

Périodes, coupures polynomiales et quasi-trous

Une extension de la théorie des coupures dans la théorie du grain

Hugues Genvrin

Septembre 2026

Résumé

Nous prolongeons l'étude des coupures dans la théorie du grain dans deux directions. D'abord, nous décrivons complètement la suite des positions $\theta_N(x)$ d'un rationnel $x = p/q$ dans ses grains : sa prépériode est l'exposant de 2 dans q , et sa période est l'ordre de 2 modulo la partie impaire q' de q . Les positions admissibles se répartissent en cycles disjoints ; deux rationnels de cycles différents n'occupent jamais la même position dans leur grain, et un rationnel visite toutes les positions admissibles si et seulement si 2 engendre $(\mathbb{Z}/q'\mathbb{Z})^\times$, ce qui relie la question à la conjecture d'Artin. Ensuite, nous coupons la droite avec un polynôme : la coupure d'un nombre algébrique se localise dans son grain par un changement de signe d'un entier, ce qui redonne les segments dyadiques emboîtés et fournit l'inégalité de Liouville dans le langage du grain. La position de la coupure dans son grain est le quotient d'un nombre dyadique par le jacobien P' du polynôme de coupure : rationnel et constant en degré 1, ce qui force la périodicité, irrationnel en degré au moins 2. Avec le théorème de Ridout, on obtient une hiérarchie des quasi-trous qui sépare les nombres dyadiques, rationnels, algébriques et de Liouville. Enfin, nous montrons que les classes des nombres constructibles, des radicaux et des algébriques se lisent dans le polynôme de coupure, mais très probablement pas dans les positions : c'est la conjecture de Borel, que nous reformulons comme une question sur la répartition des coupures dans leurs grains.

1 Introduction

Dans [2], nous avons montré que la rationalité d'un nombre se lit dans la position relative $\theta_N(x)$ de sa coupure dans son grain, suivie à travers la tour des résolutions : x est rationnel si et seulement si la suite $(\theta_N(x))_{N \in \mathbb{N}}$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs [2, th. 10]. Nous avons aussi observé que les rationnels non dyadiques se tiennent à une distance minorée des jonctions, ce qui définit un *quasi-trou* de la grille [2, prop. 13].

Cet article répond à deux questions naturelles.

1. La répartition, finie, des positions d'un rationnel définit-elle des *périodes*, et que dit-elle de plus ?
2. Que se passe-t-il si l'on coupe la droite avec un *polynôme* ? Les positions dans les grains distinguent-elles les rationnels, les nombres constructibles, les radicaux non constructibles et les autres algébriques ?

Nos réponses sont les suivantes.

- Les positions d'un rationnel ont une prépériode et une période explicites, et se répartissent en cycles disjoints (section 3).
- La coupure d'un nombre algébrique se localise par le signe d'un entier ; sa position dans le grain est commandée par le jacobien du polynôme de coupure ; on en déduit une hiérarchie des quasi-trous (section 4).

- Les classes algébriques se lisent dans le polynôme de coupure, mais très probablement pas dans les positions (section 5).

2 Rappels et notations

Nous reprenons les notations de [2]. Pour $x \in [0, 1[$ et N entier ou hyperentier, on pose

$$\ell_N(x) = \lfloor 2^N x \rfloor, \quad \theta_N(x) = \text{frac}(2^N x) \in [0, 1[, \quad \delta_N(x) = \min(\theta_N(x), 1 - \theta_N(x)).$$

Le grain de résolution $-N$ qui contient x est $g_{\ell_N(x)}^N = [\ell_N(x) 2^{-N}, (\ell_N(x) + 1) 2^{-N}[$; $\theta_N(x)$ est la position relative de x dans ce grain, et la distance de x à la jonction la plus proche vaut $\delta_N(x) 2^{-N}$. Le $(N + 1)$ -ième chiffre binaire de x vaut 1 si et seulement si $\theta_N(x) \geq 1/2$.

Lemme 1 (Doublement, [2, lemme 9]). *Pour tout N , $\theta_{N+1}(x) = \text{frac}(2\theta_N(x))$.*

Hypothèse 2 (Transfert). Les énoncés du premier ordre à paramètres standard vrais pour tous les entiers restent vrais pour tous les hyperentiers.

Pour un entier impair $q' \geq 1$, on note $(\mathbb{Z}/q'\mathbb{Z})^\times$ le groupe des inversibles modulo q' , $\varphi(q')$ son cardinal (indicatrice d'Euler), et $\text{ord}_{q'}(2)$ l'ordre de 2 modulo q' : le plus petit entier $T \geq 1$ tel que q' divise $2^T - 1$. Par le théorème d'Euler, $\text{ord}_{q'}(2)$ divise $\varphi(q')$.

3 Les périodes des rationnels

3.1 Préperiode et période

Théorème 3 (Préperiode et période). *Soit $x = p/q \in [0, 1[$ un rationnel écrit sous forme irréductible, et $q = 2^a q'$ avec q' impair.*

1. *Si $q' = 1$ (x dyadique), $\theta_N(x) = 0$ si et seulement si $N \geq a$.*
2. *Si $q' > 1$, soit r le reste de p modulo q' . Alors $1 \leq r < q'$, r est premier à q' , et pour tout $j \geq 0$,*

$$\theta_{a+j}(x) = \frac{2^j r \bmod q'}{q'}.$$

3. *Dans ce cas, la suite $(\theta_N(x))_N$ a une préperiode exactement égale à a et une période minimale exactement égale à $T = \text{ord}_{q'}(2)$.*

Par transfert, les formules des points 1 et 2 restent vraies pour N et j hyperentiers.

Démonstration. 1. Si $N \geq a$, $2^N x = 2^{N-a} p$ est entier. Si $N < a$, alors p est impair et $2^N x = p/2^{a-N}$ n'est pas entier.

2. Comme p est premier à q , il l'est à q' , donc $r \neq 0$ et $\text{gcd}(r, q') = 1$. On a $2^{a+j} x = 2^j p/q'$, et la partie fractionnaire de $2^j p/q'$ est $(2^j p \bmod q')/q' = (2^j r \bmod q')/q'$.

3. Comme 2 et r sont inversibles modulo q' , on a pour $j, j' \geq 0$:

$$\theta_{a+j}(x) = \theta_{a+j'}(x) \iff 2^j r \equiv 2^{j'} r \pmod{q'} \iff 2^{|j-j'|} \equiv 1 \pmod{q'} \iff T \mid j - j'.$$

À partir du rang a , la suite est donc purement périodique, de période minimale T . Pour $N < a$, p est impair et $\theta_N(x) = \text{frac}(p/(2^{a-N} q'))$ a pour dénominateur réduit $2^{a-N} q'$, qui est pair ; or les valeurs du cycle ont pour dénominateur réduit q' , qui est impair. Aucune valeur de rang $N < a$ ne réapparaît donc plus tard : la préperiode est exactement a . $\square$

Exemple 4. Pour $1/12 = 1/(2^2 \cdot 3)$, on trouve $a = 2$ et $T = \text{ord}_3(2) = 2$:

$$\theta_N(1/12) : \quad \frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \underbrace{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \dots$$

Les deux premiers niveaux « consomment » la partie dyadique du dénominateur ; ensuite, la coupure se comporte comme celle de $1/3$.

Remarque 5 (Lecture géométrique de la période). L'égalité $\theta_{N+T}(x) = \theta_N(x)$ signifie qu'après T raffinements, la coupure retombe au même endroit relatif de son grain : la tour des résolutions est *auto-similaire de période T* autour de x . C'est la traduction, dans le langage du grain, du fait que le développement binaire de x se répète par blocs de T chiffres.

3.2 Les cycles de positions

Corollaire 6 (Cycles). *Soit $q' > 1$ impair, et $T = \text{ord}_{q'}(2)$.*

1. *Pour x comme au théorème 3, l'ensemble des positions occupées à partir du rang a ,*

$$C(x) = \{\theta_N(x) : N \geq a\} = \left\{ \frac{k}{q'} : k \in r \langle 2 \rangle \right\},$$

est une classe du sous-groupe $\langle 2 \rangle$ de $(\mathbb{Z}/q'\mathbb{Z})^\times$. Le doublement la parcourt cycliquement.

2. *Les positions admissibles k/q' , avec $\text{gcd}(k, q') = 1$, se répartissent en $\varphi(q')/T$ cycles disjoints, tous de longueur T .*
3. *Si x et y ont des cycles distincts, alors $\theta_N(x) \neq \theta_M(y)$ pour tous N et M , entiers ou hyperentiers : x et y n'occupent jamais la même position dans leur grain, à aucun niveau.*

Démonstration. 1 et 2 découlent du théorème 3 et de la décomposition d'un groupe fini en classes suivant un sous-groupe. Pour 3, si $\theta_N(x) = \theta_M(y)$, le lemme 1 donne $\theta_{N+j}(x) = \theta_{M+j}(y)$ pour tout $j \geq 0$; pour j assez grand, ces valeurs sont dans $C(x) \cap C(y)$, qui serait non vide. Or deux classes distinctes d'un même groupe sont disjointes, et si les parties impaires des dénominateurs diffèrent, les positions de $C(x)$ et de $C(y)$ ont des dénominateurs réduits différents. C'est donc impossible. Le cas hyperentier s'obtient par transfert. $\square$

3.3 Visite complète et conjecture d'Artin

Proposition 7 (Visite complète). *Soit $q' > 1$ impair. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *la coupure de $1/q'$ visite toutes les positions admissibles k/q' , $\text{gcd}(k, q') = 1$;*
2. *il n'y a qu'un seul cycle ;*
3. *2 engendre le groupe $(\mathbb{Z}/q'\mathbb{Z})^\times$, c'est-à-dire $\text{ord}_{q'}(2) = \varphi(q')$.*

Ces conditions imposent que $(\mathbb{Z}/q'\mathbb{Z})^\times$ soit cyclique, donc que q' soit une puissance d'un nombre premier impair. Pour q' premier, elles signifient que 2 est une racine primitive modulo q' ; c'est le cas pour

$$q' = 3, 5, 11, 13, 19, 29, 37, 53, 59, 61, 67, 83, 101, \dots$$

mais pas pour $q' = 7, 17, 23, 31, \dots$

Démonstration. C'est le corollaire 6 : il y a $\varphi(q')/T$ cycles. Un groupe engendré par un élément est cyclique, et $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$, n impair, est cyclique si et seulement si n est une puissance d'un nombre premier. $\square$

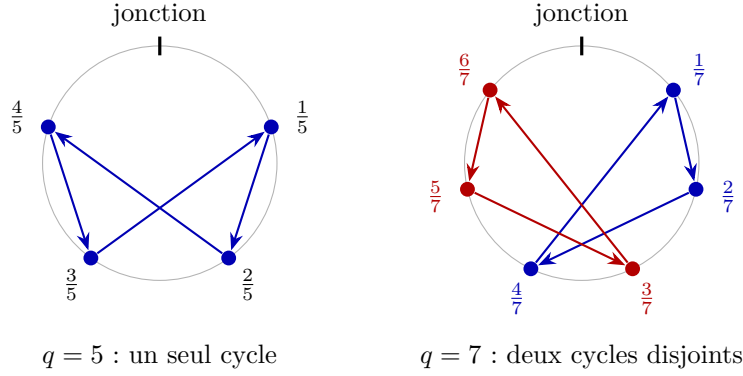


FIGURE 1 – Les positions d’une coupure rationnelle dans son grain. Le cercle représente un grain, dont les deux jonctions sont identifiées au sommet; une flèche est un passage à la résolution suivante (doublement). Pour $q = 5$, la coupure visite toutes les positions admissibles. Pour $q = 7$, les coupures de $1/7$, $2/7$, $4/7$ et celles de $3/7$, $5/7$, $6/7$ vivent sur deux cycles qui ne se rencontrent jamais.

q'	$T = \text{ord}_{q'}(2)$	$\varphi(q')$	cycles	cycles des numérateurs
3	2	2	1	$\{1, 2\}$
5	4	4	1	$\{1, 2, 4, 3\}$
7	3	6	2	$\{1, 2, 4\}, \{3, 6, 5\}$
9	6	6	1	$\{1, 2, 4, 8, 7, 5\}$
11	10	10	1	un cycle de longueur 10
13	12	12	1	un cycle de longueur 12
15	4	8	2	$\{1, 2, 4, 8\}, \{7, 14, 13, 11\}$
17	8	16	2	$\{1, 2, 4, 8, 16, 15, 13, 9\}, \{3, 6, 12, 7, 14, 11, 5, 10\}$
21	6	12	2	$\{1, 2, 4, 8, 16, 11\}, \{5, 10, 20, 19, 17, 13\}$
31	5	30	6	six cycles de longueur 5

TABLE 1 – Périodes et cycles de positions pour les premiers dénominateurs impairs (calcul exact).

Remarque 8 (La conjecture d’Artin). Existe-t-il une infinité de nombres premiers q' pour lesquels la coupure de $1/q'$ visite tout son grain? C’est exactement la conjecture d’Artin (1927) pour la base 2. Elle prédit même que la proportion de tels premiers vaut la constante d’Artin, environ 0,3740. Elle n’est démontrée que sous l’hypothèse de Riemann généralisée [7]. La question « une coupure rationnelle visite-t-elle tout son grain? », posée dans le langage du grain, touche donc un problème ouvert célèbre.

3.4 Lien avec le choix factoriel de n_∞

Remarque 9. Dans [2, th. 18], le choix $n_\infty = H!$, avec H hyperentier illimité, rendait la tour auto-similaire : pour tout rationnel standard p/q de dénominateur impair, $\theta_{kn_\infty}(p/q) = \text{frac}(p/q)$. Le théorème 3 en donne la raison profonde : la période $T = \text{ord}_{q'}(2)$ est un entier standard, donc divise $H!$, et les niveaux kn_∞ tombent tous sur la même phase du cycle. Autrement dit, le choix factoriel est un choix de résolution qui est un *multiple commun de toutes les périodes standard*. Pour un dénominateur pair, la phase est décalée par la

prépériode, ce qui redonne [2, rem. 19].

3.5 La loi des positions

La « distribution » des positions d'un nombre le long de la tour se formalise par les fréquences limites

$$\mu_x(I) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \#\{N < M : \theta_N(x) \in I\}, \quad I \subset [0, 1[\text{ intervalle,}$$

lorsqu'elles existent. Nous l'appelons la *loi des positions* de x .

Proposition 10 (Loi des positions d'un rationnel). *Pour x rationnel non dyadique, la loi des positions existe : c'est la loi uniforme sur les T points du cycle $C(x)$. Pour x dyadique, c'est la masse de Dirac en 0.*

Démonstration. La suite est ultimement périodique de période T et prend une fois chaque valeur de $C(x)$ par période ; les a premiers termes ne comptent pas dans la limite. $\square$

Pour les irrationnels, le point de comparaison est le théorème de Wall [11] : un réel est *normal en base 2* (tous les blocs de k chiffres binaires y ont la fréquence 2^{-k}) si et seulement si la suite $(2^N x)$ est équirépartie modulo 1, c'est-à-dire si et seulement si sa loi des positions est la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$. Par le théorème de Borel [5], presque tout réel est normal.

Coupure	Loi des positions
dyadique	masse de Dirac en 0
rationnelle non dyadique	uniforme sur un cycle de $T = \text{ord}_{q'}(2)$ points
normale (presque tout réel)	mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$
Thue–Morse	portée par $[1/8, 7/8]$ [2, rem. 14]
Liouville $\lambda = \sum_{k \geq 1} 2^{-k!}$	masse de Dirac en 0

TABLE 2 – La loi des positions de quelques coupures.

Remarque 11 (Ce que la loi ne voit pas). Le nombre de Liouville λ a la même loi des positions qu'un dyadique : ses chiffres 1, aux rangs $k!$, ont une densité nulle, donc $\theta_N(\lambda)$ est proche de 0 pour une proportion 1 des niveaux. Pourtant λ est irrationnel, et sa coupure ne tombe jamais sur une jonction. La loi des positions est une information *statistique* ; le critère de rationalité [2, th. 10], qui porte sur la finitude de l'orbite, est une information *exacte*. Les deux se complètent.

4 Couper la droite avec un polynôme

4.1 Le polynôme de coupure et l'entier de coupure

Définition 12 (Coupure polynomiale). Soit $\alpha \in]0, 1[$ un nombre algébrique irrationnel, et $P \in \mathbb{Z}[X]$ son polynôme minimal sur $\mathbb{Z}$: irréductible, de coefficients premiers entre eux, de degré $d \geq 2$. Nous disons que la coupure de α est *polynomiale de degré d* , et que P est son *polynôme de coupure*. Pour N et ℓ entiers ou hyperentiers, l'*entier de coupure* est

$$E_N(\ell) = 2^{Nd} P\left(\frac{\ell}{2^N}\right) = \sum_{i=0}^d c_i \ell^i 2^{N(d-i)}, \quad P = \sum_{i=0}^d c_i X^i.$$

Lemme 13 (L'entier de coupure ne s'annule pas). $E_N(\ell)$ est un entier (un hyperentier si N ou ℓ est hyperentier), et $E_N(\ell) \neq 0$. En particulier $|E_N(\ell)| \geq 1$.

Démonstration. L'expression est un polynôme à coefficients entiers en ℓ et 2^N . Elle est non nulle car P , irréductible de degré $d \geq 2$, n'a pas de racine rationnelle. Le cas hyperentier s'obtient par transfert. $\square$

4.2 Localisation par changement de signe

Proposition 14 (Localisation). Soit $J = [u, v]$ un intervalle standard contenant α et aucune autre racine de P . Pour tout grain $g = [\ell 2^{-N}, (\ell + 1) 2^{-N}]$ contenu dans J , N entier ou hyperentier,

$$\alpha \in g \iff E_N(\ell) E_N(\ell + 1) < 0.$$

Démonstration. Pour N entier. Comme P est irréductible, ses racines sont simples, et P change de signe en α . Si $\alpha \in g$, α est intérieur à g (ce n'est pas une jonction), c'est la seule racine de P dans g , et P prend aux deux extrémités des valeurs non nulles de signes opposés. Si réciproquement $E_N(\ell)$ et $E_N(\ell + 1)$ sont de signes opposés, P a une racine dans $g \subset J$ par le théorème des valeurs intermédiaires, et cette racine est α . Les signes de E_N et de P coïncident. L'énoncé est du premier ordre à paramètres standard (P, u, v) ; il passe aux hyperentiers par transfert. $\square$

Théorème 15 (La dichotomie construit les segments emboîtés). Sous les hypothèses de la proposition 14, soit $g_\ell^N \subset J$ le grain de α au niveau N . Son grain au niveau $N + 1$ est la moitié gauche $g_{2\ell}^{N+1}$ si et seulement si

$$E_N(\ell) E_{N+1}(2\ell + 1) < 0,$$

et la moitié droite sinon. Le $(N + 1)$ -ième chiffre binaire de α vaut donc 0 si et seulement si l'entier de coupure change de signe entre l'extrémité gauche et le milieu du grain. La suite des grains ainsi obtenue est la suite des segments dyadiques adjacents emboîtés de α [2, th. 2].

Démonstration. On a $E_{N+1}(2\ell) = 2^d E_N(\ell)$, de même signe que $E_N(\ell)$. On applique la proposition 14 au grain $g_{2\ell}^{N+1} = [2\ell 2^{-N-1}, (2\ell + 1) 2^{-N-1}]$. $\square$

Couper la droite avec un polynôme, c'est donc exactement localiser la coupure dans la tour des grains par des tests de signe portant sur des entiers : le calcul est *exact* à chaque niveau. Par transfert, il l'est aussi aux niveaux illimités, et c'est la promotion qui produit le point α . On retrouve le schéma de [2, prop. 22] : au niveau des grilles, la coupure tombe dans un grain bien déterminé ; le nombre irrationnel n'apparaît qu'à la promotion.

4.3 Le jacobien de la coupure

Pourquoi une coupure rationnelle est-elle périodique, et une coupure algébrique irrationnelle ne l'est-elle pas ? La proposition suivante montre que la réponse tient au *facteur jacobien* P' du polynôme de coupure : c'est lui qui ramène sur l'axe de départ la structure dyadique, exacte, de l'axe d'arrivée.

Proposition 16 (Formule du jacobien). Soit α une coupure polynomiale de degré d , N entier ou hyperentier, et $\ell = \ell_N(\alpha)$. Il existe ξ entre $\ell 2^{-N}$ et α tel que

$$\theta_N(\alpha) = - \frac{E_N(\ell)}{2^{N(d-1)} P'(\xi)}.$$

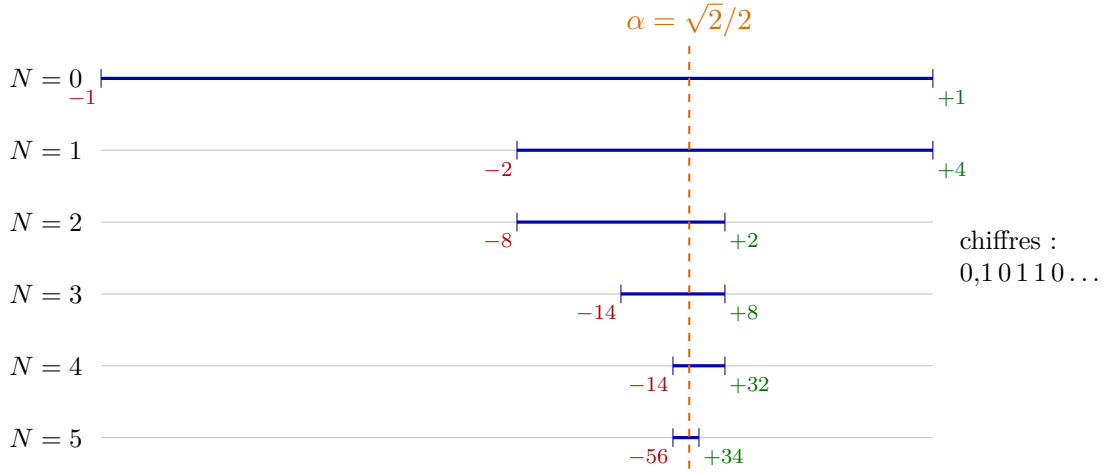


FIGURE 2 – Localisation de $\alpha = \sqrt{2}/2$ par son polynôme de coupure $P = 2X^2 - 1$. Sous chaque extrémité du grain figure l'entier de coupure $E_N(\ell) = 2\ell^2 - 4^N$: il est négatif à gauche et positif à droite, à tous les niveaux.

De plus, si $M_2 = \max_{[0,1]} |P''|$, on a

$$\left| \theta_N(\alpha) + \frac{E_N(\ell)}{2^{N(d-1)} P'(\alpha)} \right| \leq \frac{M_2}{|P'(\alpha)|} 2^{-N}.$$

En particulier, si N est illimité, $\theta_N(\alpha) \simeq -E_N(\ell)/(2^{N(d-1)} P'(\alpha))$.

Démonstration. Par les accroissements finis et $P(\alpha) = 0$, il existe ξ entre $\ell 2^{-N}$ et α tel que $-P(\ell 2^{-N}) = P'(\xi)(\alpha - \ell 2^{-N})$. Le membre de gauche vaut $-E_N(\ell) 2^{-Nd}$, qui est non nul (lemme 13); donc $P'(\xi) \neq 0$. En multipliant par 2^N et en divisant par $P'(\xi)$, on obtient la formule, puisque $\theta_N(\alpha) = 2^N(\alpha - \ell 2^{-N})$.

Pour l'estimation, posons $D = -E_N(\ell)/2^{N(d-1)} = \theta_N(\alpha) P'(\xi)$. Alors

$$\theta_N(\alpha) - \frac{D}{P'(\alpha)} = \theta_N(\alpha) \frac{P'(\alpha) - P'(\xi)}{P'(\alpha)},$$

et $|P'(\alpha) - P'(\xi)| \leq M_2 |\alpha - \xi| \leq M_2 2^{-N}$, tandis que $0 \leq \theta_N(\alpha) < 1$; on a $P'(\alpha) \neq 0$ car la racine α est simple. Le cas hyperentier s'obtient par transfert, et pour N illimité le majorant est infinitésimal. $\square$

La position de la coupure dans son grain est donc le quotient de deux morceaux de nature très différente.

- **Le numérateur est dyadique.** Du côté de l'axe d'arrivée, tout est exact : les images des jonctions, $P(\ell 2^{-N}) = E_N(\ell) 2^{-Nd}$, sont des jonctions de la grille de résolution $-Nd$, et la coupure y tombe en 0, qui est lui-même une jonction (figure 3).
- **Le dénominateur est le jacobien $P'(\xi)$,** infiniment proche de $P'(\alpha)$ aux niveaux illimités. C'est lui qui ramène cette structure dyadique sur l'axe de départ.

Corollaire 17 (Le degré 1 : jacobien rationnel et constant). *Pour un rationnel p/q , de polynôme de coupure $qX - p$, le jacobien est la constante rationnelle q et la formule est exacte :*

$$\theta_N(p/q) = -\frac{E_N(\ell)}{q} = \frac{2^N p - q \ell}{q} \in \left\{0, \frac{1}{q}, \dots, \frac{q-1}{q}\right\}.$$

C'est exactement ce qui force la périodicité (théorème 3).

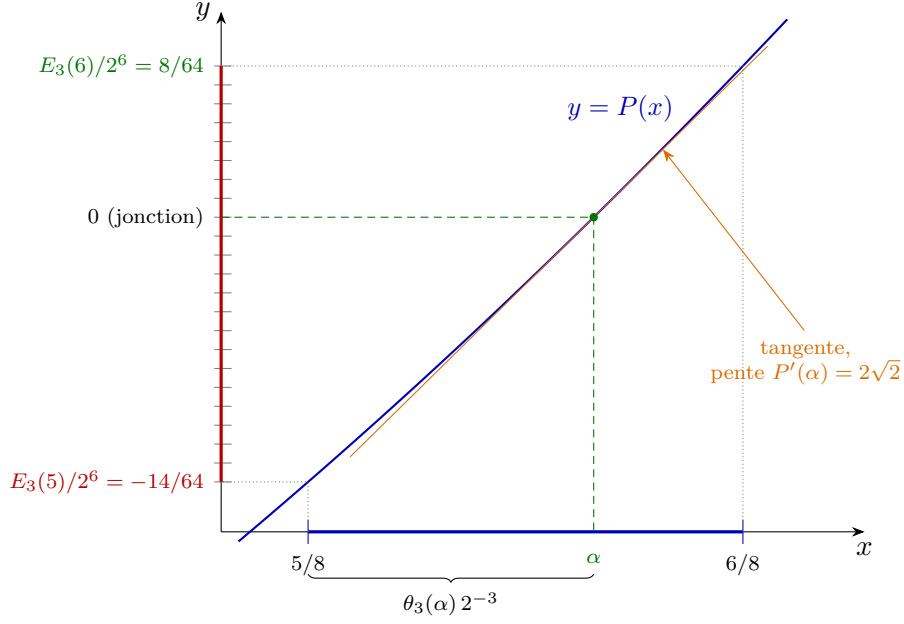


FIGURE 3 – Le jacobien de la coupure, pour $\alpha = \sqrt{2}/2$, $P = 2X^2 - 1$ et $N = 3$. Le grain $[5/8, 6/8]$ de l’axe de départ a pour image, sur l’axe d’arrivée, le segment $[-14/64, 8/64]$, dont les extrémités sont des jonctions de la grille de résolution -6 (graduations). La coupure y tombe en 0, qui est une jonction. Ramenée sur l’axe de départ par la pente P' , elle devient la position $\theta_3(\alpha) \approx 0,657$, qui n’a rien de dyadique.

Démonstration. Pour $d = 1$, $P' \equiv q$, $P'' \equiv 0$, et $2^{N(d-1)} = 1$. Le numérateur $2^N p - q\ell$ est un entier, et $0 \leq \theta_N < 1$. $\square$

Lemme 18 (Pour $d \geq 2$, le jacobien est irrationnel). *Si α est une coupure polynomiale de degré $d \geq 2$, alors $P'(\alpha) \notin \mathbb{Q}$.*

Démonstration. Si $P'(\alpha) = r \in \mathbb{Q}$, alors α est racine de $P' - r$, polynôme à coefficients rationnels de degré exactement $d - 1 \geq 1$ (son coefficient dominant est $dc_d \neq 0$). Cela contredit la minimalité de P , de degré d . $\square$

Le jacobien d’une coupure de degré $d \geq 2$ produit donc deux effets.

1. **Il est irrationnel** (lemme 18). C’est l’effet décisif, et c’est le mécanisme de l’article sur la réflexivité, où un facteur jacobien irrationnel rendait deux grilles incommensurables [3, prop. 11]. Ici, la grille fine de l’axe d’arrivée, ramenée par le facteur $1/P'(\alpha)$, ne s’emboîte pas dans la grille dyadique de l’axe de départ.
2. **Il varie dans le grain.** C’est la courbure de P , c’est-à-dire la stratification fonctionnelle non uniforme [1, th. 62]. Elle n’ajoute qu’une correction de l’ordre de 2^{-N} , infinitésimale aux niveaux illimités (proposition 16).

Remarque 19 (Portée de la formule). La formule du jacobien n’est pas une nouvelle démonstration de l’absence de période : un quotient par un irrationnel peut très bien ne prendre qu’un nombre fini de valeurs si le numérateur s’y prête, et c’est le critère de rationalité [2, th. 10] qui exclut la période. La formule montre où se perd l’arithmétique dyadique : dans le passage par le jacobien. Elle ne dit rien, en revanche, de la *répartition* des positions : savoir si le quotient « dyadique sur irrationnel » parcourt uniformément le grain, c’est la conjecture de Borel (section 5).

N	$\theta_N(\alpha)$ exact	$-E_N(\ell)/(2^N P'(\alpha))$	écart	borne $\frac{M_2}{ P'(\alpha) } 2^{-N}$
3	0,656854	0,618718	$3,8 \cdot 10^{-2}$	$1,8 \cdot 10^{-1}$
5	0,627417	0,618718	$8,7 \cdot 10^{-3}$	$4,4 \cdot 10^{-2}$
10	0,077344	0,077340	$4,1 \cdot 10^{-6}$	$1,4 \cdot 10^{-3}$
20	0,200189465	0,200189438	$2,7 \cdot 10^{-8}$	$1,3 \cdot 10^{-6}$
40	0,868721268	0,868721268	$4,9 \cdot 10^{-13}$	$1,3 \cdot 10^{-12}$

TABLE 3 – La formule du jacobien pour $\alpha = \sqrt{2}/2$ ($d = 2$, $P'(\alpha) = 2\sqrt{2}$, $M_2 = 4$), calculée exactement. L'écart reste sous la borne de la proposition 16 et décroît comme 2^{-N} .

4.4 L'inégalité de Liouville dans le grain

Théorème 20 (Liouville). *Soit α une coupure polynomiale de degré d , et $M = \max\{|P'(t)| : |t - \alpha| \leq 1\}$. Posons $c = \min(1, 1/M)$, constante standard strictement positive. Pour tous N et ℓ , entiers ou hyperentiers,*

$$\left| \alpha - \frac{\ell}{2^N} \right| \geq c 2^{-Nd}, \quad \text{donc} \quad \delta_N(\alpha) \geq c 2^{-N(d-1)}.$$

Démonstration. Si $|\alpha - \ell 2^{-N}| \geq 1$, l'inégalité est vraie car $c 2^{-Nd} \leq 1$. Sinon, par les accroissements finis et $P(\alpha) = 0$,

$$\left| P\left(\frac{\ell}{2^N}\right) \right| \leq M \left| \alpha - \frac{\ell}{2^N} \right|.$$

Or, par le lemme 13, $|P(\ell 2^{-N})| = |E_N(\ell)| 2^{-Nd} \geq 2^{-Nd}$. D'où $|\alpha - \ell 2^{-N}| \geq 2^{-Nd}/M \geq c 2^{-Nd}$. Enfin, $\delta_N(\alpha) 2^{-N}$ est la distance de α à la jonction la plus proche. Le passage aux hyperentiers se fait par transfert. $\square$

La démonstration est entièrement « granulaire » : elle repose sur le seul fait que l'entier de coupure est un entier non nul. Le degré d y apparaît comme la taille, Nd chiffres binaires, de l'entier qu'il faut calculer pour localiser la coupure au niveau N .

4.5 Le théorème de Ridout

L'exposant $d-1$ du théorème 20 n'est pas optimal. Le théorème de Roth [10] et son extension par Ridout [9] aux dénominateurs formés de nombres premiers fixés donnent beaucoup mieux lorsque les dénominateurs sont des puissances de 2.

Théorème 21 (Ridout, forme dyadique). *Soit α algébrique irrationnel et $\varepsilon > 0$ standard. Il existe un entier standard N_0 tel que, pour tout $N \geq N_0$, entier ou hyperentier, et tout ℓ ,*

$$\left| \alpha - \frac{\ell}{2^N} \right| > 2^{-N(1+\varepsilon)}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \delta_N(\alpha) > 2^{-\varepsilon N}.$$

Démonstration. Le théorème de Ridout [9] affirme qu'il n'y a qu'un nombre fini de fractions irréductibles $p/2^n$ telles que $|\alpha - p/2^n| < 2^{-n(1+\varepsilon/2)}$. Supposons qu'il existe une infinité d'entiers N et, pour chacun, un ℓ_N avec $|\alpha - \ell_N 2^{-N}| \leq 2^{-N(1+\varepsilon)}$. Écrivons $\ell_N 2^{-N} = p/2^n$ sous forme irréductible, avec $n \leq N$. Si $n \geq 1$, on a $|\alpha - p/2^n| \leq 2^{-n(1+\varepsilon)} < 2^{-n(1+\varepsilon/2)}$, donc $p/2^n$ appartient à l'ensemble fini de Ridout ; si $n = 0$, p est un entier, et $|\alpha - p| \geq \min(\alpha, 1-\alpha)$. Dans tous les cas, la fraction $p/2^n$ appartient à un ensemble fini F de nombres distincts de α . Or une fraction fixée de F ne peut convenir que pour un nombre fini de N , puisque

$2^{-N(1+\varepsilon)} \rightarrow 0$. Il n'y a donc qu'un nombre fini de tels N , contradiction. L'entier N_0 fourni est standard, car l'énoncé ne fait intervenir que des paramètres standard ; l'inégalité passe aux hyperentiers par transfert. $\square$

Corollaire 22. *À tout niveau illimité N et pour tout $\varepsilon > 0$ standard, $\delta_N(\alpha) > 2^{-\varepsilon N}$: une coupure algébrique irrationnelle peut s'approcher des jonctions de son grain, mais moins vite que toute exponentielle de la résolution.*

Remarque 23. Le théorème de Ridout est *ineffectif* : sa démonstration ne fournit pas N_0 . Le théorème 20, plus faible, est effectif.

4.6 Une coupure de Liouville

Proposition 24 (La coupure de λ frôle les jonctions). *Soit $\lambda = \sum_{k \geq 1} 2^{-k!}$. Pour tout $n \geq 2$, au niveau $N = n!$,*

$$\delta_N(\lambda) < 2^{1-nN}.$$

En conséquence, λ n'est ni rationnel ni algébrique.

Démonstration. Pour $N = n!$, les termes $k \leq n$ de $2^N \lambda$ sont entiers, donc

$$\theta_N(\lambda) = \sum_{k > n} 2^{n!-k!} < 2 \cdot 2^{n!-(n+1)!} = 2^{1-n \cdot n!} = 2^{1-nN},$$

car les exposants $n! - k!$ décroissent au moins de 1 à chaque terme. Comme $n \geq 2$, on a $\theta_N(\lambda) < 2^{-3} < 1/2$, donc $\delta_N(\lambda) = \theta_N(\lambda)$. Pour $\varepsilon > 0$ standard et $n > 1 + \varepsilon$, on a $\delta_{n!}(\lambda) < 2^{-\varepsilon n!}$ pour une infinité de n , ce qui contredit le théorème 21 si λ est algébrique irrationnel, et la proposition 13 de [2] si λ est rationnel (λ n'est pas dyadique, puisqu'il a une infinité de chiffres 1). $\square$

4.7 La hiérarchie des quasi-trous

En réunissant [2, prop. 13], les théorèmes 20 et 21 et la proposition 24, on obtient une classification des coupures par la façon dont elles s'approchent des jonctions de leur grain (tableau 4 et figure 4).

Coupure	Écart relatif aux jonctions
dyadique	$\delta_N = 0$ dès que $N \geq a$
rationnelle non dyadique p/q	$\delta_N \geq 1/q$: quasi-trou uniforme
algébrique irrationnelle de degré d	$\delta_N \geq c 2^{-N(d-1)}$ (Liouville) ; $\delta_N > 2^{-\varepsilon N}$ pour $N \geq N_0$ (Ridout)
de Liouville, $\lambda = \sum 2^{-k!}$	$\delta_{n!} < 2^{1-n \cdot n!}$: la coupure frôle les jonctions

TABLE 4 – La hiérarchie des quasi-trous.

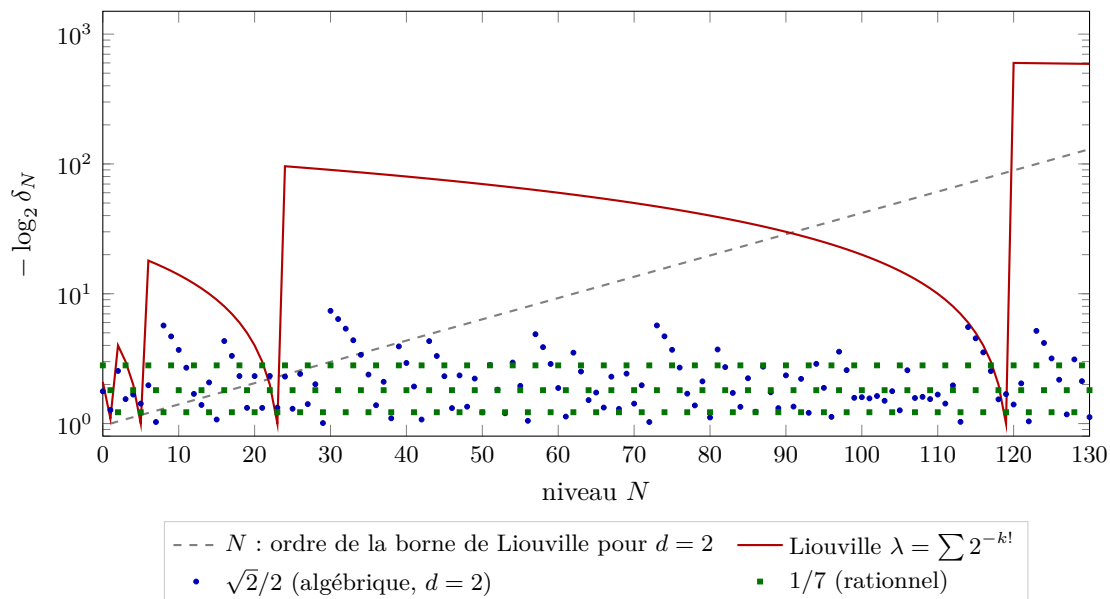


FIGURE 4 – La hiérarchie des quasi-trous, calculée exactement pour $0 \leq N \leq 130$. Plus $-\log_2 \delta_N$ est grand, plus la coupure est proche d’une jonction. Pour $1/7$, les valeurs parcourent le cycle $\{2,81; 1,81; 1,22\}$. Pour $\sqrt{2}/2$, elles restent petites (au plus 7,4 ici) et passent sous la droite N dès les premiers niveaux. Pour λ , elles culminent en $N = n!$ à la valeur nN (18 en $N = 6$, 96 en $N = 24$, 600 en $N = 120$), puis décroissent d’une unité par niveau jusqu’au pic suivant.

5 Constructibles, radicaux et positions

5.1 La hiérarchie des coupures polynomiales

Notons $\mathcal{C}$ l’ensemble des réels constructibles à la règle et au compas, $\mathcal{R}$ celui des réels exprimables par radicaux, et $\mathcal{A}$ celui des réels algébriques. On a les inclusions strictes

$$\mathbb{Q} \subsetneq \mathcal{C} \subsetneq \mathcal{R} \subsetneq \mathcal{A} \subsetneq \mathbb{R},$$

illustrées par les coupures suivantes :

- $\sqrt{2}/2 \in \mathcal{C} \setminus \mathbb{Q}$, de polynôme de coupure $2X^2 - 1$;
- $\sqrt[3]{2} - 1 \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{C}$, de polynôme de coupure $(X + 1)^3 - 2$: son degré 3 n’est pas une puissance de 2 (Wantzel [12]) ;
- la racine réelle de $X^5 - X - 1$, diminuée de 1, est dans $\mathcal{A} \setminus \mathcal{R}$: le groupe de Galois de $X^5 - X - 1$ est S_5 , qui n’est pas résoluble ;
- $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{A}$ (proposition 24).

Dans le langage du grain, cette hiérarchie est une hiérarchie des *tests* qui localisent la coupure : un test de degré 1 pour un rationnel ; pour un constructible, des tests de degré 2 itérés le long d’une tour d’extensions quadratiques ; pour un radical, des tests de la forme $X^n - a$; pour un algébrique quelconque, un test de degré quelconque ; et aucun test polynomial pour un transcendant.

5.2 Le degré se voit dans le test, pas dans la position

Le degré d’une coupure polynomiale est visible à deux endroits : dans la taille de l’entier de coupure $E_N(\ell)$, qui a de l’ordre de Nd chiffres binaires, et dans l’exposant $d - 1$ de l’inégalité de Liouville. Mais le théorème 21 efface le degré de la borne optimale : du point de

vue des quasi-trous, tous les algébriques irrationnels se comportent de la même façon, quel que soit leur degré.

Il en va très probablement de même de la loi des positions.

Conjecture 25 (Borel [6]). *Tout nombre algébrique irrationnel est normal en base 2.*

Proposition 26 (Reformulation dans le langage du grain). *La conjecture 25 équivaut à l'énoncé suivant : pour toute coupure algébrique irrationnelle $\alpha \in]0, 1[$, les positions $\theta_N(\alpha)$ sont équiréparties dans le grain. Si elle est vraie, tous les nombres de $\mathcal{A} \setminus \mathbb{Q}$ ont pour loi des positions la mesure de Lebesgue, et aucune statistique des positions ne sépare $\mathcal{C}$, $\mathcal{R}$ et $\mathcal{A}$.*

Démonstration. C'est le théorème de Wall [11], appliqué à chaque α . $\square$

La conjecture est grande ouverte. On ne sait même pas si $\sqrt{2}$ a asymptotiquement autant de chiffres binaires 0 que de 1. Le meilleur résultat général connu [4] affirme que, pour α algébrique irrationnel de degré d , le nombre de chiffres 1 parmi les N premiers est au moins de l'ordre de $N^{1/d}$. Dans le langage du grain : parmi les N premiers niveaux, la coupure tombe dans la moitié droite de son grain, $\theta \geq 1/2$, au moins de l'ordre de $N^{1/d}$ fois.

5.3 Un test numérique

Nous avons calculé exactement, en arithmétique entière, les chiffres binaires de quatre coupures algébriques de classes différentes et de la coupure de Liouville, par la méthode du théorème 15 ou par racine entière (tableau 5). La plus longue série R de chiffres égaux contrôle le quasi-trou : $-\log_2 \delta_N \leq R + 1$ pour les niveaux considérés.

Coupure	Classe	Niveaux	Fréq. des 1	χ^2	R
$\sqrt{2}$	$\mathcal{C}$	20 000	0,502	8,9	15
nombre d'or	$\mathcal{C}$	20 000	0,502	2,5	13
$\sqrt[3]{2}$	$\mathcal{R} \setminus \mathcal{C}$	20 000	0,495	7,9	16
racine de $X^5 - X - 1$	$\mathcal{A} \setminus \mathcal{R}$	6 000	0,497	1,4	13
$\lambda = \sum 2^{-k!}$	$\mathbb{R} \setminus \mathcal{A}$	20 000	0,0003	139 707	14 960

TABLE 5 – Statistiques des positions. La colonne χ^2 teste l'équirépartition des blocs de trois chiffres, c'est-à-dire des positions θ_N dans les huitièmes du grain ; le seuil à 5 %, pour 7 degrés de liberté, est 14,07. Les quatre algébriques sont indiscernables ; seule la coupure de Liouville se distingue.

Ce test ne prouve rien, mais il illustre la proposition 26 : la constructibilité est une propriété du *corps* engendré par le nombre, tandis que la position θ_N est une propriété *dynamique et diophantienne*. Les grains voient la seconde, pas la première.

Question ouverte 27. Les coupures algébriques irrationnelles sont-elles équiréparties dans leurs grains ? Plus modestement : la coupure de $\sqrt{2}/2$ tombe-t-elle dans la moitié droite de son grain pour une proportion strictement positive des niveaux ?

6 Conclusion

Les positions d'une coupure dans ses grains, suivies à travers la tour des résolutions, portent trois informations de nature différente.

1. **Une information exacte : l'orbite.** Elle est finie pour un rationnel [2, th. 10], avec une préperiode égale à l'exposant de 2 dans le dénominateur et une période égale à $\text{ord}_q(2)$ (th. 3). Les positions se répartissent en cycles disjoints ; un rationnel visite tout son grain exactement quand 2 est racine primitive, ce qui mène à la conjecture d'Artin (prop. 7).
2. **Une information diophantienne : le quasi-trou.** La façon dont la coupure s'approche des jonctions sépare les dyadiques, les rationnels, les algébriques et les nombres de Liouville (tableau 4). Couper avec un polynôme localise la coupure par le signe d'un entier (th. 15) ; la position dans le grain est un nombre dyadique divisé par le jacobien P' , rationnel en degré 1 et irrationnel au-delà (prop. 16, cor. 17, lemme 18) ; et l'inégalité de Liouville devient le simple fait qu'un entier non nul est au moins 1 (th. 20).
3. **Une information statistique : la loi des positions.** Elle est uniforme sur un cycle pour un rationnel, et de Lebesgue pour presque tout réel. Qu'elle soit de Lebesgue pour tous les algébriques irrationnels est la conjecture de Borel (prop. 26).

Les classes $\mathcal{C}$, $\mathcal{R}$ et $\mathcal{A}$ se lisent dans le polynôme de coupure, c'est-à-dire dans le test qui localise la coupure ; elles ne se lisent très probablement pas dans les positions. Ce contraste prolonge le fil de nos travaux : la grille porte une structure exacte et discrète, l'orbite et l'entier de coupure, et la question de ce qui en survit statistiquement touche ici certains des problèmes ouverts les plus profonds de la théorie des nombres.

Références

- [1] H. Genvrin, *Théorie du grain*, manuscrit, 2026.
- [2] H. Genvrin, *Théorie des coupures et théorie du grain*, manuscrit, 2026.
- [3] H. Genvrin, *Le paradoxe de la réflexivité dans la théorie du grain*, manuscrit, 2026.
- [4] D. H. Bailey, J. M. Borwein, R. E. Crandall, C. Pomerance, « On the binary expansions of algebraic numbers », *Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux* 16 (2004), 487–518.
- [5] É. Borel, « Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques », *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* 27 (1909), 247–271.
- [6] É. Borel, « Sur les chiffres décimaux de $\sqrt{2}$ et divers problèmes de probabilités en chaîne », *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 230 (1950), 591–593.
- [7] C. Hooley, « On Artin's conjecture », *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 225 (1967), 209–220.
- [8] J. Liouville, « Sur des classes très étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationnelles algébriques », *Journal de mathématiques pures et appliquées* 16 (1851), 133–142.
- [9] D. Ridout, « Rational approximations to algebraic numbers », *Mathematika* 4 (1957), 125–131.
- [10] K. F. Roth, « Rational approximations to algebraic numbers », *Mathematika* 2 (1955), 1–20.
- [11] D. D. Wall, *Normal numbers*, thèse, Université de Californie à Berkeley, 1949.
- [12] P. L. Wantzel, « Recherches sur les moyens de reconnaître si un problème de géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas », *Journal de mathématiques pures et appliquées* 2 (1837), 366–372.
- [13] A. Robinson, *Non-standard Analysis*, North-Holland, 1966.