de classe C^1 , strictement croissante, avec $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ et $f' > 0$ sur $[0, 1]$. On l'étend à $\tilde{\mathbb{R}}$ par transfert ; le théorème des accroissements finis se transfère aussi.

9.1 Sens direct : déformation de l'axe vertical

Les grains b_j de l'axe des abscisses ont pour images sur l'axe vertical les *grains déformés*

$$f(b_j) = [f(x_j), f(x_{j+1})[, \quad \ell_j = f(x_{j+1}) - f(x_j) = f'(\xi_j) \delta_k, \quad \xi_j \in b_j.$$

C'est la déformation jacobienne de l'axe vertical : chaque grain y est étiré ou contracté par le facteur $f'(\xi_j)$.

Proposition 32. *La mesure image $f_* \mu_k$, qui donne la masse δ_k à chaque grain déformé $f(b_j)$, a pour densité $\delta_k / \ell_j = 1 / f'(\xi_j)$ par rapport à la longueur, et*

$$\text{st}_*(f_* \mu_k) = (f^{-1})'(y) dy.$$

Démonstration. En testant contre φ standard continue aux extrémités gauches $f(x_j)$ des grains déformés, $\sum_j \varphi(f(x_j)) \delta_k \approx \int_0^1 \varphi(f(x)) dx = \int_0^1 \varphi(y) (f^{-1})'(y) dy$, la première étape par le théorème 25 du livre appliqué à $\varphi \circ f$, la seconde par changement de variable classique. $\square$

9.2 Réciproque : mesure sur l'axe des abscisses déformé

C'est la situation évoquée par l'auteur : la déformation jacobienne concerne l'axe vertical, et sa réciproque porte sur l'axe des abscisses. On part cette fois de la grille *uniforme* de l'axe vertical, $y_i = i\delta_k$, et l'on tire ses grains sur l'axe des abscisses :

$$a_i = f^{-1}([y_i, y_{i+1}[) = [x'_i, x'_{i+1}[, \quad x'_i = f^{-1}(y_i), \quad |a_i| = x'_{i+1} - x'_i = \frac{\delta_k}{f'(\eta_i)}, \quad \eta_i \in a_i.$$

L'axe des abscisses reçoit ainsi une grille *déformée*, serrée là où f' est grand et lâche là où f' est petit (figure 3).

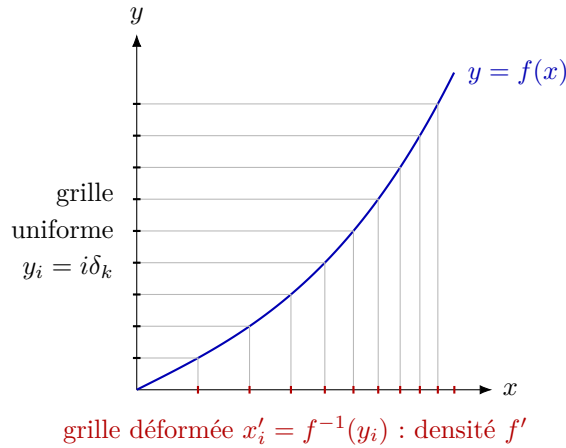


FIGURE 3 – La réciproque d'une déformation jacobienne : la grille uniforme de l'axe vertical, tirée par f^{-1} , donne sur l'axe des abscisses une grille déformée, serrée là où f' est grand. La masse δ_k de chaque grain déformé, rapportée à sa longueur, est le jacobien.

Théorème 33 (Le jacobien est une dérivée de Radon–Nikodym). *Soit $f^*\mu_k$ la mesure qui donne à chaque grain déformé a_i la masse δ_k de son image.*

1. *Au niveau, sa densité par rapport à la longueur est exactement le jacobien en un point intermédiaire : $f^*\mu_k(a_i) = f'(\eta_i)|a_i|$.*
2. *À la promotion, $\text{st}_*(f^*\mu_k) = f'(x)dx$: le jacobien est la dérivée de Radon–Nikodym de la mesure tirée par rapport à la mesure de Lebesgue.*
3. *(Changement de variable) Pour g standard continue, $\sum_i g(f(x'_i))\delta_k = \sum_i g(y_i)\delta_k$ exactement, et la promotion des deux membres donne $\int_0^1 g(f(x))f'(x)dx = \int_0^1 g(y)dy$.*

Démonstration. Point 1. $|a_i| = \delta_k/f'(\eta_i)$, donc $\delta_k = f'(\eta_i)|a_i|$.

Point 2. Pour φ standard continue, $\sum_i \varphi(x'_i)\delta_k = \sum_i \varphi(x'_i)f'(\eta_i)|a_i|$. Comme $|a_i| \leq \delta_k/\min f'$ est infinitésimal, c'est une somme de Riemann de $\varphi f'$ à un infinitésimal près ($|f'(\eta_i) - f'(x'_i)| \leq \omega_{f'}(\max_i |a_i|) \approx 0$, lemme 18), dont la promotion est $\int_0^1 \varphi f'$.

Point 3. L'égalité des sommes est une simple réindexation, puisque $f(x'_i) = y_i$. Le membre de droite se promeut en $\int g$; le membre de gauche, écrit $\sum_i g(f(x'_i))f'(\eta_i)|a_i|$, se promeut en $\int g(f(x))f'(x)dx$ par le même argument qu'au point 2. $\square$

La formule du changement de variable, qui demande classiquement une démonstration, est donc, au niveau, une *identité exacte* (on compte les mêmes grains de deux façons), et la promotion la transforme en égalité d'intégrales.

Remarque 34 (Orientation). Si f est strictement *décroissante*, les grains déformés sont parcourus en sens inverse : le grain a_i va de x'_i à $x'_{i+1} < x'_i$. En tant que mesure orientée, $f^*\mu_k$ a alors la densité $f' < 0$: c'est le jacobien *signé* qui est la dérivée de Radon–Nikodym, et la mesure orientée garde la trace du retournement que la mesure positive efface.

9.3 Points critiques : le jacobien change le niveau

Supposons maintenant $f(x) = x^2$, dont le jacobien s'annule en 0. Le premier grain de l'axe vertical a pour image réciproque

$$a_0 = f^{-1}([0, \delta_k]) = [0, \sqrt{\delta_k}], \quad \sqrt{\delta_k} = 2^{-kn_\infty/2}.$$

Ce grain déformé est encore infinitésimal, mais il est d'un autre ordre : il appartient au niveau $-kn_\infty/2$, et non au niveau $-kn_\infty$. Plus loin de 0, $|a_i| = \sqrt{\delta_k}(\sqrt{i+1} - \sqrt{i})$ décroît jusqu'à $\approx \delta_k/2$ près de $x = 1$. La grille déformée *interpole* ainsi entre deux niveaux.

Proposition 35. *Pour $f(x) = x^m$ ($m \geq 2$ entier standard), l'image réciproque du premier grain de niveau k est d'épaisseur $2^{-kn_\infty/m}$; c'est un grain du niveau de résolution $-kn_\infty/m$ dès que m divise kn_∞ . Un jacobien qui s'annule à l'ordre $m - 1$ fait remonter la tour des niveaux d'un facteur m .*

Démonstration. $f^{-1}([0, \delta_k]) = [0, \delta_k^{1/m}]$ et $\delta_k^{1/m} = 2^{-kn_\infty/m}$. □

C'est le phénomène inverse de celui de la remarque 122 du livre, où un facteur contractant fait *descendre* la tour. Il ne faut pas en conclure qu'il manque des niveaux : entre deux strates (niveaux multiples de n_∞), le livre dispose de tous les niveaux de résolution $-m$, m entier, de grain 2^{-m} . Le niveau $-kn_\infty/m$ en fait partie dès que m divise kn_∞ ; la question est donc une question de *divisibilité* de kn_∞ par l'ordre du point critique, et non de nouveaux niveaux. Ceci rejoint l'étude des coupures polynomiales, où le jacobien $P'(\xi)$ déformait déjà le grain.

9.4 Un jacobien infinitésimal fabrique un Dirac

Prenons enfin le jacobien infinitésimal du plan à deux résolutions, $f(y) = Jy$ avec $J = 2^{-n_\infty}$.

Proposition 36. *L'image de la mesure μ_k par $y \mapsto Jy$ est portée par le seul grain $[0, J]$ du niveau 1, sur lequel elle coïncide avec la mesure du niveau $k + 1$ renormalisée :*

$$(J\cdot)_*\mu_k = 2^{n_\infty} \mu_{k+1}|_{[0, J]}, \quad \text{st}_*((J\cdot)_*\mu_k) = \delta_0.$$

Démonstration. Le grain b_j du niveau k a pour image $[Jx_j, Jx_{j+1}]$, de longueur $J\delta_k = \delta_{k+1}$: c'est le grain $b_j^{(k+1)}$, qui est contenu dans $[0, J]$ puisque $j < N_k$. Il reçoit la masse $\delta_k = 2^{n_\infty}\delta_{k+1}$. Pour φ standard continue, $\sum_j \varphi(Jx_j)\delta_k \approx \varphi(0)$, puisque tous les points Jx_j sont dans $[0, J]$, infiniment proches de 0. □

Toute la grille du niveau k se retrouve, copiée au niveau $k+1$, dans un seul grain du niveau 1 ; c'est l'auto-similarité du situs. Et vue de la promotion, cette copie est un Dirac. D'où la lecture : *un Dirac est une mesure de Lebesgue contractée par un jacobien infinitésimal*, et, en sens inverse, le jacobien $1/J$ dilate un grain de masse δ en une mesure standard étalée, à condition de renormaliser la masse par $1/\delta$. Concentration (Dirac) et étalement (Lebesgue, ou tapis alterné) sont les deux faces d'une même opération de changement de niveau.

10 Le repliement fabrique le zéro sommatoire

10.1 Image orientée d'un segment replié

Il reste à relier la seconde partie à la première. Une application qui *replie* un segment sur lui-même envoie deux morceaux sur le même morceau, avec des orientations opposées.

Définition 37 (Image orientée). Pour f continue, strictement monotone sur chaque grain de niveau k , l'image orientée d'un grain orienté $[x_j \rightarrow x_{j+1}]$ est le segment orienté $[f(x_j) \rightarrow f(x_{j+1})]$, et l'on étend par additivité. On la note $f_\#$.

C'est l'image au sens des chaînes (ou des courants), et non au sens des mesures positives : elle tient compte du sens de parcours.

Théorème 38 (Le repliement). *Sur la grille symétrique $x_j = j\delta_k$, $-N_k \leq j \leq N_k$, du segment $[-1, 1]$, soit $f(x) = x^2$. Alors, exactement, grain par grain,*

$$f_\#[-1 \rightarrow 1] = 0,$$

alors que l'image positive f_μ_k vaut deux fois la mesure image de $[0, 1]$, et se promeut en $y^{-1/2} dy$ sur $[0, 1]$.*

Démonstration. Par la proposition 12, $[-1 \rightarrow 1] = \sum_{j=0}^{N_k-1} ([-x_{j+1} \rightarrow -x_j] + [x_j \rightarrow x_{j+1}])$. L'image orientée de chaque paire est $[x_{j+1}^2 \rightarrow x_j^2] + [x_j^2 \rightarrow x_{j+1}^2] = 0$, par le théorème 15 appliqué sur la grille commune des points x_j^2 . L'image positive, elle, compte chaque grain déformé $[x_j^2, x_{j+1}^2]$ deux fois ; sa promotion est $2 \cdot (f^{-1})'(y) dy = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} dy$ (proposition 32, étendue à ce cas où f' s'annule en un point, la densité restant intégrable). $\square$

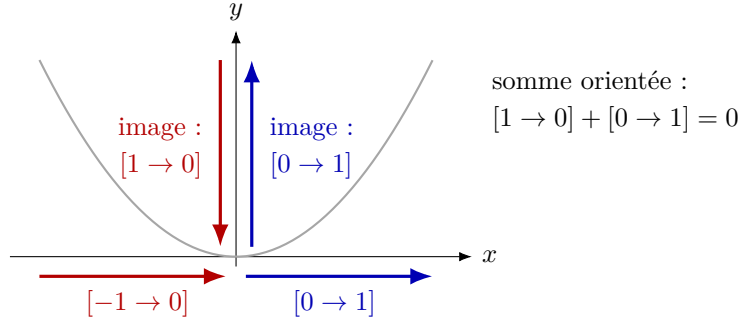


FIGURE 4 – Le repliement $x \mapsto x^2$ envoie les deux moitiés du segment sur le même segment $[0, 1]$ avec des orientations opposées : l'image orientée est le zéro exact, grain par grain.

10.2 Lecture

Le théorème 38 montre que la mesure sommatoire nulle n'a pas seulement une définition (deux mesures orientées opposées sur un même niveau) : elle a aussi une *origine géométrique*. Elle est la trace d'un repliement. Le repliement produit automatiquement une grille commune (les deux moitiés d'une grille symétrique ont les mêmes images x_j^2), et c'est pourquoi la compensation y est exacte et non seulement infinitésimale.

On retrouve l'image du plan comme « deux droites superposées » de *Plan complexe et grain nul* [3] : la superposition de deux copies d'une droite parcourues en sens inverse a une somme orientée nulle. Dans le plan complexe, l'application $z \mapsto z^2$ replie ainsi l'axe réel sur la demi-droite $\mathbb{R}_{\geq 0}$ et l'axe imaginaire sur $\mathbb{R}_{\leq 0}$, puisque $(iy)^2 = -y^2$: les deux axes ont une image orientée nulle.

Remarque 39 (Le plan à deux résolutions et la mesure d'aire). Dans le plan à deux résolutions [2], la grille $\Gamma = \delta_f \tilde{\mathbb{Z}} + i \delta_g \tilde{\mathbb{Z}}$ définit une algèbre produit dont les atomes sont des rectangles $\delta_f \times \delta_g$. Le quart de tour i envoie un tel rectangle sur un rectangle $\delta_g \times \delta_f$: il conserve l'aire, mais pas l'algèbre, ce qui est la forme mesurée de la symétrie brisée. Or $\delta_g = 2^{n_\infty} \delta_f$, de sorte que la grille carrée fine $\delta_f \tilde{\mathbb{Z}} + i \delta_f \tilde{\mathbb{Z}}$ raffine à la fois Γ et $i\Gamma$. Sur ce raffinement commun, i est une symétrie, et les compensations sont exactes. La symétrie brisée au niveau des grains est donc restaurée, pour les mesures, dès le niveau fin commun, sans attendre la promotion.

11 Synthèse et questions ouvertes

Théorie du grain	Théorie de la mesure
grille d'un niveau	algèbre hyperfinie $\mathcal{A}_k$, atomes = grains
emboîtement des niveaux (prop. 53)	filtration $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \subset \dots$
mesure d'un grain conservée (th. 53)	cohérence $\mu_{k+1} _{\mathcal{A}_k} = \mu_k$
intégrale stratifiée (déf. 42)	$\langle \varphi, \nu \rangle$, somme hyperfinie
grain orienté	mesure signée, décomposition de Jordan
compensation sur un même niveau	zéro exact (th. 15)
grain (déf. 88, rem. 121)	zéro infinitésimal, élément de $\mathfrak{M}(0)$
anti-Dirac	tapis alterné, zéro faible
promotion st	st_* , par le théorème de Riesz
déformation jacobienne	mesure image, densité $1/f'$
réciproque sur l'axe des abscisses	densité $f' : \text{Radon-Nikodym}$
jacobien infinitésimal J	fabrication d'un Dirac
deux droites superposées	repliement, image orientée nulle

TABLE 2 – Le dictionnaire entre les deux théories.

Ce qui est établi. Sur un niveau de résolution, la théorie est complète et élémentaire : tout se calcule grain par grain. La mesure sommatoire nulle de deux mesures orientées opposées est le zéro exact dès que les deux mesures vivent sur une grille commune ; sur deux grilles décalées, la compensation n'est plus qu'infinitésimale. Le grain est un zéro infinitésimal, distinct du zéro exact au niveau, et confondu avec lui par la promotion, qui envoie les mesures de variation limitée sur les mesures de Radon standard.

Questions ouvertes.

1. *Saturation.* Faut-il ajouter l' $\aleph_1$ -saturation à l'axiomatique du grain pour disposer de la théorie de Loeb complète, ou le théorème 23 suffit-il aux usages visés ?
2. *Divisibilité aux points critiques.* Les points critiques font apparaître des épaisseurs $2^{-kn_\infty/m}$ (proposition 35), qui sont des grains de la tour des résolutions dès que m divise kn_∞ . Quelles propriétés de divisibilité faut-il demander à n_∞ pour que ce soit toujours le cas ?
3. *Grilles incommensurables.* Quelle est la structure de l'algèbre engendrée par deux grilles de pas incommensurables, et quelle est la meilleure compensation possible entre elles ?

4. *Dimension deux*. Les algèbres produits du plan à deux résolutions, leurs raffinements communs et l'action de ω sur les mesures d'aire restent à étudier systématiquement.
5. *Martingales*. La suite des densités d'une famille cohérente est une martingale ; la filtration des niveaux pourrait fournir un modèle stratifié du mouvement brownien.

Références

- [1] H. Genvrin, *Théorie du grain*, manuscrit, 2026 ; chap. 4 (intégrale stratifiée), chap. 10 (construction pragmatique des réels) et chap. 15 (cardinal et promotion algébrique).
- [2] H. Genvrin, *Du cercle complexe au plan complexe : deux axes, deux résolutions*, manuscrit, 2026.
- [3] H. Genvrin, *Plan complexe et grain nul*, manuscrit, 2026.
- [4] P. A. Loeb, « Conversion from nonstandard to standard measure spaces and applications in probability theory », *Trans. Amer. Math. Soc.* **211** (1975), 113–122.
- [5] N. J. Cutland, « Nonstandard measure theory and its applications », *Bull. London Math. Soc.* **15** (1983), 529–589.
- [6] S. Albeverio, J. E. Fenstad, R. Høegh-Krohn, T. Lindstrøm, *Nonstandard Methods in Stochastic Analysis and Mathematical Physics*, Academic Press, 1986.
- [7] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, 3^e éd., McGraw-Hill, 1987 (théorème de représentation de Riesz, chap. 2 et 6).
- [8] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, Hermann, 1950–1951.
- [9] A. Robinson, *Non-standard Analysis*, North-Holland, 1966.