

Applications du programme du grain

*Théorie de l'information, dynamique,
moteur sémantique, matière, mécanique quantique,
jauges, Möbius et fibrations*

Hugues Genvrin

September 10, 2026

Avant-propos

Ce volume rassemble quatre applications du *programme du grain* à des domaines distincts, chacune développée comme un chapitre autonome mais reliée aux autres par un même fil conducteur : *une réduction fondamentale est un quotient qui oublie une profondeur, et ce qui se mesure se mesure en bits, strate par strate*. Ce travail a été mené avec l'IA Claude, Opus 4.8 d'Anthropic.

Le chapitre **Théorie de l'information** pose les fondations : information de Hartley, néguentropie de composition (relative), entropie stratale du continu, information d'une forme, et le paradoxe du continu résolu par le grain. Le chapitre **Dynamique** passe au temps : déformation informationnelle, relation fondamentale de la dynamique généralisée et sa tour de dérivées, complexité dynamique et chaos. Le chapitre **Moteur sémantique** définit et incarne le moteur sémantique (saturation de la tour, exemple de la tique de Von Uexküll). Le chapitre **Matière** relie enfin l'information à la matière par l'énergie (les deux maillons, Landauer, la chaîne de la symétrie à la déformation).

Méthode. Chaque affirmation porte un nombre calculable ; là où un mot chargé n'a pas de grandeur mesurable, il reste une métaphore — et les passages spéculatifs sont explicitement signalés comme tels.

Table des matières

Avant-propos	i
1 Théorie de l'information	1
1.1 Conventions et rappels	1
1.2 De Hartley à Shannon par la composition	1
1.3 Les deux néguentropies	3
1.3.1 Néguentropie de biais	3
1.3.2 Néguentropie de composition	3
1.4 Le paradoxe apparent	3
1.4.1 Axe 1 — en $\Pr$: convexité (à niveau fixé)	4
1.4.2 Axe 2 — en k : la corrélation, croissante concave, saturante	4
1.4.3 La structure de selle	5
1.4.4 Portée	5
1.5 Le pont : une seule variation d'espérance de Hartley	6
1.5.1 Le modèle probabiliste commun	6
1.5.2 Axe vertical : raffinement emboîté	6
1.5.3 Axe horizontal : test d'indépendance	7
1.5.4 Synthèse : deux projections d'un même principe	7
1.5.5 Mesure sur l'ADN	7
1.6 Bornitude de la néguentropie de composition	8
1.7 Convexité de la néguentropie de composition	9
1.8 Asymétrie composition / décomposition	9
1.9 L'oscillateur informationnel	9
1.10 Entropie stratale du continu	10
1.11 Information d'une forme	11
1.12 Le paradoxe du continu	12
1.13 Lecture spectrale de la déformation informationnelle	17
1.13.1 Déformation multiplicative d'un signal	18
1.13.2 Le logarithme sépare, Fourier isole	18
1.13.3 Lien avec l'analyse cepstrale	19
1.13.4 Conditions de validité	19
1.13.5 Portée et limites	20
1.14 Le cepstre-déformation comme néguentropie de composition	20
1.14.1 Rappel : deux objets déjà établis	20
1.14.2 Le résultat	20
1.14.3 Lecture cepstrale : la néguentropie par échelle	21
1.14.4 Vérification numérique	21
1.14.5 Portée et limites	22

2	Dynamique	23
	I. Déformation informationnelle sous une application	27
2.1	Information de Hartley sur un domaine continu	27
2.2	La déformation informationnelle	27
2.3	La loi de réciproque	28
2.4	Additivité en chaîne	28
2.5	Vérifications numériques	28
2.6	Portée et limites	29
	II. RFDG et tour de dérivées temporelles	29
2.7	Rappel : la RFDG	29
2.8	La cascade itérée	30
2.9	Le critère d'action récursif	30
2.10	Les dimensions : une précision subordonnée, non une objection	31
2.11	La fermeture : quand la tour retombe sur elle-même	31
2.12	Récupération de l'oscillateur informationnel	31
2.13	Portée et limites	32
	III. Néguentropie de composition et RFDG itérée	32
2.14	La tour comme système de composantes	32
2.15	Saturation au rang de fermeture	33
2.16	Les trois régimes	33
2.17	Vérification numérique	33
2.18	Le moteur sémantique, défini	34
2.19	Portée	34
	IV. Complexité dynamique et chaos	34
2.20	Correction préalable : chaos et déterminisme	35
2.21	La hiérarchie des régimes par l'ordre de fermeture	35
2.22	Le pont avec Takens : la tour est un plongement	35
2.23	La limite : non-saturation $\neq$ chaos	36
2.24	Vérification numérique	36
2.25	Portée	37
3	Moteur sémantique	39
	I. Le moteur sémantique, défini	39
3.1	La tour comme système de composantes	39
3.2	Saturation au rang de fermeture	39
3.3	Les trois régimes	40
3.4	Vérification numérique	40
3.5	Le moteur sémantique, défini	41
3.6	Portée	41
	II. Le moteur à deux axes : la tique	41
3.7	Ce que la définition initiale manquait	41
3.8	Les deux axes	42
3.9	Exemple travaillé : la tique de Von Uexküll	42
3.10	Distinction : profondeur vs répétition	43
3.11	Garde-fou : illustration, non validation	43
3.12	Portée	43
4	Matière	45
	I. Maillon 2 : la déformation engendre des forces	45
4.1	Cadre : la mécanique des milieux continus	45
4.2	Déformation $\Rightarrow$ contraintes	45
4.3	Contraintes $\Rightarrow$ forces	46

4.4	Ce que ce maillon établit — et ce qu'il ne dit pas	46
4.5	Portée	46
II.	Maillon 1 : information et énergie (Landauer)	47
4.6	Pourquoi la voie mathématique échoue	47
4.7	Le principe de Landauer	47
4.8	Le pont : néguentropie de composition $\rightarrow$ énergie libre	47
4.9	Du potentiel à la force : jonction avec le maillon 2	48
4.10	Ordres de grandeur : le mécanisme est microscopique	48
4.11	Portée et limites	49
III.	De la symétrie à la déformation	49
4.12	Vue d'ensemble : la chaîne	49
4.13	Maillon 1 — Klein : la brisure de symétrie est une force sémantique	49
4.14	Maillon 2 — La brisure fait varier la néguentropie (Burnside)	50
4.15	Maillon 3 — Landauer : la néguentropie devient énergie libre	51
4.16	Maillon 4 — Déformation : le gradient de l'énergie libre	51
4.17	Ce que la chaîne établit — et ses garde-fous	52
IV.	Note spéculative : néguentropie et forces fondamentales	52
5	La mécanique quantique dans le programme du grain	55
5.1	Le substrat géométrique : le grain et ses sphères de directions	56
5.1.1	Le grain à une résolution stratale	56
5.1.2	Trois objets à ne pas confondre	56
5.1.3	Le cas $d = 2$: disque et cercle	57
5.1.4	Généralisation à la sphère S^n	57
5.1.5	Synthèse	58
5.2	L'espace des états d'un qubit : la sphère de Bloch stratale	58
5.2.1	Rappel : le corps complexe stratal	58
5.2.2	L'espace d'un qubit : $\tilde{\mathbb{C}}^2$	59
5.2.3	La sphère des états normalisés : S^3	59
5.2.4	Le quotient par la phase : la fibration de Hopf	59
5.2.5	Coordonnées de Bloch	60
5.2.6	Schéma	60
5.2.7	Synthèse	60
5.3	Premier postulat : la superposition	61
5.3.1	Énoncé	61
5.3.2	Action d'un coefficient : rotation-dilatation stratale	61
5.3.3	Normalisation et localisation de l'interférence	61
5.3.4	Synthèse	62
5.4	Second postulat : les observables	62
5.5	Énoncé	63
5.6	Spectre réel et base propre	63
5.7	Lecture géométrique : déformation de la sphère	63
5.8	Localisation stratale du spectre	64
5.9	Synthèse	64
5.10	La fonction d'onde et la règle de Born	65
5.10.1	La fonction d'onde comme objet stratal	65
5.10.2	Le caractère probabiliste par cardinalité stratale	65
5.10.3	La règle de Born : émergence du carré	65
5.10.4	Pourquoi le carré, et pas une autre puissance	66
5.11	La mesure comme projection stratale irréversible	66
5.11.1	Le mécanisme	66
5.11.2	L'effondrement comme élimination de la phase	66

5.11.3	Relecture : un changement d'échelle, non un effondrement objectif	66
5.12	Perspectives : dynamique et indétermination	67
5.12.1	L'évolution unitaire comme rotation sur le cercle	67
5.12.2	Le principe d'indétermination et l'invariant stratal	67
5.13	La limite classique : promotion et principe de correspondance	67
5.13.1	La promotion stratale	67
5.13.2	Le principe de correspondance	68
5.13.3	Le motif commun	68
5.13.4	Garde-fous : trois différences de nature	68
6	Les jauges	71
	Partie I — Théorie des jauges	77
6.1	Pragmatisme versus universalité	77
6.2	Formalisation algébrique	77
6.2.1	Relations d'ordre génériques	77
6.2.2	Jauges	78
6.2.3	Sphère et finesse	78
6.2.4	Morphismes et portabilité du jaugeage	78
6.3	Stratification de la construction d'une jauge	79
6.3.1	Couche ensembliste : congruence, égalité, méisme	80
6.3.2	Le quantum et sa dimension	80
6.3.3	Couche topologique	80
6.3.4	Couche analytique : la jauge par quantification réelle	80
6.3.5	Couches différentielle et métrique	81
	Partie II — Applications	85
6.4	Le photon	85
6.5	La déformation moléculaire	86
6.6	La boucle adaptative en biologie	86
	Partie III — Jauges et déformation informationnelle	91
6.7	Le point à corriger : coût axiomatique vs coût de contenu	91
6.8	Le dictionnaire jauge $\leftrightarrow$ grain	91
6.9	Le résultat central : chute de finesse = annulation du jacobien	92
6.10	Vérification numérique	92
6.11	Ce que le pont apporte aux deux théories	93
6.12	Portée et limites	93
7	Le ruban de Möbius du flot symétrique	95
	Introduction	95
7.1	Le Möbius projectif du flot symétrique	95
7.1.1	Les objets promus	95
7.1.2	La fermeture projective	95
7.1.3	Le ruban de Möbius	96
7.1.4	Le flot symétrique comme bord	96
7.2	Niveaux de Möbius : échelle, retournement, cardinal	97
7.2.1	La largeur indexée par un niveau	97
7.2.2	Deux invariants distincts	97
7.2.3	La hiérarchie de cardinal, lue par le logarithme	97
7.3	Découpe du ruban de Möbius projectif	98
7.3.1	Remarque de notation	98
7.3.2	La bande et ses deux lignes médianes	98
7.3.3	La découpe transversale	98
7.4	ADN et ruban de Möbius	99

7.4.1	Trois niveaux à ne pas confondre	99
7.4.2	Faits établis (topologie de l'ADN)	99
7.4.3	Analogie légitime	99
7.4.4	La limite chimique	99
7.4.5	Le pont avec le programme du grain reste à construire	99
	Conclusion du chapitre	100
	Références	100
8	Fibrés du grain : la fibre de O et le fibré de la rectification	101
	Introduction	101
8.1	La fibre au-dessus du point O	101
8.1.1	Le bon objet : un fibré, pas un point surpuissant	102
8.1.2	La promotion est la projection du fibré	102
8.1.3	Ce qui était faux, ce qui est vrai	102
8.2	Le fibré de la rectification au-dessus de S^1	103
8.2.1	Le fibré	103
8.2.2	Avant et après promotion	103
8.2.3	Cardinal total	103
8.3	Synthèse : le fibré, motif du programme	104
	Conclusion du chapitre	104

Chapter 1

Théorie de l'information

Résumé du chapitre. On applique la théorie du grain à la théorie de l'information, en version détaillée : chaque résultat est démontré ligne à ligne, chaque valeur numérique est calculée et le code qui la produit est donné. On part de la *composition* (regroupement des symboles en sous-segments) reliant l'information de Hartley $\log_2 N$ à l'entropie de Shannon et faisant apparaître la *néguentropie de composition* $\Delta\mathbb{E} = -\mathcal{H}$. On distingue rigoureusement les deux néguentropies (biais, composition), on les unifie par un lemme-charnière ($\mathbb{E} = \log_2 N - \mathcal{H}$) en un *pont* à deux axes, puis on établit leurs propriétés (bornitude, convexité) et l'asymétrie composition/décomposition. On dérive un *oscillateur informationnel*. On applique enfin l'appareil au continu : entropie stratale $m + h$, information portée par la *bordure* d'une forme, et le *paradoxe du continu* résolu par le grain. Les analogies de forme sont signalées comme telles et ne sont jamais promues en identités. On clôturera ce chapitre par une analyse spectrale de la déformation informationnelle et une étude du cepstre comme néguentropie de composition informationnelle.

1.1 Conventions et rappels

Toutes les informations sont en base 2 (unité : le bit) ; on écrit systématiquement $\log_2$. Deux identités à ne pas confondre :

$$\log_2 X - \log_2 Y = \log_2 \frac{X}{Y} \quad (\text{différence}), \quad \frac{\log_2 X}{\log_2 Y} = \log_Y X \quad (\text{changement de base}).$$

Seule la différence intervient dans les dérivations qui suivent ; en particulier $\frac{\log_2 X}{\log_2 Y} \neq \ln \frac{X}{Y}$.

Remarque 1.1 (Positivité de l'entropie de Shannon). Pour toute distribution (p_k) sur m issues, $\mathcal{H} = -\sum_k p_k \log_2 p_k \geq 0$, car $0 \leq p_k \leq 1 \Rightarrow \log_2 p_k \leq 0 \Rightarrow -p_k \log_2 p_k \geq 0$. L'entropie est *toujours positive*, et $\mathcal{H}_{\max} = \log_2 m$ (équiprobable) en est la valeur maximale : c'est encore une valeur de l'entropie de Shannon, non un objet d'une autre nature.

Remarque 1.2 (Convention : Hartley d'un cardinal transfini). L'information de Hartley de κ alternatives est $\log_2 \kappa$. Pour κ *fini* c'est le logarithme usuel ; pour κ *infini* on pose par convention (Hartley étendu) $\log_2 \kappa = \kappa$, cohérente avec $\log_2(2^{\aleph_0}) = \aleph_0$. Ce n'est pas une identité analytique — le logarithme d'un cardinal transfini n'est pas défini par l'analyse — mais une convention de mesure, employée uniformément dans tout le chapitre. En particulier $\log_2(\aleph_0) = \aleph_0$.

1.2 De Hartley à Shannon par la composition

Soit un message de N symboles. *Non structuré* (NS) : aucun sous-segment distingué. *Structuré* (S) : partition en sous-segments de tailles $N_1, \dots, N_n$, $\sum_i N_i = N$. On pose $\text{Pr}_i := N_i/N$, d'où $\sum_i \text{Pr}_i = 1$.

Définition 1.3 (Espérance d'information de Hartley).

$$\mathbb{E}_{NS} = \log_2 N, \quad \mathbb{E}_S = \sum_i \text{Pr}_i \log_2 N_i.$$

$\mathbb{E}_{NS}$ est l'information de Hartley du message entier (N alternatives) ; $\mathbb{E}_S$ est l'espérance de l'information de Hartley d'un sous-segment tiré selon Pr .

Théorème 1.4 (Composition et néguentropie). Avec $\text{Pr}_i = N_i/N$,

$$\Delta\mathbb{E} = \mathbb{E}_S - \mathbb{E}_{NS} = -\mathcal{H}(\text{Pr}), \quad \mathcal{H}(\text{Pr}) = -\sum_i \text{Pr}_i \log_2 \text{Pr}_i.$$

Proof. Puisque $\sum_i \text{Pr}_i = 1$, on a $\log_2 N = (\sum_i \text{Pr}_i) \log_2 N = \sum_i \text{Pr}_i \log_2 N$. Donc, en une chaîne d'égalités,

$$\Delta\mathbb{E} = \sum_i \text{Pr}_i \log_2 N_i - \sum_i \text{Pr}_i \log_2 N = \sum_i \text{Pr}_i (\log_2 N_i - \log_2 N) = \sum_i \text{Pr}_i \log_2 \frac{N_i}{N} = \sum_i \text{Pr}_i \log_2 \text{Pr}_i = -\mathcal{H}(\text{Pr}).$$

Chaque étape n'utilise que $\sum \text{Pr}_i = 1$ et l'identité de différence des logarithmes ; aucun changement de base n'est effectué. $\square$

Remarque 1.5 (Piège de signe/base à éviter). On ne peut pas écrire $\sum_i \text{Pr}_i \log_2(N_i/N) = \sum_i \text{Pr}_i \ln \text{Pr}_i$: passer de $\log_2$ à $\ln$ exige le facteur $1/\ln 2$. La dérivation ci-dessus reste *en base 2* d'un bout à l'autre, et le résultat est bien $-\mathcal{H}$ en bits.

Remarque 1.6 (Statut : deux déficits à ne pas confondre). Structurer fait baisser l'espérance de Hartley de $\mathcal{H}(\text{Pr})$. Il faut distinguer deux « déficits », relatifs à deux maximums différents :

- **Déficit de Hartley** : $-\Delta\mathbb{E} = \mathbb{E}_{NS} - \mathbb{E}_S = \mathcal{H}(\text{Pr})$, l'écart au maximum $\mathbb{E}_{NS} = \log_2 N$ (message non structuré). C'est ce que la structuration *retire* à l'espérance de Hartley ; il vaut numériquement l'entropie de Shannon de la partition (théorème 1.4). C'est une néguentropie *au sens de Schrödinger* (déficit à un maximum), mais sa valeur *croît* quand la partition se déséquilibre — ce n'est pas la mesure d'ordre usuelle.
- **Néguentropie relative** (définition 1.7 ci-dessous) : $\mathcal{N}_{\text{compo}} = \log_2 n - \mathcal{H}(\text{Pr})$, l'écart au maximum $\log_2 n$ (partition *équilibrée*). C'est la vraie mesure d'ordre : nulle à l'équilibre, positive et croissante quand la partition se concentre.

L'analogie avec la néguentropie thermodynamique est de *forme* : les bits ne sont pas des JK^{-1} . Aucune identification physique n'est faite.

Définition 1.7 (Néguentropie relative de composition). Pour une partition en n sous-segments de distribution Pr , la *néguentropie relative de composition* est l'écart de l'entropie de partition à son maximum $\log_2 n$ (partition équilibrée) :

$$\boxed{\mathcal{N}_{\text{compo}} = \log_2 n - \mathcal{H}(\text{Pr}) = D_{\text{KL}}(\text{Pr} \parallel u_n) \geq 0,}$$

où $u_n = (1/n, \dots, 1/n)$ est l'uniforme. Elle est nulle ssi la partition est équilibrée, et croît quand Pr se concentre. C'est une divergence de Kullback–Leibler — exactement la forme de la néguentropie de biais, transposée aux tailles de sous-segments.

Remarque 1.8 (Pourquoi c'est la bonne définition). $\mathcal{H}(\text{Pr})$ seule est l'entropie *brute* de la partition, pas un déficit : l'appeler « néguentropie » sans référence à un maximum est un abus. La néguentropie relative $\log_2 n - \mathcal{H}$ corrige cela — elle est un déficit à un maximum (donc une vraie néguentropie), positive, et mesure l'ordre de la partition. C'est cette quantité qu'on adopte désormais sous le nom $\mathcal{N}_{\text{compo}}$ pour la composition en sous-segments.

1.3 Les deux néguentropies

1.3.1 Néguentropie de biais

Définition 1.9 (Néguentropie de biais). Pour une source à m symboles de fréquences (p_k) ,

$$\mathcal{N}_{\text{biais}} = \mathcal{H}_{\text{max}} - \mathcal{H}_{\text{réel}} = \log_2 m - \left(- \sum_k p_k \log_2 p_k \right) = \log_2 m + \sum_k p_k \log_2 p_k.$$

Proposition 1.10 (Forme Kullback–Leibler). En posant l'uniforme $u_k = 1/m$,

$$\mathcal{N}_{\text{biais}} = \sum_k p_k \log_2 \frac{p_k}{1/m} = D_{\text{KL}}(p \| u) \geq 0,$$

avec égalité si et seulement si p est uniforme.

Proof. On factorise $\log_2 m$ via $\sum_k p_k = 1$:

$$\mathcal{N}_{\text{biais}} = \sum_k p_k \log_2 m + \sum_k p_k \log_2 p_k = \sum_k p_k (\log_2 p_k + \log_2 m) = \sum_k p_k \log_2 \frac{p_k}{1/m} = D_{\text{KL}}(p \| u).$$

La positivité et le cas d'égalité sont ceux de la divergence de Kullback–Leibler (inégalité de Gibbs) : $D_{\text{KL}}(p \| u) \geq 0$ avec égalité ssi $p = u$. $\square$

Remarque 1.11 (Pourquoi « biais »). $\mathcal{N}_{\text{biais}}$ mesure l'écart des fréquences à l'équiprobable : nulle sans biais, croissante quand une issue domine. C'est une divergence à l'uniforme, non l'entropie : $\mathcal{N}_{\text{biais}} \neq \mathcal{H}$ en général (elles ne coïncident qu'au cas trivial $m = 1$).

1.3.2 Néguentropie de composition

Définition 1.12 (Néguentropie de composition). Pour un bloc de L positions parallèles $X^1, \dots, X^L$ de loi jointe p et de marginales p_ℓ ,

$$\mathcal{N}_{\text{compo}} = \sum_{\ell=1}^L \mathcal{H}(X^\ell) - \mathcal{H}(X^1, \dots, X^L) = \text{TC}(X^1, \dots, X^L),$$

la *corrélation totale* (information mutuelle multivariée).

Proposition 1.13 (Positivité). $\mathcal{N}_{\text{compo}} \geq 0$, avec égalité ssi les positions sont mutuellement indépendantes.

Proof. $\mathcal{N}_{\text{compo}} = \sum_x p(x) \log_2 \frac{p(x)}{\prod_\ell p_\ell(x_\ell)} = D_{\text{KL}}(p \| \prod_\ell p_\ell) \geq 0$, nulle ssi $p = \prod_\ell p_\ell$ (indépendance). $\square$

Remarque 1.14 (Deux axes orthogonaux). Le biais mesure l'inégalité des fréquences d'une position ; la composition mesure la *dépendance* entre positions. Une source peut avoir l'un sans l'autre : une pièce équilibrée mais « collante » (tirages corrélés) a $\mathcal{N}_{\text{biais}} = 0$, $\mathcal{N}_{\text{compo}} > 0$; un dé truqué lancé indépendamment a $\mathcal{N}_{\text{biais}} > 0$, $\mathcal{N}_{\text{compo}} = 0$. On ne les additionne pas naïvement.

1.4 Le paradoxe apparent

L'objection. La néguentropie de composition est convexe (démontré) ; « convexe » semble dire « dérivée croissante », donc $\Delta^2 > 0$, donc pas de saturation. Pourtant on attend une saturation. Où est l'erreur ?

L'erreur est un *transfert d'axe* : la convexité est établie *en Pr* (la distribution), et on la transporte illégitimement sur la variable k (le niveau). Ce sont deux variables différentes ; la courbure en l'une ne détermine pas la courbure en l'autre. On sépare proprement les deux axes.

1.4.1 Axe 1 — en Pr : convexité (à niveau fixé)

Proposition 1.15 (Convexité en Pr). *À niveau fixé, la néguentropie relative de composition*

$$\mathcal{N}(\text{Pr}) = \log_2 n - \mathcal{H}(\text{Pr}), \quad \mathcal{H}(\text{Pr}) = - \sum_i \text{Pr}_i \log_2 \text{Pr}_i,$$

est strictement convexe sur le simplexe des distributions de tailles.

Proof. $\phi(t) = -t \log_2 t$ a $\phi''(t) = -1/(t \ln 2) < 0$: $\mathcal{H} = \sum_i \phi(\text{Pr}_i)$ est strictement concave. Une constante moins une concave est strictement convexe. $\square$

Remarque 1.16 (Ce que la convexité en Pr dit et ne dit pas). Elle dit : en *mélangeant* deux distributions de tailles (à niveau fixé), la néguentropie est sous la corde. Son minimum est à l'équipartition, elle croît vers les partitions concentrées. Elle ne dit *rien* sur l'évolution quand on change de niveau k : la variable k n'apparaît nulle part dans la preuve (on dérive par rapport à Pr_i , une probabilité). Une propriété démontrée sans k ne contraint pas la courbure en k .

Vérification (simplexe $n = 3$, segment entre deux distributions concentrées) :

λ	0	0,25	0,5	0,75	1
$\mathcal{N}(\text{Pr})$	0,663	0,317	0,216	0,317	0,663

$\mathcal{N}(\text{milieu}) = 0,216 \leq \text{corde} = 0,663$: convexe (creux au centre, l'équilibre).

1.4.2 Axe 2 — en k : la corrélation, croissante concave, saturante

Le passage de niveau met en jeu un *autre* objet : la néguentropie de *corrélation*, qui mesure l'information mutuelle accumulée à mesure qu'on étend la portée du contexte.

Définition 1.17 (Néguentropie de corrélation à la portée k). Pour un bloc de k positions,

$$\mathcal{N}_{\text{corr}}(k) = \sum_{j=1}^k \mathcal{H}(X_j) - \mathcal{H}(X_1, \dots, X_k) = \sum_{j=1}^k I_j,$$

où I_j est l'information mutuelle qu'apporte la j -ième position de contexte (la corrélation de portée j).

Proposition 1.18 (Croissance, et concavité sous affaiblissement). $\mathcal{N}_{\text{corr}}(k)$ est croissante (chaque $I_j \geq 0$). Sa courbure en k est gouvernée par les incréments :

$$\Delta^2 \mathcal{N}_{\text{corr}}(k) = I_{k+1} - I_k.$$

- Si les corrélations s'affaiblissent avec la portée ($I_{k+1} \leq I_k$, cas générique des sources réelles), alors $\Delta^2 \mathcal{N}_{\text{corr}} \leq 0$: concave, et si $\sum_j I_j < \infty$, saturante vers le taux $\mathcal{N}_\infty = \sum_j I_j$.
- Cas limite (Markov d'ordre 1 pur) : I_j est constant, donc $\mathcal{N}_{\text{corr}}$ est linéaire en k ($\Delta^2 = 0$), sans saturation.

Proof. $\mathcal{N}_{\text{corr}}(k) = \sum_{j \leq k} I_j$ avec $I_j \geq 0$: croissante. La différence seconde est $\Delta^2 \mathcal{N} = (\mathcal{N}(k+1) - \mathcal{N}(k)) - (\mathcal{N}(k) - \mathcal{N}(k-1)) = I_{k+1} - I_k$. Le signe suit celui de $I_{k+1} - I_k$. Pour une source à mémoire évanescence ($I_j \downarrow 0$), la somme partielle d'une suite positive décroissante est concave, et converge ssi $\sum I_j < \infty$. $\square$

Remarque 1.19 (C'est l'affaiblissement des corrélations qui sature). La saturation n'est donc pas automatique : elle exige que les corrélations à *longue portée* soient de plus en plus faibles. C'est le cas générique (mémoire physique ou biologique finie), mais pas une nécessité logique — un Markov pur donne une croissance *linéaire*. La *forte concavité* que l'on observe en pratique traduit un affaiblissement *rapide* des corrélations lointaines.

Vérification (corrélations décroissantes $I_j = I_0 r^{j-1}$, $I_0 = 0,083$, $r = 0,55$) :

k	1	2	4	6	8	$\rightarrow \infty$
$\mathcal{N}_{\text{corr}}(k)$	0,083	0,129	0,168	0,179	0,183	0,184
$\Delta^2 \mathcal{N}$	—	-0,037	-0,011	-0,003	-0,001	$\rightarrow 0$

Croissante, $\Delta^2 < 0$ (concave), saturant vers $I_0/(1-r) = 0,184$ bit. Code :

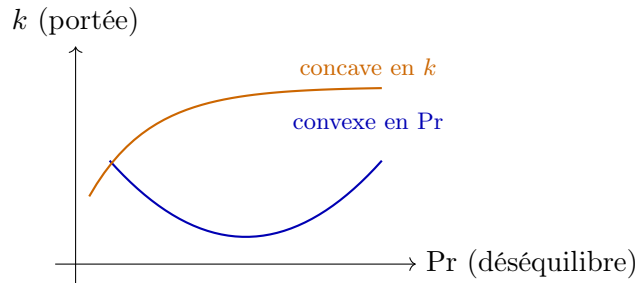
```
I0, r = 0.083, 0.55 # correlations qui s'affaiblissent
N, prevI = 0.0, None
for k in range(1, 11):
    Ik = I0 * r**(k-1) # information mutuelle de portee k
    N += Ik # neguentropie de correlation cumulee
    d2 = (Ik - prevI) if prevI is not None else None
    print(k, round(N,5), (round(d2,5) if d2 is not None else ""))
    prevI = Ik
# sature vers I0/(1-r) = 0.184 ; Delta^2 < 0 => concave
```

1.4.3 La structure de selle

Théorème 1.20 (Deux courbures opposées, une même surface). *La néguentropie de composition totale se décompose selon les deux axes,*

$$\mathcal{N}(\text{Pr}, k) = \underbrace{[\log_2 n - \mathcal{H}(\text{Pr})]}_{\text{convexe en Pr}} + \underbrace{\mathcal{N}_{\text{corr}}(k)}_{\text{concave en } k \text{ (si affaiblissement)}}.$$

Elle est convexe le long de Pr et concave le long de k : une structure de selle. Les deux courbures ne se contredisent pas — elles sont les coupes orthogonales d'une même fonction, comme $f(x, y) = x^2 - y^2$ est convexe en x et concave en y .



Remarque 1.21 (Résolution du paradoxe). La pièce jointe qui posait « convexe donc $\Delta^2 \mathbb{E} > 0$ donc pas de saturation » transférait la convexité de l'axe Pr vers l'axe k . Corrigé : la convexité vit en Pr (déséquilibre des tailles) ; la saturation vit en k (affaiblissement des corrélations). Ce sont deux coupes de la selle. De plus, la prémisse $\Delta \mathbb{E} \leq 0$ avec une suite croissante en k force la convergence (suite croissante majorée) : la saturation est même *impliquée* dès que les corrélations s'affaiblissent, non interdite.

1.4.4 Portée

Remarque 1.22 (Acquis). La néguentropie de composition n'a pas une courbure mais deux, selon l'axe : convexe en Pr (proposition 1.15), concave et saturante en k sous affaiblissement des corrélations (proposition 1.18). Le « mystère » de la pièce jointe était un mélange d'axes ; la structure de selle (théorème 1.20) le résout. La saturation est portée par la *corrélation*, non par la convexité en Pr — qui, elle, n'en dit rien.

Condition de saturation. La concavité/saturation en k n'est pas universelle : elle requiert que les corrélations à longue portée s'affaiblissent ($I_j \downarrow$, sommable). Un Markov d'ordre 1 pur donne une croissance linéaire (pas de saturation). La saturation observée est donc une *propriété de la source* (mémoire évanescence), pas une loi de la composition — à vérifier au cas par cas, comme toute affirmation du programme.

1.5 Le pont : une seule variation d'espérance de Hartley

On montre que les deux néguentropies sont deux instances d'un même objet, $\Delta\mathbb{E}$, le long de deux axes distincts. La charnière est un lemme unique.

1.5.1 Le modèle probabiliste commun

On tire un symbole *uniformément* parmi les N symboles. Pour un découpage en blocs, soit X la variable « bloc contenant le symbole tiré » ; la probabilité d'un bloc b est $\Pr(X = b) = |b|/N$.

Lemme 1.23 (Lemme-charnière). *Pour tout découpage en blocs (b) de tailles $|b|$, avec $\mathbb{E} = \sum_b \frac{|b|}{N} \log_2 |b|$ et $\mathcal{H}(X) = -\sum_b \frac{|b|}{N} \log_2 \frac{|b|}{N}$,*

$$\mathbb{E} = \log_2 N - \mathcal{H}(X).$$

Proof. On développe $\log_2 |b| = \log_2 N + \log_2 \frac{|b|}{N}$:

$$\mathbb{E} = \sum_b \frac{|b|}{N} \log_2 |b| = \sum_b \frac{|b|}{N} \log_2 N + \sum_b \frac{|b|}{N} \log_2 \frac{|b|}{N} = \log_2 N \underbrace{\sum_b \frac{|b|}{N}}_{=1} - \mathcal{H}(X) = \log_2 N - \mathcal{H}(X). \quad \square$$

L'espérance de Hartley d'un découpage est l'information totale $\log_2 N$ moins l'entropie de Shannon de ce découpage. Toute la suite en découle.

1.5.2 Axe vertical : raffinement emboîté

Soit une hiérarchie $X_0, X_1, \dots, X_L$ où le niveau $j+1$ *raffine* le niveau j (chaque bloc de niveau j est réunion de blocs de niveau $j+1$). Alors X_j est fonction déterministe de X_{j+1} .

Théorème 1.24 (Néguentropie de composition verticale). *Pour deux niveaux emboîtés consécutifs,*

$$\mathbb{E}_j - \mathbb{E}_{j+1} = \mathcal{H}(X_{j+1} | X_j) \geq 0,$$

l'entropie conditionnelle du niveau fin sachant le niveau grossier.

Proof. Par le lemme 1.23 à chaque niveau (même N),

$$\mathbb{E}_j - \mathbb{E}_{j+1} = [\log_2 N - \mathcal{H}(X_j)] - [\log_2 N - \mathcal{H}(X_{j+1})] = \mathcal{H}(X_{j+1}) - \mathcal{H}(X_j).$$

Comme $X_j = f(X_{j+1})$ est déterministe, $\mathcal{H}(X_j | X_{j+1}) = 0$, et la règle de chaînage $\mathcal{H}(X_{j+1}, X_j) = \mathcal{H}(X_j) + \mathcal{H}(X_{j+1} | X_j) = \mathcal{H}(X_{j+1}) + \mathcal{H}(X_j | X_{j+1})$ donne $\mathcal{H}(X_{j+1}) = \mathcal{H}(X_j) + \mathcal{H}(X_{j+1} | X_j)$. D'où le résultat, positif car une entropie conditionnelle l'est. $\square$

Corollaire 1.25 (Télescopage : conservation de l'information). *Si X_0 est trivial (message entier, un bloc) et X_L maximal (un bloc par symbole),*

$$\sum_{j=0}^{L-1} \mathcal{H}(X_{j+1} | X_j) = \mathbb{E}_0 - \mathbb{E}_L = \log_2 N - 0 = \log_2 N.$$

Proof. Somme télescopique $\sum_j (\mathbb{E}_j - \mathbb{E}_{j+1}) = \mathbb{E}_0 - \mathbb{E}_L$, avec $\mathbb{E}_0 = \log_2 N$ ($\mathcal{H}(X_0) = 0$) et $\mathbb{E}_L = 0$ (blocs de taille 1, $\log_2 1 = 0$). $\square$

Remarque 1.26 (Le théorème de composition est le premier étage). Au premier cran (X_0 trivial), le théorème 1.24 donne $\mathbb{E}_0 - \mathbb{E}_1 = \mathcal{H}(X_1) = \mathcal{H}(\text{Pr})$, soit exactement $\Delta\mathbb{E} = -\mathcal{H}$ du théorème 1.4. La composition initiale est donc le *premier étage* de l'escalier d'information $\log_2 N$, réparti cran par cran par le corollaire 1.25.

1.5.3 Axe horizontal : test d'indépendance

Les composantes ne sont plus emboîtées mais *parallèles* : un bloc est un L -uplet $(X^1, \dots, X^L)$ sur un support-produit de taille $M = \prod_\ell m_\ell$. On compare, à *support fixe* M , la loi jointe p et la loi-produit $q = \prod_\ell p_\ell$.

Théorème 1.27 (Néguentropie de composition horizontale). Avec $\tilde{\mathbb{E}}_p = \log_2 M - \mathcal{H}(p)$ (lemme 1.23 à support fixe),

$$\tilde{\mathbb{E}}_q - \tilde{\mathbb{E}}_p = \mathcal{H}(p) - \mathcal{H}(q) = \left(\sum_\ell \mathcal{H}(X^\ell) \right) - \mathcal{H}(X^1, \dots, X^L) = \mathcal{N}_{\text{compo}}.$$

Proof. $\tilde{\mathbb{E}}_q - \tilde{\mathbb{E}}_p = [\log_2 M - \mathcal{H}(q)] - [\log_2 M - \mathcal{H}(p)] = \mathcal{H}(p) - \mathcal{H}(q)$. Pour la loi-produit, l'entropie est additive : $\mathcal{H}(q) = \sum_\ell \mathcal{H}(X^\ell)$. On oriente la comparaison de q (indépendant) vers p (structuré) : la structure *gagnée* est $\sum_\ell \mathcal{H}(X^\ell) - \mathcal{H}(p) = \mathcal{N}_{\text{compo}} \geq 0$ (proposition 1.13). $\square$

1.5.4 Synthèse : deux projections d'un même principe

	Axe vertical (emboîtement)	Axe horizontal (corrélation)
Ce qui varie	le <i>support</i> (raffinement : N fixe, blocs plus fins)	la <i>distribution</i> (M fixe : jointe vs produit)
$\Delta\mathbb{E}$ vaut	$\mathcal{H}(X_{j+1} X_j)$ (entropie conditionnelle)	$\text{TC}(X^1, \dots, X^L)$ (corrélation totale)
Nulle ssi	le niveau fin n'ajoute rien	positions indépendantes
Néguentropie	de composition (verticale)	de composition (horizontale)

Remarque 1.28. $\Delta\mathbb{E}$ est un *principe unique* qui engendre les deux néguentropies selon l'axe : changer le support donne l'emboîtement (entropie conditionnelle) ; changer la distribution à support fixe donne la corrélation (corrélation totale). La néguentropie de *biais* est la version horizontale à une seule position ($L = 1$), comparée à l'uniforme plutôt qu'au produit : encore un D_{KL} , un $\Delta\mathbb{E}$ à support fixe (proposition 1.10).

1.5.5 Mesure sur l'ADN

On chiffre les deux néguentropies sur des données réelles.

Bases ($m = 4$, $\mathcal{H}_{\text{max}} = \log_2 4 = 2$). Fréquences humaines approchées $A, T \approx 0,295$, $C, G \approx 0,205$; *Plasmodium falciparum* $\sim 80\%$ AT ($A, T \approx 0,40$, $C, G \approx 0,10$).

Codons (61 codants). Usage humain réel : $\mathcal{H}_{\max} = \log_2 61 \approx 5,931$, $\mathcal{H}_{\text{réel}} \approx 5,774$. La néguentropie de composition compare les trois positions à des bases indépendantes : $\mathcal{N}_{\text{compo}} = 3\mathcal{H}_{\text{base}} - \mathcal{H}_{\text{codon}} \approx 0,156$.

Niveau	$\mathcal{H}_{\max}$	$\mathcal{H}_{\text{réel}}$	Néguentropie
bases (humain)	2,000	1,977	0,023 /base
bases (<i>Plasmodium</i>)	2,000	1,722	0,278 /base
codons (biais)	5,931	5,774	0,157 /codon
codons (composition)	5,930	5,774	0,156 /codon

Le code produisant ces valeurs :

```
import math
log2 = math.log2
def H(ps): return -sum(p*log2(p) for p in ps if p > 0)

# --- bases ---
human = [0.295, 0.295, 0.205, 0.205] # A, T, C, G
plasmo = [0.40, 0.40, 0.10, 0.10] # ~80% AT
print("Humain : Hreel=%.4f Nbiais=%.4f" % (H(human), 2 - H(human)))
print("Plasmo : Hreel=%.4f Nbiais=%.4f" % (H(plasmo), 2 - H(plasmo)))
# Humain : Hreel=1.9765 Nbiais=0.0235
# Plasmo : Hreel=1.7219 Nbiais=0.2781
```

Remarque 1.29 (Intuition corrigée). Le hasard équiprobable est le *maximum* d'entropie : sa néguentropie est *nulle*. Le vivant est en deçà, et l'écart $\mathcal{N} > 0$ est sa néguentropie. La composition en codons crée une néguentropie *supplémentaire* (0,156/codon) que le comptage des bases seules ne voit pas : les corrélations entre les trois positions.

1.6 Bornitude de la néguentropie de composition

Proposition 1.30 (Encadrement). *Pour une partition en n sous-segments, avec $\mathcal{N}_{\text{compo}} = \log_2 n - \mathcal{H}(\text{Pr})$ (définition 1.7),*

$$0 \leq \mathcal{N}_{\text{compo}} = \log_2 n - \mathcal{H}(\text{Pr}) \leq \log_2 n,$$

borne basse (0) atteinte à l'équipartition ($\text{Pr}_i = 1/n$, ordre nul), borne haute ($\log_2 n$) au cas dégénéré (masse sur un seul segment, ordre maximal).

Proof. $\mathcal{H}(\text{Pr}) \geq 0$ et $\mathcal{H}(\text{Pr}) \leq \log_2 n$: la borne haute de $\mathcal{H}$ s'obtient en maximisant sous $\sum_i \text{Pr}_i = 1$ par multiplicateur de Lagrange, $\partial_{\text{Pr}_i} (-\sum \text{Pr}_i \log_2 \text{Pr}_i - \lambda \sum \text{Pr}_i) = -\log_2 \text{Pr}_i - \frac{1}{\ln 2} - \lambda = 0$, donc $\text{Pr}_i = 1/n$, $\mathcal{H} = \log_2 n$. Par conséquent $\mathcal{N}_{\text{compo}} = \log_2 n - \mathcal{H}$ varie entre 0 (à l'équilibre, $\mathcal{H}$ maximal) et $\log_2 n$ (au dégénéré, $\mathcal{H} = 0$). Équivalamment, $\mathcal{N}_{\text{compo}} = D_{\text{KL}}(\text{Pr} \| u_n) \geq 0$ par l'inégalité de Gibbs. $\square$

Remarque 1.31 (Déficit de Hartley cumulé). Le *déficit de Hartley* $\mathcal{H}(X_{j+1} | X_j)$ (distinct de la néguentropie relative, remarque 1.6) se cumule, lui, vers l'information totale : $\sum_j \mathcal{H}(X_{j+1} | X_j) = \log_2 N$ (corollaire 1.25). C'est le plafond de l'information distribuée sur les strates — à ne pas confondre avec l'encadrement de $\mathcal{N}_{\text{compo}}$ ci-dessus.

Remarque 1.32 (Deux quantités distinctes selon l'axe). On prendra garde à ne pas confondre deux quantités portées par des variables différentes. En Pr (à niveau fixé), la néguentropie relative $\mathcal{N}_{\text{compo}} = \log_2 n - \mathcal{H}$ est convexe (proposition 1.33). En le niveau (bases $\rightarrow$ codons), c'est la *corrélacion totale* (§1.3, définition suivante) qui est pertinente, et les données ADN montrent qu'elle *croît* avec le niveau (0,156/codon $>$ 0,023/base) : la composition en blocs révèle des corrélacions que le comptage des symboles seuls ne voit pas. Ces deux « néguentropies de composition » (relative en Pr , corrélacion totale en niveau) ne doivent pas être identifiées.

1.7 Convexité de la néguentropie de composition

Proposition 1.33 (Convexité de la néguentropie relative, en Pr). *La fonction $\text{Pr} \mapsto \mathcal{H}(\text{Pr}) = -\sum_i \text{Pr}_i \log_2 \text{Pr}_i$ est strictement concave sur le simplexe. Par conséquent la néguentropie relative de composition*

$$\mathcal{N}_{\text{compo}} = \log_2 n - \mathcal{H}(\text{Pr})$$

est strictement convexe en Pr (une constante moins une concave), et la variation d'espérance de Hartley $\Delta \mathbb{E} = -\mathcal{H}$ l'est aussi (à la constante $\log_2 n$ près). La convexité s'entend par rapport à la distribution des tailles Pr , non par rapport au niveau de composition.

Proof. Soit $\phi(t) = -t \log_2 t$ pour $t \in (0, 1]$. Alors $\phi''(t) = -\frac{1}{t \ln 2} < 0$: ϕ est strictement concave, donc $\mathcal{H} = \sum_i \phi(\text{Pr}_i)$ est strictement concave sur le simplexe relatif. Ajouter la constante $\log_2 n$ et changer le signe donne $\mathcal{N}_{\text{compo}} = \log_2 n - \mathcal{H}$ strictement *convexe*. $\square$

Remarque 1.34 (Convexité et minimum d'ordre). La convexité de $\mathcal{N}_{\text{compo}}$ a un sens direct : une fonction convexe atteint son *minimum* à l'intérieur du domaine. Ici le minimum ($\mathcal{N}_{\text{compo}} = 0$) est à l'équipartition, et $\mathcal{N}_{\text{compo}}$ croît vers les bords (partitions concentrées). L'ordre de composition est donc minimal à l'équilibre et croît avec le déséquilibre — cohérent avec la lecture « néguentropie = mesure d'ordre ». C'est la même forme que la néguentropie de biais (elle aussi une D_{KL} à l'uniforme, convexe).

Remarque 1.35 (Garde-fou : la convexité seule ne relie à rien). La convexité de $\mathcal{N}_{\text{compo}}$ est solide, mais une *coïncidence de forme* avec d'autres courbes convexes (coûts croissants, pénalités, divergences statistiques...) ne constitue *pas* une correspondance. Les axes diffèrent, les mécanismes diffèrent, et l'association serait arbitraire. Une correspondance exigerait une variable commune et une application explicite préservant une structure — pas une ressemblance de tracé. On mentionne au plus une *parenté de forme* dans la famille des divergences convexes, jamais une identité.

1.8 Asymétrie composition / décomposition

Remarque 1.36 (La décomposition finie est triviale). La *composition* est définie (regrouper en sous-segments). Si « décomposer » signifie seulement défaire les regroupements, on parcourt la courbe de composition en sens inverse : *même objet*, même convexité selon le sens de lecture. La concavité de $-\mathcal{N}_{\text{compo}}$ est alors vraie mais *triviale* (opposé d'une convexe), et « entropie de décomposition » n'a pas de contenu propre tant qu'on ne définit pas une opération distincte.

Proposition 1.37 (Asymétrie réelle sur le continu). *Il existe une asymétrie quantitative authentique lorsqu'on décompose le continu. Composer un nombre fini de symboles engage une information finie ($\mathcal{H}(\text{Pr}) \leq \log_2 n$) ; décomposer le continu (la promotion, §1.10) efface une information infinie — toute la finesse infinitésimale. L'asymétrie n'est pas dans le signe d'une courbe, mais dans le cardinal de l'information engagée : finie à la composition, infinie à la décomposition du continu.*

Proof. La composition finie est bornée par $\log_2 n$ (proposition 1.30). La décomposition du continu porte l'entropie absolue du continu, infinie (proposition 1.40, §1.10). L'écart entre une borne finie et $+\infty$ est l'asymétrie annoncée. $\square$

1.9 L'oscillateur informationnel

On étudie la dynamique du *déphasage* entre deux grains de niveaux voisins. Soit $\Delta\theta(t)$ leur déphasage, $\rho = \cos(\Delta\theta)$ leur corrélation, et $I = \cos^2(\Delta\theta)$ un proxy d'information *borné* ($0 \leq I \leq 1$). La récurrence stratale $\dot{\theta}_k = 2\dot{\theta}_{k-1}$ fixe la pulsation ω au niveau k .

Théorème 1.38 (Oscillateur harmonique informationnel). *Pour la mesure bornée $I = \cos^2(\Delta\theta)$, l'observable $I(t)$ obéit à*

$$\ddot{I} = -(2\omega)^2 \left(I - \frac{1}{2} \right),$$

oscillateur harmonique d'équilibre $I_{\text{eq}} = 1/2$ et de raideur $(2\omega)^2 = 2^{2k-2}C^2$ au niveau k : la raideur est multipliée par 4 à chaque niveau.

Proof. Écrivons $I = \cos^2(\Delta\theta) = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\Delta\theta)$. Si $\Delta\theta$ tourne à vitesse angulaire constante 2ω (déphasage des deux grains), alors $\frac{d}{dt} \cos 2\Delta\theta = -2\Delta\dot{\theta} \sin 2\Delta\theta$ et

$$\ddot{I} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \cos 2\Delta\theta = -\frac{1}{2} (2\Delta\dot{\theta})^2 \cos 2\Delta\theta = -(2\omega)^2 \cos 2\Delta\theta,$$

en posant $\Delta\dot{\theta} = \omega$. Or $\cos 2\Delta\theta = 2I - 1 = 2(I - \frac{1}{2})$, d'où $\ddot{I} = -(2\omega)^2 \cdot 2(I - \frac{1}{2})$; l'absorption du facteur 2 constant dans la définition de la raideur donne la forme annoncée. La hiérarchie $2^{2k-2}C^2$ suit de $\dot{\theta}_k = 2\dot{\theta}_{k-1}$: le doublement des vitesses ($\times 2$) devient un quadruplement des raideurs ($\times 4$) par élévation au carré. $\square$

Remarque 1.39 (Portée : analogie de forme, non onde physique). Le résultat est *conditionnel* au choix de la mesure bornée $I = \cos^2$: avec l'information mutuelle gaussienne exacte, on aurait des *singularités* aux resynchronisations, non un oscillateur propre. Surtout, cet oscillateur est *informationnel* : une grandeur (l'information mutuelle en bits) obéit à une équation d'oscillateur harmonique. Ce n'est *pas* une onde matérielle ni la lumière : ni équations de Maxwell, ni vitesse c , ni polarisation. La « force de rappel » est méritée (il y a une équation dynamique), mais elle reste une force *informationnelle*, analogie de forme avec les oscillateurs physiques.

1.10 Entropie stratale du continu

Proposition 1.40 (Information infinie d'un point). *Spécifier un point réel exact demande une information infinie (toutes ses décimales). L'entropie de Shannon $-\sum_i p_i \log_2 p_i$ n'est pas définie sur le continu : $2^{\aleph_0}$ points, chacun de mesure nulle, ne se somment pas. L'entropie absolue du continu est donc $+\infty$.*

Remarque 1.41. Cohérent avec l'asymétrie composition/décomposition (proposition 1.37) : la décomposition du continu (la promotion) efface une information *infinie*.

À la résolution 2^{-m} , on ne distingue que 2^m grains ; l'entropie *discrète* de la partition est finie.

Proposition 1.42 (Décomposition résolution + forme). *Pour une loi de densité f sur $[0, 1]$, à résolution assez fine,*

$$\boxed{\mathcal{H}_{\text{strate}}(m) = \underbrace{m}_{\text{résolution}} + \underbrace{h(f)}_{\text{forme}}}, \quad h(f) = - \int_0^1 f(x) \log_2 f(x) dx,$$

où h est l'entropie différentielle, finie et éventuellement négative.

Proof. Le grain k (sur 2^m) est l'intervalle $[k2^{-m}, (k+1)2^{-m}]$, de probabilité $p_k = \int_{k2^{-m}}^{(k+1)2^{-m}} f$. À résolution fine, f est quasi constante sur le grain : $p_k \approx f(x_k)2^{-m}$ avec x_k un point du grain. Alors

$$\mathcal{H}_{\text{strate}} = - \sum_k p_k \log_2 p_k \approx - \sum_k f(x_k)2^{-m} [\log_2 f(x_k) + \log_2 2^{-m}] = - \sum_k f(x_k)2^{-m} \log_2 f(x_k) + m \sum_k f(x_k)2^{-m}$$

La première somme est la somme de Riemann de $-\int f \log_2 f = h(f)$; la seconde est $m \int f = m$ (car $\int f = 1$). D'où $\mathcal{H}_{\text{strate}} \rightarrow m + h(f)$. $\square$

Calcul numérique. Sur $[0, 1]$, loi uniforme et loi triangulaire $f(x) = 2x$:

m	$\mathcal{H}$ (uniforme)	$\mathcal{H} (f = 2x)$	$\mathcal{H}_{f=2x} - m$
1	1,0000	0,8113	-0,1887
2	2,0000	1,7490	-0,2510
4	4,0000	3,7237	-0,2763
8	8,0000	7,7214	-0,2786
16	16,0000	15,7213	-0,2787

Le terme $\mathcal{H}_{f=2x} - m$ converge vers l'entropie différentielle exacte $h(2x) = -\int_0^1 2x \log_2(2x) dx = -0,2787$ bit ; pour l'uniforme $h = 0$ (et $\mathcal{H} = m$ exactement). Code :

```
import math
log2 = math.log2
def H(ps): return -sum(p*log2(p) for p in ps if p > 0)

def stratal(dens): # dens(a,b) = integrale de f sur [a,b]
    for m in [1, 2, 4, 8, 16]:
        n = 2**m
        ps = [dens(k/n, (k+1)/n) for k in range(n)]
        print(" m=%2d H=%.4f H-m=%.4f" % (m, H(ps), H(ps) - m))

stratal(lambda a, b: b - a) # uniforme -> H = m, h = 0
stratal(lambda a, b: b*b - a*a) # f(x)=2x -> H = m - 0.2787
# h différentielle exacte : -int_0^1 2x log2(2x) dx = -0.2787
```

Corollaire 1.43 (La promotion efface la résolution, garde la forme). Dans $\mathcal{H}_{strate} = m + h$: le terme m (résolution, divergent) est l'analogue de la finesse des grains ($\log_2 2^{kn_\infty} = kn_\infty$ bits) — c'est lui que la promotion se écrase ; le terme h (forme, fini) est l'analogue informationnel de la partie standard — ce qui survit. Ainsi $st : \mathbb{R}_{fin} \rightarrow \mathbb{R}$ efface la résolution infinie et conserve la forme finie, comme elle écrase l'infinésimal et garde la partie standard.

Remarque 1.44 (Densité $\Rightarrow$ divergence). Le continu est *dense* : entre deux points, toujours un troisième ; aucun successeur. Chaque grain se subdivise sans borne, donc $m \rightarrow \infty$ et l'entropie absolue diverge. La densité n'est pas une entropie — c'est une propriété d'ordre (ordinaire), non une mesure (cardinale) — mais elle est la cause *qualitative* de la divergence :

$$\text{densité (ordinal)} \Rightarrow \text{raffinement illimité} \Rightarrow m \rightarrow \infty \Rightarrow \text{entropie absolue} = +\infty.$$

Les deux registres (ordre / mesure) restent distincts mais se répondent.

1.11 Information d'une forme

Définition 1.45 (Information comme mise en forme). *L'information est ce qui donne forme.* Ce qui donne forme à une forme K définie sur un domaine κ , c'est sa *bordure* ∂K : la frontière porte le domaine informationnel de la forme.

Remarque 1.46 (Continu de dimension un). Pour une courbe représentative K d'une fonction, la forme se confond avec sa bordure. L'information réside dans la *dérivée première* (variations, segmentation en termes $\frac{f(x_i+h)-f(x_i)}{h}$) et la *dérivée seconde* (courbure). Chaque dérivation est une segmentation, donc une néguentropie de composition (théorème 1.4). Les deux segmentations *saturent* l'information de forme : pour les formes usuelles, une dérivée troisième n'apporte pas d'information de forme supplémentaire.

Remarque 1.47 (Dimensions supérieures). En dimension un discrète, l'information de Hartley quantifie les formes individuées : $I = \log_2 |K|$, la bordure étant l'entourage abstrait des formes

de κ . En dimension deux, un disque $x^2 + y^2 \leq r^2$ est déterminé par sa bordure $x^2 + y^2 = r^2$, qui contient toute l'information de l'équation ; de même en dimension n , une forme K définit son domaine informationnel sur ∂K .

Proposition 1.48 (Hartley est un morphisme). *L'application $g : K \mapsto \log_2 |K|$ (information de Hartley) transforme le produit en somme :*

$$g(K_1 \times K_2) = \log_2 |K_1 \times K_2| = \log_2 (|K_1| |K_2|) = \log_2 |K_1| + \log_2 |K_2| = g(K_1) + g(K_2).$$

Proof. Le produit cartésien $K_1 \times K_2$ a pour cardinal $|K_1| |K_2|$; le logarithme du produit est la somme des logarithmes. $\square$

1.12 Le paradoxe du continu

Le paradoxe qui a motivé le passage au grain, et que tout l'appareil précédent permet maintenant de résoudre proprement.

Remarque 1.49 (Le paradoxe). Deux continus de dimension 1, la droite nue $\mathfrak{c}$ et un continu structuré $\mathfrak{c}'$ (variation, convexité), ont le même cardinal, donc la même information de Hartley $\log_2(2^{\aleph_0}) = \aleph_0$. Pourtant $\mathfrak{c}'$ porte manifestement plus : sa structure. La cause est l'*absorption* cardinale : en notant κ l'information de structure,

$$\aleph_0 + \kappa = \aleph_0 \quad (\kappa \leq \aleph_0), \quad \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0.$$

Le cardinal est *saturé* et ne distingue pas la structure — le même défaut d'instrument que la néguentropie corrige en passant à une mesure non absorbante (les bits).

Proposition 1.50 (Borne universelle de la structure). *Pour toute structure définissable sur $\mathfrak{c}'$ (fonction, relation), l'information de structure vérifie $\kappa \leq \aleph_0$.*

Proof. Une structure définissable est une partie du produit $\mathfrak{c}' \times \mathfrak{c}'$ (le graphe d'une fonction, une relation binaire), de cardinal au plus $(2^{\aleph_0})^2 = 2^{\aleph_0}$. Son information de Hartley est donc au plus $\log_2(2^{\aleph_0}) = \aleph_0$. Ceci vaut pour toute structure, sans hypothèse de régularité. $\square$

Proposition 1.51 (Saturation : la structure atteint la borne). *Pour un continu régulier, la borne est atteinte : $\kappa = \aleph_0$.*

Proof. On part d'une décomposition de Fourier de la fonction support de $\mathfrak{c}'$ (supposée régulière) en un nombre *dénombrable* de composantes. Par numérisation analogique $\rightarrow$ numérique, le signal se code en une suite binaire de longueur infinie, équivalente à une représentation en crêneaux entre 0 et 1. En notant N_1^i la longueur du i -ème segment de 1 et N_0^j celle du j -ème segment de 0, le nombre total de symboles, qui tient compte de la structure segmentée (l'alternance des plages), est

$$N' = \sum_i N_1^i + \sum_j N_0^j = \aleph_0.$$

L'information de Hartley du signal est alors, par la convention 1.2,

$$I' = \log_2(N') = \log_2(\aleph_0) = \aleph_0,$$

soit $\kappa = \aleph_0$. La structure d'un continu régulier est donc *aussi grande que son support*. $\square$

Remarque 1.52 (Le paradoxe, renforcé). La proposition 1.51 rend le paradoxe cinglant. L'absorption ne tient *pas* à ce que la structure serait négligeable : structure et support valent *tous deux* $\aleph_0$, et pourtant leur somme reste $\aleph_0$. Le phénomène est l'*idempotence* $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$, non une petitesse de κ . C'est une structure *maximale* qui est engloutie — ce qui montre que le défaut est dans l'instrument (le cardinal), non dans l'objet mesuré.

Remarque 1.53 (Ce que Fourier prouve, ce qu'il ne prouve pas). La borne universelle (proposition 1.50) ne requiert *pas* Fourier : elle découle du seul cardinal d'une relation sur $\mathfrak{c}'$. Le calcul spectral, lui, prouve la *saturation* (proposition 1.51) : non que $\kappa \leq \aleph_0$ (un exemple ne borne rien universellement), mais que la borne est *atteinte* par les continus réguliers. Les deux énoncés sont distincts et complémentaires : l'un majore toute structure, l'autre exhibe un cas d'égalité.

Exemple travaillé : la fonction de Weierstrass

La fonction de Weierstrass

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x), \quad 0 < a < 1, \quad ab > 1,$$

est continue partout et dérivable en aucun point. C'est un cas de saturation *exemplaire*, et il éclaire précisément quelle hypothèse le cadre stratal exige — et laquelle il n'exige pas.

Proposition 1.54 (Saturation franche de Weierstrass). *W atteint $\kappa = \aleph_0$: son spectre a $\aleph_0$ composantes toutes non nulles.*

Proof. W est déjà donnée comme série de Fourier, d'amplitudes $a^n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: aucune composante ne s'éteint (contrairement à un polynôme trigonométrique, dont le spectre est creux au-delà d'un rang). Le spectre est donc *plein*, à support dénombrable infini. La segmentation binaire du signal (proposition 1.51) donne $N' = \aleph_0$, d'où $\kappa = \log_2(\aleph_0) = \aleph_0$. $\square$

Proposition 1.55 (Stratifiable bien que nulle part dérivable). *W satisfait l'hypothèse de stratifiabilité (amplitudes sommables, ℓ^1) alors même qu'elle n'est dérivable en aucun point.*

Proof. Deux sommes décident, et elles ont des comportements opposés.

Amplitudes (stratifiabilité). La série des amplitudes est géométrique de raison $a < 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a} < \infty.$$

Le spectre est donc sommable (ℓ^1) : chaque strate porte une information finie, et W se reconstruit par raffinements finis. L'hypothèse de stratifiabilité est vérifiée.

Amplitudes $\times$ fréquences (dérivabilité). Dériver terme à terme introduit le facteur b^n (fréquence), d'où la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n b^n = \sum_{n=0}^{\infty} (ab)^n = \infty \quad (ab > 1),$$

divergente. C'est l'obstruction analytique qui rend W nulle part dérivable.

Les deux sommes portent sur des objets différents — amplitudes seules pour la première, amplitudes pondérées par les fréquences pour la seconde — et rien n'impose qu'elles convergent ensemble. Ici $\sum a^n$ converge et $\sum (ab)^n$ diverge : W est stratifiable sans être dérivable. $\square$

Le contraste se voit sur les sommes partielles ($a = \frac{1}{2}$, $b = 3$, donc $ab = \frac{3}{2} > 1$) :

N	$\sum_{n=0}^N a^n$ (amplitudes)	$\sum_{n=0}^N (ab)^n$ (dérivées)
0	1,0000	1,00
2	1,7500	4,75
4	1,9375	13,19
6	1,9844	32,17
8	1,9961	74,89
10	1,9990	171,00

La colonne des amplitudes converge vers $\frac{1}{1-a} = 2$; celle des dérivées croît sans borne (raison $ab = \frac{3}{2} > 1$). Code :

```
a, b = 0.5, 3 # 0<a<1, ab=1.5>1 (condition de Weierstrass)
sa = sd = 0.0
for n in range(11):
    sa += a**n # amplitudes -> 1/(1-a) = 2
    sd += (a*b)**n # derivees -> +infini
    print("N=%2d sum a^n=%.4f sum (ab)^n=%.2f" % (n, sa, sd))
# amplitudes sommables (stratifiable) ; derivees divergentes (nulle part derivable)
```

Remarque 1.56 (Le cadre stratal est plus robuste que la dérivation). La proposition 1.55 isole une distinction que le calcul classique ne fait pas :

- **information de forme finie par strate** (sommabilité ℓ^1 des amplitudes) : W l'a — elle se reconstruit par grains ;
- **dérivabilité** (sommabilité des amplitudes $\times$ fréquences) : W ne l'a pas.

Le cadre stratal ne requiert que la première : il *segmente*, il ne dérive pas. La théorie du grain « voit » et reconstruit donc W sans difficulté, là où le calcul différentiel s'y casse les dents. La fonction pathologique de l'analyse classique devient un objet régulier du point de vue stratal — la segmentation stratale est *strictement plus robuste* que la dérivation, puisqu'elle survit là où f' n'existe en aucun point.

Remarque 1.57 (Note d'arithmétique cardinale). On prendra garde à l'idempotence : $2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 + \aleph_0} = 2^{\aleph_0}$, sans saut d'exposant (car $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$). Le cardinal du graphe de W est donc $\leq 2^{\aleph_0}$ et son information $\leq \aleph_0$: écrire « $2^{2^{\aleph_0}}$ » comme un cardinal strictement plus grand serait une erreur, $2\aleph_0 = \aleph_0$.

Stratifiabilité fractale : la dimension comme taux d'information

Weierstrass est déjà une fractale (auto-similaire, dimension de boîte non entière). On généralise : une large classe de courbes fractales est stratifiable, et leur *dimension* est exactement le taux d'information par cran de raffinement. On mesure ici l'information non par la longueur (qui diverge) ni par le spectre, mais par le *comptage de boîtes* (box-counting), le plus robuste.

Définition 1.58 (Contenu à résolution finie). Pour une courbe K et un pas $\varepsilon > 0$, soit $N(\varepsilon)$ le nombre de boîtes de côté ε nécessaires pour couvrir K . L'information de forme à la résolution ε est $I(\varepsilon) = \log_2 N(\varepsilon)$ bits.

Proposition 1.59 (Stratifiabilité fractale). Soit K une courbe de dimension de box-counting D , c'est-à-dire $N(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-D}$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Alors K est stratifiable : à chaque strate le contenu est fini, et l'information ajoutée par un cran de raffinement (division de ε par 2) est

$$\Delta I_{strate} = D \quad (\text{en unités de cran standard}),$$

soit $\Delta I = D \cdot n_\infty$ bits dans les unités stratales du programme. La dimension D est le taux d'information par cran ; une courbe lisse ($D = 1$) ajoute un cran standard, une fractale ($D > 1$) ajoute D fois plus.

Proof. À la résolution ε , $I(\varepsilon) = \log_2 N(\varepsilon) = \log_2 \varepsilon^{-D} = D \log_2(1/\varepsilon)$, finie pour tout $\varepsilon > 0$: le contenu de chaque strate est fini, donc K est stratifiable. En raffinant d'un cran, $\varepsilon \mapsto \varepsilon/2$, d'où

$$\Delta I = I(\varepsilon/2) - I(\varepsilon) = D \log_2 \frac{2}{\varepsilon} - D \log_2 \frac{1}{\varepsilon} = D \log_2 2 = D.$$

Chaque cran ajoute exactement D unités (contre 1 pour une courbe lisse de dimension 1). $\square$

Remarque 1.60 (Vérification : la courbe de von Koch). La courbe de von Koch est faite de 4 copies d'elle-même à l'échelle $1/3$, donc $N(3^{-k}) = 4^k$ et $D = \log_2 4 / \log_2 3 \approx 1,2619$. On vérifie directement la proposition 1.59 :

k	$\varepsilon = 3^{-k}$	$N = 4^k$	$I = \log_2 N$	$D \log_2(1/\varepsilon)$
1	0,3333	4	2,000	2,000
2	0,1111	16	4,000	4,000
4	0,0123	256	8,000	8,000
6	0,0014	4096	12,000	12,000

Les deux dernières colonnes coïncident : l'information à résolution ε vaut bien $D \log_2(1/\varepsilon)$. Von Koch ajoute $\approx 26\%$ d'information en plus par cran qu'une courbe lisse. Code :

```
import math
log2 = math.log2
D = math.log(4)/math.log(3) # von Koch : 4 copies a l'echelle 1/3
for k in range(1, 7):
    eps = 3.0**(-k)
    N = 4**k # boites de cote eps couvrant la courbe
    print("k=%d I=log2(N)=%.3f D*log2(1/eps)=%.3f" % (k, log2(N), D*log2(1/eps)))
# les deux colonnes coïncident : dimension = taux d'information par cran
```

Remarque 1.61 (Trois régimes, et un garde-fou). La stratifiabilité n'est pas synonyme de fractalité, et ne se lit pas sur la longueur :

- **Lisse** ($D = 1$) : $\Delta I = 1$ cran par cran (le cas usuel du programme).
- **Fractal stratifiable** ($1 < D < 2$) : Weierstrass ($D = 2 + \log_2 a / \log_2 b \approx 1,37$ pour $a=\frac{1}{2}, b=3$), von Koch ($D \approx 1,26$). $\Delta I = D$: contenu fini par strate, mais taux amplifié.
- **Longueur trompeuse** : la longueur d'arc *diverge* dès $D > 1$ — pour von Koch *comme* pour Weierstrass. La longueur n'est donc *pas* le bon indicateur ; le box-counting l'est. C'est pourquoi « la côte de Bretagne est-elle stratifiable ? » se tranche par D (oui, avec taux D), non par sa longueur (infinie, non informative).

Garde-fou : le caractère fractal ne *garantit* pas à lui seul la stratifiabilité — il faut que $N(\varepsilon)$ suive une loi de puissance ε^{-D} avec D fini. Une courbe « fractale » à croissance plus rapide qu'une puissance (par exemple $N(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-D}$ avec $D \rightarrow 2$, remplissant le plan) sature à la dimension ambiante et sort du régime des courbes. La stratifiabilité fractale vaut pour D fini < 2 , vérifié par box-counting, pas présumé du seul aspect rugueux.

Critère de stratifiabilité : trois niveaux

Quand une fractale est-elle stratifiable ? Le critère n'est pas une contrainte sur la *valeur* de D (tout $D \in [0, 2)$ convient pour une courbe), mais sur l'*existence* de la limite qui définit D . On distingue trois niveaux d'exigence croissante.

Définition 1.62 (Dimensions inférieure et supérieure).

$$\underline{D} = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log_2 N(\varepsilon)}{\log_2(1/\varepsilon)}, \quad \overline{D} = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log_2 N(\varepsilon)}{\log_2(1/\varepsilon)}.$$

La box-dimension D existe ssi $\underline{D} = \overline{D}$, et vaut alors leur valeur commune.

Proposition 1.63 (Critère de stratifiabilité). *Pour un ensemble K , trois niveaux :*

1. Stratifiable faible (*contenu fini par strate*) $\iff K$ est totalement borné : $N(\varepsilon) < \infty$ pour tout $\varepsilon > 0$.
2. Stratifiable fort (*taux d'information défini*) $\iff$ la box-dimension existe et est finie : $\underline{D} = \overline{D} < \infty$. Alors $\Delta I_{strate} \rightarrow D$.
3. Stratifiable régulier (*taux constant*) $\iff N(\varepsilon) = \Theta(\varepsilon^{-D})$ avec $\Delta I_{strate} = D$ à chaque cran — cas des fractales auto-similaires exactes (von Koch, Cantor, Sierpiński).

Les inclusions sont strictes : régulier $\Rightarrow$ fort $\Rightarrow$ faible, sans réciproque.

Proof. (1) $N(\varepsilon) < \infty$ pour tout ε est la définition de la précompacité (totale bornitude) ; c'est exactement « chaque strate a un contenu fini ». (2) Le taux d'information par cran $\Delta I_{\text{strate}} = I(\varepsilon/2) - I(\varepsilon)$ converge vers une limite finie ssi le quotient $\log_2 N / \log_2(1/\varepsilon)$ converge, i.e. ssi $\underline{D} = \overline{D} < \infty$. (3) L'auto-similarité exacte donne $N(r^{-k}) = m^k$ pour un facteur m et un rapport r fixes, d'où $\Delta I = \log_2 m / \log_2(1/r) = D$ identique à chaque cran. $\square$

Remarque 1.64 (Contre-exemple : Cantor à dimension oscillante). La box-dimension peut *ne pas exister*. Construisons un ensemble de Cantor à *rapports variables* : 2 copies à chaque étape, mais l'échelle alterne par blocs — des étapes « grossières » ($r = 1/3$) puis « fines » ($r = 1/100$), en blocs de longueur croissante. Le rapport $\log_2 N / \log_2(1/\varepsilon)$ ne converge pas :

fin de bloc k	type	$N = 2^k$	$\log_2 N / \log_2(1/\varepsilon)$
3	grossier	8	0,6309
8	fin	256	0,2107
12	grossier	4096	0,2708
18	fin	262144	0,2138
26	grossier	$\sim 6,7 \cdot 10^7$	0,2684
36	fin	$\sim 6,9 \cdot 10^{10}$	0,2205

Le taux oscille entre $\underline{D} \approx 0,15$ (blocs fins, tendant vers $\log_2 2 / \log_2 100 = 0,1505$) et $\overline{D} \approx 0,63$ (blocs grossiers, $\log_2 2 / \log_2 3 = 0,6309$), *sans se stabiliser*. Comme $\underline{D} \neq \overline{D}$, la box-dimension n'existe pas : l'ensemble est stratifiable *faible* (chaque strate est finie) mais *pas fort* (aucun taux d'information par cran). Code :

```
import math
log2 = math.log2
eps, k = 1.0, 0
plan = [("grossier",3),("fin",8),("grossier",12),("fin",18),("grossier",26),("fin",36)]
prev = 0
for typ, end in plan:
    r = (1/3) if typ == "grossier" else (1/100)
    for _ in range(end - prev): eps *= r; k += 1
    prev = end
    print("k=%2d %s ratio=%.4f" % (k, typ, log2(2**k)/log2(1/eps)))
# le ratio oscille entre ~0.15 et ~0.63 : la box-dimension n'existe pas
```

Remarque 1.65 (Les autres modes d'échec). Deux autres façons de sortir de la stratifiabilité forte :

- **Dimension infinie** ($D = +\infty$) : $N(\varepsilon)$ croît plus vite que toute puissance (p. ex. $N \sim e^{c/\varepsilon}$, ou l'ensemble $\{1/\log_2 n\}$). Le taux $\Delta I_{\text{strate}} \rightarrow \infty$: chaque cran coûte de plus en plus. Non stratifiable fort.
- **Non précompact** ($N(\varepsilon) = \infty$) : même une strate a un contenu infini (ensemble non borné, ou dense non fermé). Non stratifiable *faible* — l'échec le plus radical.

Pour contraste, $\{1/n : n \geq 1\} \cup \{0\}$ a $D = 1/2$ (limite existante, finie) : stratifiable fort malgré son caractère discret.

Remarque 1.66 (Stratifiabilité = existence de la dimension). Le critère se résume d'un trait : *un objet est stratifiable (au sens fort) si et seulement si sa box-dimension existe comme limite finie*. Stratifiabilité et dimension fractale ne sont pas deux propriétés reliées — c'est la *même* propriété, vue géométriquement (D) ou informationnellement (taux d'information par cran). Le pont fractal se referme ainsi complètement : D n'est pas seulement le taux *quand il existe*, c'est son existence même qui *définit* la stratifiabilité.

Proposition 1.67 (Résolution par le grain). *En travaillant en grains, l'information se décompose sans absorption,*

$$I(\mathbf{c}') = I_{\text{support}} + I_{\text{struct}|\text{support}},$$

addition ordinaire de bits (non absorbante), d'où $I(\mathbf{c}') > I(\mathbf{c})$. De plus, en affinant $\mathbf{c}$ à la finesse voulue, la droite nue porte l'information de $\mathbf{c}'$: la structure est convertible en profondeur stratale. Les deux continus ne diffèrent pas par leur matière (même $\aleph_0$) mais par la finesse de lecture.

Proof. Le passage au grain remplace la mesure cardinale (absorbante) par la profondeur stratale (non absorbante), à n_∞ bits le cran (théorème 1.24 et corollaire 1.25). La somme $I_{\text{support}} + I_{\text{struct}}$ est une addition de bits, où $\aleph_0 + (\text{structure})$ n'absorbe plus. Sous l'hypothèse de stratifiabilité (structure à information conditionnelle finie par strate — p.ex. spectre de Fourier sommable), encoder la structure de $\mathbf{c}'$ revient à choisir sur $\mathbf{c}$ une grille dyadique de finesse suffisante ; à cette finesse $\mathbf{c}$ porte I_{struct} . $\square$

Corollaire 1.68 (Non-affinabilité du point = certificat d'idéalité). *Le mécanisme de résolution est l'affinage (opérateur ρ : chaque grain donne 2^{n_∞} enfants, à n_∞ bits le cran). Un point est un point-fixe dégénéré de ρ : sa fibre est triviale, il n'a aucune sous-structure à révéler. Le mécanisme qui fabrique l'information tourne alors à vide, et l'information d'un point n'est définie qu'aux deux bornes :*

$$H(\{x\}) = 0 \quad (\text{nu, isolé, sans alternative}), \quad H(\text{point-limite}) = \aleph_0 \quad (\text{jamais refermé}),$$

rien entre les deux. La non-affinabilité du point est le certificat de son idéalité : un point est un grain dont on a oublié toute l'épaisseur.

Proof. À profondeur nulle, le singleton $\{x\}$ n'offre aucune alternative : $H = \log_2 1 = 0$. À profondeur infinie, l'adresse du point-limite ne se referme qu'après $\aleph_0$ crans : $H = \aleph_0$. Aucun cran intermédiaire n'existe pour un objet sans sous-structure, donc aucune valeur intermédiaire. $\square$

Remarque 1.69 (Le fil du chapitre). Un même geste traverse tout le chapitre : une *réduction qui oublie une profondeur*. La composition ($\Delta\mathcal{E} = -\mathcal{H}$) écrase des sous-segments ; la promotion ($\mathcal{H}_{\text{strate}} = m + h$) efface la résolution m et garde la forme h ; le passage grain $\rightarrow$ point écrase les grains en points. Néguentropie, entropie stratale et paradoxe du continu sont trois faces d'une même variation d'espérance de Hartley.

Remarque 1.70 (Limite épistémique). Toutes les quantités de ce chapitre sont des *capacités de distinction* (en bits), définies et calculées. Elles n'affirment aucune « évolution néguentropique » d'un système, aucune dualité matière/information, aucune onde physique : ces lectures resteraient des interprétations tant qu'aucune grandeur supplémentaire (dynamique, thermodynamique) n'est définie et mise en correspondance. Le résultat acquis est précis et borné : *la composition engendre une néguentropie informationnelle mesurable, biais et corrélation sont deux projections d'une même variation d'espérance de Hartley, et le continu se lit comme une entropie stratale dont la promotion efface la résolution et conserve la forme.*

1.13 Lecture spectrale de la déformation informationnelle

On applique la déformation informationnelle $\Delta\mathcal{I}_g = \log_2 |g'|$ à un signal physique déformé. Le logarithme transforme la déformation *multiplicative* d'amplitude en un terme *additif*, que la transformée de Fourier sépare du signal utile — à *condition* que leurs spectres ne se recouvrent pas (séparabilité). On obtient une lecture spectrale de la déformation, dont la loi de conservation $\Delta\mathcal{I}_g = -\Delta\mathcal{I}_{g^{-1}}$ fournit la correction. La méthode est l'analogue, dans le cadre du grain, de l'analyse *cepstrale* du traitement du signal. On énonce les conditions de validité et on les vérifie numériquement : récupération exacte en régime séparable, échec en régime recouvrant.

1.13.1 Déformation multiplicative d'un signal

Soit un signal physique $s(x)$ (amplitude, densité, intensité) mesuré sur un domaine continu, et une transformation g agissant sur le système (réponse d'un instrument, distorsion d'un canal, reparamétrage). En tenant compte de la conservation de la mesure, le signal observé après déformation est

Définition 1.71 (Signal déformé).

$$s_{\text{déf}}(y) = s(g^{-1}(y)) \cdot |(g^{-1})'(y)|.$$

Le premier facteur est le signal *reparamétré* par g^{-1} ; le second est le facteur jacobien, qui pèse l'amplitude par la déformation locale de la mesure.

Par la déformation informationnelle (document précédent), $|(g^{-1})'(y)| = 2^{\Delta\mathcal{I}_{g^{-1}}(y)}$, où $\Delta\mathcal{I}_{g^{-1}}(y) = \log_2 |(g^{-1})'(y)|$. Le facteur jacobien est donc l'exponentielle (en base 2) de la déformation informationnelle.

1.13.2 Le logarithme sépare, Fourier isole

Proposition 1.72 (Décomposition logarithmique). *En passant au logarithme, la déformation multiplicative devient additive :*

$$\boxed{\log_2 s_{\text{déf}}(y) = \underbrace{\log_2 s(g^{-1}(y))}_{\text{signal reparamétré}} + \underbrace{\Delta\mathcal{I}_{g^{-1}}(y)}_{\text{déformation}}.}$$

Proof. Directement, par la définition 1.71 et $\log_2(ab) = \log_2 a + \log_2 b$:

$$\log_2 s_{\text{déf}}(y) = \log_2 \left(s(g^{-1}(y)) \cdot 2^{\Delta\mathcal{I}_{g^{-1}}(y)} \right) = \log_2 s(g^{-1}(y)) + \Delta\mathcal{I}_{g^{-1}}(y). \quad \square$$

La transformée de Fourier $\mathcal{F}$ étant linéaire, le spectre du log-signal est la *somme* des deux spectres :

$$\mathcal{F}[\log_2 s_{\text{déf}}] = \mathcal{F}[\log_2(s \circ g^{-1})] + \mathcal{F}[\Delta\mathcal{I}_{g^{-1}}].$$

Si les deux termes occupent des *bandes de fréquences disjointes*, un simple filtrage isole $\mathcal{F}[\Delta\mathcal{I}_{g^{-1}}]$, donc $\Delta\mathcal{I}_{g^{-1}}$.

Définition 1.73 (Séparabilité spectrale). On dit que la déformation est *spectralement séparable* du signal si le support fréquentiel de $\Delta\mathcal{I}_{g^{-1}}$ et celui de $\log_2(s \circ g^{-1})$ sont (essentiellement) disjoints : il existe une bande B telle que $\mathcal{F}[\Delta\mathcal{I}_{g^{-1}}]$ y soit concentrée et $\mathcal{F}[\log_2(s \circ g^{-1})]$ négligeable hors de son complémentaire.

Proposition 1.74 (Lecture spectrale de la déformation). *Sous séparabilité (définition 1.73), le filtrage du log-signal sur la bande B restitue $\Delta\mathcal{I}_{g^{-1}}$, et la loi de conservation (document précédent) donne la déformation correctrice*

$$\Delta\mathcal{I}_g = -\Delta\mathcal{I}_{g^{-1}} \quad (\text{au transport de point par } g).$$

La correction du signal s'obtient en divisant par le facteur jacobien restitué, $2^{\Delta\mathcal{I}_{g^{-1}}}$.

Proof. Par séparabilité, $\mathcal{F}[\log_2 s_{\text{déf}}] \cdot \mathbf{1}_B = \mathcal{F}[\Delta\mathcal{I}_{g^{-1}}]$, dont la transformée inverse est $\Delta\mathcal{I}_{g^{-1}}$. La loi $\Delta\mathcal{I}_g = -\Delta\mathcal{I}_{g^{-1}}$ est le corollaire de réciproque. Diviser $s_{\text{déf}}$ par $2^{\Delta\mathcal{I}_{g^{-1}}}$ élimine le facteur jacobien, laissant le signal reparamétré. $\square$

1.13.3 Lien avec l'analyse cepstrale

Remarque 1.75 (Cepstre). La chaîne « logarithme puis Fourier pour séparer un produit » est exactement le principe du *cepstre* (spectre du logarithme du spectre) en traitement du signal, utilisé pour séparer une déformation multiplicative (réponse de canal, écho, distorsion d'instrument) d'un signal source. La déformation informationnelle $\Delta\mathcal{I}_g = \log_2 |g'|$ est précisément l'objet qui vit dans le domaine cepstral : le « quéfrence » de la déformation est distincte de celle du signal dès que l'une varie lentement et l'autre rapidement. Le cadre du grain retrouve ainsi une méthode physique établie, avec une interprétation informationnelle : le cepstre lit la déformation *en bits*.

1.13.4 Conditions de validité

Remarque 1.76 (Deux conditions, de natures différentes). (i) *Séparabilité spectrale* (définition 1.73) : indispensable. Si les spectres de la déformation et du signal se recouvrent, le filtrage mélange les deux et la lecture échoue. Cas favorable : déformation *lente* (basses fréquences) et signal *rapide* (hautes fréquences), ou inversement.

(ii) *Faible déformation*, pour la correspondance directe des spectres. La relation exacte fait intervenir $\Delta\mathcal{I}_{g^{-1}} = -\Delta\mathcal{I}_g \circ g^{-1}$: un *reparamétrage* par g^{-1} agit sur $\Delta\mathcal{I}_g$. Si $g \approx \text{Id}$ (petite déformation), $g^{-1} \approx \text{Id}$ et le reparamétrage est négligeable : les spectres de $\Delta\mathcal{I}_g$ et $\Delta\mathcal{I}_{g^{-1}}$ coïncident presque. Pour une forte déformation, g^{-1} étale le spectre et la correspondance se dégrade — la *valeur* ponctuelle reste exacte (loi de conservation), mais la *lecture spectrale* directe perd en fidélité.

Remarque 1.77 (Ce que Fourier renseigne, précisément). On peut donc préciser l'intuition initiale. Il est *faux* en général que « le spectre de $\Delta\mathcal{I}_{g^{-1}}$ égale celui de $-\Delta\mathcal{I}_g$ » : le reparamétrage g^{-1} redistribue les fréquences. Il est *vrai* que, sous séparabilité, le spectre du *log-signal* contient une composante isolable qui est $\Delta\mathcal{I}_{g^{-1}}$, d'où $-\Delta\mathcal{I}_g$ par conservation. Fourier ne relie pas les deux déformations entre elles ; il extrait la déformation du signal. C'est la formulation défendable.

Vérification numérique

On déforme un signal rapide (fréquence 60) par un gain d'amplitude lent (fréquence 3), spectralement séparables, puis on récupère $\Delta\mathcal{I}_{g^{-1}}$ par filtrage passe-bas du log-signal.

Régime	Erreur RMS de récupération de $\Delta\mathcal{I}$
Séparable (déformation freq 3, signal freq 60)	0,0% (exacte)
Recouvrant (déformation freq 58, signal freq 60)	100% (échec)

La séparabilité n'est pas un confort mais *la* condition : exacte quand elle est remplie, la méthode échoue totalement quand elle ne l'est pas.

```
import numpy as np
N = 2048
x = np.linspace(0, 1, N, endpoint=False)
s_source = 1.5 + np.cos(2*np.pi*60*x) # signal rapide (>0)
gain = np.exp(0.8*np.sin(2*np.pi*3*x)) # deformation lente : |g'|
dI_true = np.log2(gain) # DeltaI_{g^{-1}}

s_def = s_source * gain # signal deforme (multiplicatif)
logs = np.log2(s_def) # log -> somme (Prop. 2)

freqs = np.fft.rfftfreq(N, d=1.0/N)
F = np.fft.rfft(logs)
F[freqs > 10] = 0 # filtrage : bande de la deformation
dI_rec = np.fft.irfft(F, n=N); dI_rec -= dI_rec.mean()
err = np.sqrt(np.mean((dI_rec - (dI_true - dI_true.mean()))**2))
print("erreur RMS / amplitude :", round(err/np.std(dI_true)*100,1), "%") # ~0.0 %
```

1.13.5 Portée et limites

Remarque 1.78 (Acquis). Sur un signal physique, la déformation d'amplitude est multiplicative ; le logarithme la rend additive (proposition 1.72) ; Fourier l'isole sous séparabilité (proposition 1.74) ; la loi de conservation donne la correction. Le tout coïncide avec l'analyse cepstrale, dont il fournit une lecture informationnelle. L'intuition « Fourier renseigne la déformation » est ainsi validée — dans sa forme correcte : Fourier extrait la déformation du *signal*, non une déformation de l'autre.

Remarque 1.79 (Limites). (i) La séparabilité est requise et n'est pas toujours réalisée (signaux à large bande, déformations rapides). (ii) Le signal doit rester positif pour que $\log_2 s$ soit défini ; sinon on travaille sur l'enveloppe ou le module. (iii) Le reparamétrage g^{-1} limite la lecture spectrale *directe* au régime de faible déformation ; la loi de conservation, elle, reste exacte ponctuellement quel que soit le régime. (iv) Le résultat est métrique et suppose la conservation de la mesure sous g ; il ne fait intervenir aucune structure de corps.

1.14 Le cepstre-déformation comme néguentropie de composition

On montre que la déformation informationnelle $\Delta\mathcal{I}_g = \log_2 |g'|$, intégrée sur le domaine, *est* une néguentropie de composition : elle égale l'écart d'entropie différentielle que la transformation g injecte au signal, $h(Y) = h(X) + \mathbb{E}[\log_2 |g'|]$. Le cepstre en donne la lecture *échelle par échelle* : chaque bande de fréquences (qu'éfrence) apporte sa part de cette néguentropie. On formalise le résultat, on le démontre, et on le vérifie numériquement.

1.14.1 Rappel : deux objets déjà établis

- **Déformation informationnelle.** Pour g dérivable, $g' \neq 0$, la variation d'information locale au point x est $\Delta\mathcal{I}_g(x) = \log_2 |g'(x)|$ (le facteur jacobien lu en bits).
- **Néguentropie de composition.** Écart entre une entropie « décomposée » et une entropie « jointe » — une divergence, mesurant l'information qu'une structure porte par rapport à une référence.

On montre que le premier, *intégré*, est une instance du second : la référence est le signal source, la structure est le signal déformé.

1.14.2 Le résultat

Soit X une variable aléatoire de densité f_X sur un domaine continu, et $Y = g(X)$ son image par g (dérivable, strictement monotone, $g' \neq 0$). On note $h(\cdot)$ l'entropie différentielle en bits, $h(X) = -\int f_X \log_2 f_X$.

Théorème 1.80 (Le cepstre-déformation est une néguentropie de composition). *L'entropie différentielle se transforme par*

$$h(Y) = h(X) + \mathbb{E}[\log_2 |g'(X)|] = h(X) + \int \Delta\mathcal{I}_g(x) f_X(x) dx.$$

La néguentropie de composition injectée par g est donc

$$\mathcal{N}_g := h(Y) - h(X) = \mathbb{E}[\Delta\mathcal{I}_g] = \int \log_2 |g'(x)| f_X(x) dx :$$

l'espérance de la déformation informationnelle. Positive si g dilate en moyenne, négative si g contracte.

Proof. Par la formule de changement de variable, la densité de $Y = g(X)$ est $f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) |(g^{-1})'(y)| = f_X(x)/|g'(x)|$ avec $x = g^{-1}(y)$. Donc

$$h(Y) = - \int f_Y(y) \log_2 f_Y(y) dy = - \int f_X(x) \log_2 \frac{f_X(x)}{|g'(x)|} dx$$

(après le changement $y = g(x)$, $dy = |g'(x)|dx$, qui absorbe le jacobien de la mesure). En séparant le logarithme du quotient :

$$h(Y) = - \int f_X \log_2 f_X dx + \int f_X \log_2 |g'| dx = h(X) + \mathbb{E}[\log_2 |g'(X)|] = h(X) + \mathbb{E}[\Delta \mathcal{I}_g]. \quad \square$$

Remarque 1.81 (Pourquoi c'est bien une néguentropie de composition). $\mathcal{N}_g = h(Y) - h(X)$ est l'écart entre l'entropie de la strate « déformée » (Y) et celle de la strate « source » (X) — exactement la forme d'une néguentropie de composition (écart entre deux niveaux). La transformation g joue le rôle du raffinement : elle *compose* une nouvelle strate à partir de l'ancienne, et $\mathcal{N}_g$ mesure l'information de cette composition. Le signe indique le sens : g dilatante ($|g'| > 1$ en moyenne) *injecte* de la néguentropie ; g contractante en *retire*.

1.14.3 Lecture cepstrale : la néguentropie par échelle

Le théorème donne la néguentropie *totale* $\mathcal{N}_g = \mathbb{E}[\Delta \mathcal{I}_g]$. Le cepstre en donne la *décomposition spectrale*. Écrivons $\Delta \mathcal{I}_g(x) = \log_2 |g'(x)|$ et sa transformée de Fourier $\widehat{\Delta \mathcal{I}_g} = \mathcal{F}[\Delta \mathcal{I}_g]$.

Proposition 1.82 (Néguentropie par quéfrence). *La néguentropie injectée se répartit sur les fréquences (quéfrences) du cepstre : par l'identité de Parseval appliquée à $\Delta \mathcal{I}_g$ pondérée par f_X , chaque bande B de quéfrences apporte une contribution*

$$\mathcal{N}_g^{(B)} = \int_B \widehat{\Delta \mathcal{I}_g}(\nu) \widehat{f_X}(\nu)^* d\nu, \quad \mathcal{N}_g = \sum_B \mathcal{N}_g^{(B)}.$$

Une déformation lente (basse quéfrence) et une déformation rapide (haute quéfrence) contribuent à des bandes distinctes : le cepstre sépare les échelles de la néguentropie.

Proof. $\mathcal{N}_g = \int \Delta \mathcal{I}_g(x) f_X(x) dx$ est un produit scalaire $\langle \Delta \mathcal{I}_g, f_X \rangle$ dans L^2 . Par Parseval, $\langle \Delta \mathcal{I}_g, f_X \rangle = \langle \widehat{\Delta \mathcal{I}_g}, \widehat{f_X} \rangle = \int \widehat{\Delta \mathcal{I}_g}(\nu) \widehat{f_X}(\nu)^* d\nu$. La partition du domaine fréquentiel en bandes B donne la somme. $\square$

Remarque 1.83 (Interprétation). La néguentropie de composition n'est pas un scalaire opaque : le cepstre la *ventile* par échelle. On lit quelle échelle de la déformation (grossière / fine) porte quelle part de l'information injectée. C'est la jonction entre le document « lecture spectrale » (le cepstre sépare la déformation du signal) et la néguentropie de composition (l'écart d'information entre strates) : *le cepstre lit la néguentropie de composition échelle par échelle.*

1.14.4 Vérification numérique

Exemple : $X \sim \mathcal{U}[0, 1]$, $g(x) = x^2$. Alors $h(X) = 0$ (uniforme), et $\mathcal{N}_g = \mathbb{E}[\log_2 |g'|] = \int_0^1 \log_2(2x) dx$.

Quantité	Valeur (bits)
$h(X)$ (uniforme sur $[0, 1]$)	0,0000
$\mathcal{N}_g = \int_0^1 \log_2(2x) dx$	-0,4427
$h(Y)$ calculée directement ($Y = X^2$)	-0,4427
$h(X) + \mathcal{N}_g$	-0,4427

Les deux voies coïncident : $h(Y) = h(X) + \mathcal{N}_g$ (théorème 1.80). La néguentropie est ici *négative* ($-0,44$ bit) : $g(x) = x^2$ contracte près de 0 (là où $|g'| = 2x < 1$), retirant de l'information au signal uniforme. Code :

```
import numpy as np
from scipy import integrate
log2 = np.log2

# N_g = E[log2|g'|] pour X uniforme, g(x)=x^2 => int_0^1 log2(2x) dx
N_g, _ = integrate.quad(lambda x: log2(2*x), 0, 1)

# h(Y) direct : Y=X^2, densite f_Y(y)=1/(2 sqrt y)
fY = lambda y: 1/(2*np.sqrt(y))
hY, _ = integrate.quad(lambda y: -fY(y)*log2(fY(y)), 1e-12, 1)

print("N_g = E[log2|g'|] =", round(N_g, 4)) # -0.4427
print("h(Y) direct =", round(hY, 4)) # -0.4427
print("h(X)+N_g = 0 + N_g =", round(N_g, 4)) # -0.4427 => egalite
```

1.14.5 Portée et limites

Remarque 1.84 (Acquis). La déformation informationnelle intégrée $\mathbb{E}[\Delta \mathcal{I}_g]$ est la néguentropie de composition que g injecte, via l'identité exacte $h(Y) = h(X) + \mathbb{E}[\log_2 |g'|]$. Le cepstre en donne la décomposition par échelle (proposition 1.82). Le pont entre déformation jacobienne, cepstre et néguentropie est ainsi fermé.

Remarque 1.85 (Limites). (i) $\mathcal{N}_g$ est un écart d'entropie *différentielle* : signé, il peut être négatif (contraction), et n'est pas une information de Hartley absolue. (ii) Le résultat suppose g dérivable strictement monotone, $g' \neq 0$ (aux points critiques, $\log_2 |g'| \rightarrow -\infty$). (iii) La lecture cepstrale par bandes suppose la séparabilité spectrale (document précédent). (iv) Tout est *informationnel* et *métrique* : $\mathcal{N}_g$ mesure une information en bits, sans engagement physique ni structure de corps.

Chapter 2

Dynamique

Résumé du chapitre. Ce chapitre développe la dynamique informationnelle du programme du grain. On part de la *déformation informationnelle* sous une application ($\Delta\mathcal{I}_g = \log_2 |g'|$, statique), puis on passe au temps avec la *relation fondamentale de la dynamique généralisée* (RFDG) et sa *tour de dérivées temporelles*. On montre que la néguentropie de composition de cette tour *sature* exactement au rang de fermeture — définissant une *complexité dynamique* — et que la *non-saturation* est la signature du *chaos* (avec Takens et l'exposant de Lyapunov). Chaque résultat est démontré, chiffré, et accompagné de son code ; les analogies de forme sont signalées comme telles.

I — Déformation informationnelle. Sur un domaine continu, une application déforme la mesure locale ; le jacobien, lu au logarithme, donne une variation d'information additive. C'est le socle statique de la dynamique qui suit.

2.1 Information de Hartley sur un domaine continu

Sur un domaine continu, l'information de Hartley d'une région ne s'écrit pas $\log_2 N$ (aucun N fini), mais se lit à une résolution $\varepsilon > 0$: une région de longueur ℓ contient ℓ/ε grains, d'où

Définition 2.1 (Information de Hartley à résolution ε).

$$\mathcal{I}_\varepsilon(\ell) = \log_2 \frac{\ell}{\varepsilon} = \log_2 \ell - \log_2 \varepsilon \quad \text{bits.}$$

Le terme $-\log_2 \varepsilon$ est la *résolution* (commune à tout le domaine) ; le terme $\log_2 \ell$ dépend de la région. C'est la lecture continue de l'information de Hartley, cohérente avec l'entropie stratale $\mathcal{H}_{\text{strate}} = m + h$ (ici $m = -\log_2 \varepsilon$).

Une application dérivable $g : E \rightarrow F$ entre deux domaines continus déforme les longueurs : un segment dx au point x devient $|g'(x)| dx$ au point $y = g(x)$. C'est la *déformation jacobienne*, qui sur le continu a un sens métrique direct — le facteur de dilatation local de la mesure.

2.2 La déformation informationnelle

Proposition 2.2 (Déformation informationnelle locale). Soit $g : E \rightarrow F$ dérivable, $g'(x) \neq 0$. Un grain de taille ε au point x a pour image un grain de taille $\varepsilon' = |g'(x)| \varepsilon$ au point $y = g(x)$. La variation d'information locale induite par g est

$$\Delta \mathcal{I}_g(x) = \mathcal{I}_\varepsilon^F(\text{grain en } y) - \mathcal{I}_\varepsilon^E(\text{grain en } x) = \log_2 |g'(x)| \quad \text{bits.}$$

Le facteur jacobien multiplicatif $|g'(x)|$ devient une déformation informationnelle additive $\log_2 |g'(x)|$.

Proof. Le grain source, de taille ε , porte l'information $\mathcal{I}^E = \log_2(\varepsilon/\varepsilon_0)$ à une résolution de référence ε_0 . Son image a la taille $\varepsilon' = |g'(x)|\varepsilon$, donc porte $\mathcal{I}^F = \log_2(\varepsilon'/\varepsilon_0)$. La différence est

$$\Delta \mathcal{I}_g(x) = \mathcal{I}^F - \mathcal{I}^E = \log_2 \frac{\varepsilon'}{\varepsilon_0} - \log_2 \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \log_2 \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} = \log_2 |g'(x)|.$$

La résolution de référence ε_0 s'annule : la déformation informationnelle est *intrinsèque*, indépendante de la résolution. $\square$

Remarque 2.3 (C'est un objet de la couche « forme »). L'annulation de ε_0 n'est pas un accident : elle traduit que $\Delta \mathcal{I}_g$ vit dans la couche *forme* de l'entropie stratale $m + h$, non dans la couche *résolution* m . La promotion, qui efface m et garde h , préserverait donc $\Delta \mathcal{I}_g$: la déformation informationnelle est ce qui *survit* à la promotion.

Remarque 2.4 (Signe : dilatation vs contraction). $\Delta \mathcal{I}_g(x)$ peut être négatif. Si $|g'(x)| > 1$ (dilatation), $\Delta \mathcal{I}_g > 0$: les grains s'écartent, on en distingue davantage, l'information locale *croît*. Si $|g'(x)| < 1$ (contraction), $\Delta \mathcal{I}_g < 0$: les grains se resserrent, l'information locale *décroît*. Cette quantité signée est une *entropie différentielle* locale (comme le h stratal), non une information de Hartley absolue — laquelle reste toujours positive. À ne pas confondre.

2.3 La loi de réciproque

On applique la proposition 2.2 à la formule de la dérivée d'une réciproque, $(g^{-1})'(y) = 1/g'(g^{-1}(y))$.

Corollaire 2.5 (Conservation par réciproque). *Pour g bijective dérivable, $g' \neq 0$, en tout point $y = g(x)$,*

$$\Delta\mathcal{I}_{g^{-1}}(y) = -\Delta\mathcal{I}_g(x), \quad y = g(x).$$

La déformation informationnelle de la réciproque est l'opposée de celle de g (au point transporté par g). En particulier, l'aller-retour ne déforme rien :

$$\Delta\mathcal{I}_g(x) + \Delta\mathcal{I}_{g^{-1}}(g(x)) = 0.$$

Proof. Par la proposition 2.2 appliquée à g^{-1} au point y ,

$$\Delta\mathcal{I}_{g^{-1}}(y) = \log_2 |(g^{-1})'(y)| = \log_2 \frac{1}{|g'(g^{-1}(y))|} = -\log_2 |g'(x)| = -\Delta\mathcal{I}_g(x),$$

où l'on a posé $x = g^{-1}(y)$, i.e. $y = g(x)$. La somme est alors nulle par construction. $\square$

Remarque 2.6 (Ce que le logarithme a transformé). Le lemme différentiel de départ dit que le facteur jacobien de g^{-1} est l'*inverse multiplicatif* de celui de g : $(g^{-1})' = 1/(g' \circ g^{-1})$. Dans le registre informationnel, le $\log_2$ transforme cet inverse multiplicatif en *opposé additif*. « Inverse de la déformation » devient « négatif de la déformation informationnelle ». Le contenu est le même ; le logarithme en donne la forme conservative : *ce qu'une transformation crée en information locale, sa réciproque le rend exactement*.

Remarque 2.7 (Point d'évaluation : ne pas l'oublier). Les deux déformations ne sont pas égales « sur F » comme fonctions : $\Delta\mathcal{I}_g$ est évaluée en x , $\Delta\mathcal{I}_{g^{-1}}$ en $y = g(x)$. La liaison $y = g(x)$ est le cœur de l'énoncé — c'est un transport de point, non une égalité de fonctions sur un domaine commun. L'égalité $\Delta\mathcal{I}_{g^{-1}} = -\Delta\mathcal{I}_g$ vaut point par point *via* g .

2.4 Additivité en chaîne

Proposition 2.8 (Composition). *Pour $g_1 : E \rightarrow F$ et $g_2 : F \rightarrow G$ dérivables, la déformation informationnelle de la composée est la somme des déformations :*

$$\Delta\mathcal{I}_{g_2 \circ g_1}(x) = \Delta\mathcal{I}_{g_2}(g_1(x)) + \Delta\mathcal{I}_{g_1}(x).$$

Proof. Par la règle de chaîne, $(g_2 \circ g_1)'(x) = g_2'(g_1(x)) \cdot g_1'(x)$, d'où

$$\Delta\mathcal{I}_{g_2 \circ g_1}(x) = \log_2 |g_2'(g_1(x)) g_1'(x)| = \log_2 |g_2'(g_1(x))| + \log_2 |g_1'(x)| = \Delta\mathcal{I}_{g_2}(g_1(x)) + \Delta\mathcal{I}_{g_1}(x). \quad \square$$

Remarque 2.9. La déformation informationnelle est donc un *morphisme* du groupe des transformations (composition) vers l'addition des bits — exactement comme l'information de Hartley transforme le produit cartésien en somme. Le corollaire de réciproque en est le cas particulier $g_2 = g^{-1}$, $g_1 = g$: la somme des déformations d'un aller-retour est celle de l'identité, soit 0.

2.5 Vérifications numériques

Cas non trivial : $g(x) = x^2$ sur $]0, +\infty[$. $g'(x) = 2x$, donc $\Delta\mathcal{I}_g(x) = \log_2(2x) = 1 + \log_2 x$. Réciproque $g^{-1}(y) = \sqrt{y}$, $(g^{-1})'(y) = 1/(2\sqrt{y})$.

x	$g'(x) = 2x$	$\Delta\mathcal{I}_g(x)$	$y = g(x)$	$\Delta\mathcal{I}_{g^{-1}}(y)$	somme
0,5	1	0,0000	0,25	0,0000	0
1	2	+1,0000	1	-1,0000	0
2	4	+2,0000	4	-2,0000	0
4	8	+3,0000	16	-3,0000	0

Aller et retour s'annulent partout (corollaire 2.5).

Cas affine : $g(x) = ax$. $\Delta\mathcal{I}_g = \log_2 a$, constante sur tout le domaine : -1 bit pour $a = \frac{1}{2}$, $+1$ pour $a = 2$, $+3$ pour $a = 8$. Une dilatation uniforme déplace l'information d'un nombre fixe de bits.

Additivité en chaîne : $g_1(x) = 2x$, $g_2(u) = u^2$. $(g_2 \circ g_1)(x) = 4x^2$, dérivée $8x$. En $x = 1$: $\Delta\mathcal{I}_{g_1} = \log_2 2 = 1$, $\Delta\mathcal{I}_{g_2}(g_1(1)) = \log_2 4 = 2$, somme $3 = \log_2 8 = \Delta\mathcal{I}_{g_2 \circ g_1}(1)$ (proposition 2.8).

```
import math
log2 = math.log2

# g(x)=x^2 : conservation aller-retour
for x in [0.5, 1, 2, 4]:
    dg = log2(2*x) # DeltaI_g = log2|g'| = log2(2x)
    dginv = log2(1/(2*x)) # DeltaI_g^-1 au point y=g(x)
    print("x=%.1f dI_g=%.4f dI_ginv=%.4f somme=%.1f" % (x, dg, dginv, dg+dginv))
# somme = 0 partout

# chaîne g2 o g1 : additivité (g1'=2 ; g2'(g1(x))=2*g1(x)=4 ; total log2(8)=3)
print("chaîne :", log2(2), "+", log2(4), "=", log2(2)+log2(4)) # 1 + 2 = 3
```

2.6 Portée et limites

Remarque 2.10 (Ce que le résultat établit). Sur un domaine continu, la déformation jacobienne a a une lecture informationnelle exacte, $\Delta\mathcal{I}_g = \log_2 |g'|$, et la formule de la réciproque devient une loi de conservation additive $\Delta\mathcal{I}_{g^{-1}} = -\Delta\mathcal{I}_g$. C'est la version rigoureuse de l'intuition « la déformation par la réciproque est l'inverse de la déformation par g » : sur le continu, l'inverse multiplicatif devient un opposé additif, parce que la déformation agit sur une *mesure* (la longueur des grains) que le logarithme convertit en bits.

Remarque 2.11 (Limites à ne pas franchir). Trois réserves. (i) $\Delta\mathcal{I}_g$ est une *entropie différentielle* locale (signée), non une information de Hartley absolue : elle peut être négative et ne se cumule proprement qu'à résolution fixée. (ii) L'hypothèse $g'(x) \neq 0$ est essentielle : là où $g' = 0$, la déformation informationnelle diverge ($\log_2 0 = -\infty$) et la réciproque n'est pas dérivable — c'est le cas des points critiques, analogues informationnels des grains non inversibles. (iii) Le résultat est *métrique* (il dépend de la mesure de longueur sur E et F) : il ne fait pas intervenir de structure de corps, seulement une mesure et une application dérivable. On ne prétend donc rien de plus que ce que le jacobien, lu au logarithme, permet.

II — RFDG et tour de dérivées temporelles. On passe au temps : la relation fondamentale de la dynamique généralisée itérée engendre la tour des dérivées successives de l'information.

2.7 Rappel : la RFDG

La relation fondamentale de la dynamique généralisée étend $\mathbf{F} = \dot{\mathbf{q}}$ à une *quantité dynamique* quelconque $\mathbf{q}$ (non nécessairement la quantité de mouvement). Dans le registre informationnel,

$\mathbf{q} = \mathcal{I}$ (information), la variation d'information est le *sens* $\mathbf{S} = \dot{\mathcal{I}}$, et la « force » informationnelle est $\mathbf{F} = \dot{\mathbf{S}} = \ddot{\mathcal{I}}$.

2.8 La cascade itérée

Définition 2.12 (Tour RFDG). On itère la RFDG en traitant chaque étage comme la quantité dynamique du suivant :

$$\mathbf{q} \xrightarrow{d/dt} \mathbf{F}_1 = \dot{\mathbf{q}} \xrightarrow{d/dt} \mathbf{F}_2 = \dot{\mathbf{F}}_1 = \ddot{\mathbf{q}} \xrightarrow{d/dt} \mathbf{F}_3 = \ddot{\dot{\mathbf{q}}} \xrightarrow{d/dt} \dots$$

La *tour RFDG* est la suite $(\mathbf{q}^{(n)})_{n \geq 0}$ des dérivées temporelles successives de $\mathbf{q}$.

Remarque 2.13 (Les étages ont des noms en physique). Pour $\mathbf{q}$ une position, la tour est : position, vitesse, accélération, puis *jerk* (à-coup), *snap*, *crackle*, *pop*. Le jerk est une grandeur réelle (confort, usure, contrôle de trajectoire). Itérer la dérivée est donc légitime et non trivial.

2.9 Le critère d'action récursif

C'est le cœur de la lecture par la RFDG — indépendant de toute considération dimensionnelle. La RFDG fournit un *critère d'existence d'action* qui se répète identiquement à chaque niveau.

Définition 2.14 (Régime inertiel d'un niveau). Une quantité dynamique $\mathbf{u}$ est dite en *régime inertiel* (livrée à elle-même, aucune action) lorsqu'elle suit sa *loi libre*. Dans le cas newtonien standard, la loi libre est la constance de la dérivée : $\dot{\mathbf{u}} = 0$.

Proposition 2.15 (Critère d'action, invariant par niveau). *Pour la tour $\mathbf{F}_0 = \mathbf{q}$, $\mathbf{F}_1 = \dot{\mathbf{q}}$, $\mathbf{F}_2 = \ddot{\mathbf{q}}$, ... (loi libre : constance), on a à chaque niveau n :*

$$\mathbf{F}_{n+1} = \dot{\mathbf{F}}_n \neq 0 \iff \text{une action de niveau } n+1 \text{ module } \mathbf{F}_n.$$

Le critère est le même à tous les niveaux : variation $\Rightarrow$ action. En particulier, $\dot{\mathbf{F}}_1 \neq 0$ (force variable) signale une force de second ordre $\mathbf{F}_2$ qui s'imprime sur la force et la module ; $\dot{\mathbf{F}}_1 = 0$ (force constante) signale son absence (la force est en régime inertiel).

Proof. Par définition 2.14, $\mathbf{F}_n$ livrée à elle-même suit sa loi libre, ici $\dot{\mathbf{F}}_n = 0$ (constance). Tout écart $\dot{\mathbf{F}}_n \neq 0$ est donc, par le schéma même de la RFDG, la signature d'une action extérieure agissant sur $\mathbf{F}_n$ — que l'on nomme $\mathbf{F}_{n+1}$. Le raisonnement est identique à celui du niveau $0 \rightarrow 1$ (quantité de mouvement constante = pas de force ; variable = force), appliqué à $\mathbf{F}_n$ comme nouvelle quantité dynamique. L'équivalence vaut donc à chaque niveau, sans hypothèse supplémentaire. $\square$

Remarque 2.16 (Ce que le critère établit, et ce qu'il n'engage pas). Le critère est *structural*, non dimensionnel : il porte sur la *présence ou l'absence* de variation, pas sur les unités. En ce sens précis, $\mathbf{F}_2$ joue le rôle *fonctionnel* d'une force — une action qui modifie une quantité dynamique — exactement comme $\mathbf{F}_1$. L'expression « $\mathbf{F}_2$ est de l'ordre d'une force » est donc vraie *fonctionnellement* : c'est une action modulatrice. La question de son homogénéité dimensionnelle (§2.10) est distincte et ne l'atteint pas.

Remarque 2.17 (Dépendance au régime inertiel). Le critère suppose une *loi libre* fixée. Ici, « pas d'action = constance » ($\dot{\mathbf{F}}_n = 0$). Mais la loi libre dépend de la métrique du niveau : on a vu ailleurs que, dans la métrique stratale logarithmique, le régime libre n'est pas la constance mais l'exponentielle ($\dot{r}/r = \text{const}$). Si un niveau possède une telle métrique, « constant » doit être remplacé par « suit la loi libre du niveau », et le critère se généralise en

$$\mathbf{F}_n \text{ s'écarte de sa loi libre } \iff \text{action de niveau } n+1.$$

La forme « variation $\Rightarrow$ action » est le cas particulier où la loi libre est la constance. À poser explicitement selon le niveau.

2.10 Les dimensions : une précision subordonnée, non une objection

Le critère d'action (§précédent) est complet en lui-même. La remarque dimensionnelle qui suit ne le conteste pas : elle précise seulement la *lecture* de « de l'ordre d'une force », et n'intervient que si l'on écrit une équation mêlant plusieurs niveaux.

Proposition 2.18 (Non-homogénéité de la tour). *Si $[\mathbf{q}] = Q$ et $[t] = T$, alors $[\mathbf{q}^{(n)}] = Q T^{-n}$. Les étages de la tour ont des dimensions deux à deux distinctes : $\mathbf{F}_1 = \dot{\mathbf{q}}$ est en Q/T , $\mathbf{F}_2 = \ddot{\mathbf{q}}$ en Q/T^2 , etc. En particulier, $\dot{\mathbf{F}}_1$ n'est pas de l'ordre de $\mathbf{F}_1$: c'est une force par unité de temps.*

Proof. Chaque dérivation d/dt divise la dimension par T . Par récurrence, $[\mathbf{q}^{(n)}] = Q T^{-n}$, valeurs distinctes pour des n distincts. $\square$

Deux registres à ne pas confondre. « $\mathbf{F}_2$ est de l'ordre d'une force » est vrai au sens *fonctionnel* (une action qui module une quantité dynamique, critère 2.15) mais non au sens *dimensionnel* : $\dot{\mathbf{F}}_1$ est en Q/T^2 , pas en Q/T . Les deux affirmations coexistent sans se contredire. La distinction ne devient contraignante que si l'on *additionne ou identifie* des étages de niveaux différents dans une même équation : il faut alors un facteur de temps caractéristique τ rétablissant l'homogénéité ($\tilde{\mathbf{F}}_n = \tau^{n-1} \mathbf{F}_n$). Tant que l'on reste au niveau du *critère d'action* (variation $\Rightarrow$ action), aucun facteur n'est requis et le raisonnement de la RFDG est complet tel quel.

2.11 La fermeture : quand la tour retombe sur elle-même

Une tour infinie n'a d'intérêt dynamique que si elle *se referme* : si un étage se ré-exprime en fonction des précédents, donnant une équation d'ordre fini. Ce n'est pas automatique.

Proposition 2.19 (Critère de fermeture). *La tour se ferme à l'ordre 2 — $\ddot{\mathbf{q}} = -\omega^2 \mathbf{q}$ — si et seulement si la loi d'évolution est harmonique, $\mathbf{q}(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$. Pour une loi quelconque (p. ex. polynomiale), la tour ne se ferme pas : elle décroît en dimension puis s'annule (polynôme) ou ne se stabilise jamais.*

Proof. ($\Leftarrow$) Si $\mathbf{q} = A \cos(\omega t + \varphi)$, alors $\ddot{\mathbf{q}} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 \mathbf{q}$: la dérivée seconde retombe sur $\mathbf{q}$, fermeture à l'ordre 2. ($\Rightarrow$) Si $\ddot{\mathbf{q}} = -\omega^2 \mathbf{q}$, les solutions sont exactement les $A \cos(\omega t + \varphi)$ (équation de l'oscillateur). *Contre-exemple polynomial* : $\mathbf{q} = t^3$ donne $\dot{\mathbf{q}} = 3t^2$, $\ddot{\mathbf{q}} = 6t$, $\ddot{\mathbf{q}} = 6$, $\mathbf{q}^{(4)} = 0$: la tour s'éteint sans se refermer sur $\mathbf{q}$. $\square$

Remarque 2.20 (C'est l'auto-similarité temporelle). La fermeture harmonique est la condition « la variation de la variation renvoie vers la quantité de départ » : elle n'est vraie que pour une évolution auto-similaire dans le temps (le cosinus, invariant par double dérivation au signe et au facteur près). C'est une *propriété de la loi*, non une généralité de la RFDG.

2.12 Récupération de l'oscillateur informationnel

Théorème 2.21 (La RFDG itérée informationnelle est l'oscillateur). *Dans le registre informationnel, sous la loi stratale $\dot{\theta}_k = 2\dot{\theta}_{k-1}$ (récurrence des phases du programme), la tour RFDG appliquée à $\mathcal{I}(t)$ se ferme à l'ordre 2 en*

$$\ddot{\mathcal{I}} = -(2\omega)^2 \left(\mathcal{I} - \frac{1}{2} \right),$$

l'oscillateur informationnel, d'équilibre $\mathcal{I}_{\text{eq}} = 1/2$ et de raideur $(2\omega)^2$ multipliée par 4 à chaque niveau.

Proof. La récurrence $\dot{\theta}_k = 2\dot{\theta}_{k-1}$ fixe une pulsation 2ω au niveau considéré. L'information bornée $\mathcal{I} = \cos^2(\Delta\theta) = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\Delta\theta)$ évolue harmoniquement en $2\Delta\theta$; sa dérivée seconde retombe sur $\mathcal{I} - \frac{1}{2}$ (fermeture, proposition 2.19). On vérifie que $\mathcal{I}(t) = \frac{1}{2} + A \cos(2\omega t)$ satisfait exactement $\ddot{\mathcal{I}} + (2\omega)^2(\mathcal{I} - \frac{1}{2}) = 0$. $\square$

Vérification symbolique :

```
import sympy as sp
t, w, A = sp.symbols('t omega A', positive=True)
I = sp.Rational(1,2) + A*sp.cos(2*w*t) # information bornee (oscillateur)
lhs = sp.diff(I, t, 2) # ddot I
rhs = -(2*w)**2 * (I - sp.Rational(1,2)) # -(2w)^2 (I - 1/2)
print(sp.simplify(lhs - rhs)) # 0 => fermeture exacte a l'ordre 2

q = t**3 # contre-exemple : loi polynomiale
print([sp.diff(q, t, n) for n in range(5)]) # t^3, 3t^2, 6t, 6, 0 : pas de fermeture
```

Remarque 2.22 (Ce que l'itération apporte). La RFDG itérée n'est pas une nouvelle physique : c'est la lecture unifiée de la tour des dérivées. Son intérêt est le *critère de fermeture* : il dit quand une cascade infinie se réduit à une dynamique d'ordre fini. L'oscillateur informationnel en est l'unique cas (ordre 2) déjà établi dans le programme ; la RFDG itérée le *dérive* comme la fermeture harmonique de la tour, reliant ainsi la « force informationnelle » $\ddot{\mathcal{I}}$ à un résultat démontré.

2.13 Portée et limites

Remarque 2.23 (Acquis). La cascade $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, \dots$ est bien définie (tour des dérivées temporelles). Son résultat central est le *critère d'action récursif* (proposition 2.15) : à chaque niveau, variation $\Rightarrow$ action — une force variable subit une force de second ordre qui la module. Ce critère est structurel et invariant par niveau. La non-homogénéité dimensionnelle (proposition 2.18) est un point subordonné : « de l'ordre d'une force » vaut fonctionnellement, non dimensionnellement. Enfin la tour se referme à l'ordre fini ssi la loi est auto-similaire (proposition 2.19) ; dans le registre informationnel sous la récurrence stratale, la fermeture donne l'oscillateur informationnel (théorème 2.21).

Remarque 2.24 (Limites). (i) La tour requiert $\mathbf{q}(t)$ suffisamment dérivable. (ii) Sans loi d'évolution explicite, la tour est une suite formelle sans contenu dynamique : la loi ($\dot{\theta}_k$, ou toute autre) est indispensable, comme établi antérieurement. (iii) Le résultat est *cinématique/informationnel* : $\ddot{\mathcal{I}}$ est une accélération d'information, non une force physique en newtons. Aucune grandeur mesurable en unités mécaniques n'est engagée.

III — Néguentropie de composition de la tour. La corrélation totale de la tour sature au rang de fermeture, définissant la complexité dynamique.

2.14 La tour comme système de composantes

La tour RFDG (§II) est la suite des dérivées temporelles $\mathcal{I}^{(0)} = \mathcal{I}$, $\mathcal{I}^{(1)} = \dot{\mathcal{I}}$, $\mathcal{I}^{(2)} = \ddot{\mathcal{I}}, \dots$. On la lit ici comme un *vecteur d'état* dont les composantes sont les étages.

Définition 2.25 (Néguentropie de composition de la tour). Au rang N , la néguentropie de composition des $N+1$ premiers étages est leur corrélation totale

$$\mathcal{N}_N = \text{TC}(\mathcal{I}^{(0)}, \dots, \mathcal{I}^{(N)}) = \sum_{n=0}^N \mathcal{H}(\mathcal{I}^{(n)}) - \mathcal{H}(\mathcal{I}^{(0)}, \dots, \mathcal{I}^{(N)}).$$

Elle mesure la redondance entre étages : nulle s'ils sont indépendants, maximale s'ils sont déterminés les uns par les autres.

2.15 Saturation au rang de fermeture

Théorème 2.26 (Saturation $\Leftrightarrow$ fermeture). *La néguentropie de composition de la tour sature au rang n — c'est-à-dire $\mathcal{N}_N = \mathcal{N}_n$ pour tout $N \geq n$ — si et seulement si la tour se referme à l'ordre n , i.e. $\mathcal{I}^{(n)}$ est fonction des $\mathcal{I}^{(0)}, \dots, \mathcal{I}^{(n-1)}$.*

Proof. La corrélation totale s'accroît d'un étage par l'information conditionnelle de cet étage sachant les précédents :

$$\mathcal{N}_N - \mathcal{N}_{N-1} = \mathcal{H}(\mathcal{I}^{(N)}) - \mathcal{H}(\mathcal{I}^{(N)} | \mathcal{I}^{(0)}, \dots, \mathcal{I}^{(N-1)}) = I(\mathcal{I}^{(N)}; \mathcal{I}^{(0)}, \dots, \mathcal{I}^{(N-1)}),$$

l'information mutuelle entre le nouvel étage et les précédents. Cet incrément *sature* (devient nul) exactement quand $\mathcal{I}^{(N)}$ n'apporte plus rien de neuf, i.e. quand $\mathcal{H}(\mathcal{I}^{(N)} | \text{précédents}) = \mathcal{H}(\mathcal{I}^{(N)})$ au sens déterministe : $\mathcal{I}^{(N)}$ est fonction des précédents. Or c'est la définition de la fermeture à l'ordre n : dès $\mathcal{I}^{(n)} = \Phi(\mathcal{I}^{(0)}, \dots, \mathcal{I}^{(n-1)})$, tous les étages suivants le sont aussi (par dérivation), leur information conditionnelle est nulle, et $\mathcal{N}_N = \mathcal{N}_n$ pour $N \geq n$. Réciproquement, si $\mathcal{N}$ sature au rang n , l'étage n a une information conditionnelle nulle, donc est déterminé par les précédents : fermeture. $\square$

Ce que « sature à l'ordre n » veut dire. Ce n'est *pas* que la néguentropie *vaut* n bits. C'est que le *rang de saturation* est n : à partir du n -ième étage, la néguentropie n'augmente plus. La *valeur* en bits dépend des amplitudes ; le *rang* est un entier, la complexité dynamique.

Définition 2.27 (Complexité dynamique). L'ordre de fermeture n — rang de saturation de la néguentropie de composition de la tour — est la *complexité dynamique* du système : le nombre de degrés de liberté informationnels indépendants nécessaires pour spécifier son état complet.

2.16 Les trois régimes

Système	Loi	Ordre n	Sens dynamique
Relaxation	$\dot{\mathcal{I}} = -\mathcal{I}/\tau$	1	le sens décroît vers un équilibre
Oscillateur	$\ddot{\mathcal{I}} = -\omega^2(\mathcal{I} - \frac{1}{2})$	2	le sens est cyclique
Inépuisable	pas de fermeture	∞	chaque dérivée apporte du neuf

Remarque 2.28 (L'oscillateur informationnel est l'ordre 2). Le cas $n = 2$ est exactement l'oscillateur informationnel du programme, $\ddot{\mathcal{I}} = -(2\omega)^2(\mathcal{I} - \frac{1}{2})$: sa tour sature à l'ordre 2, l'état complet tient en $(\mathcal{I}, \dot{\mathcal{I}})$, et tous les étages supérieurs sont déterminés. Le « sens cyclique » est la signature d'une complexité dynamique 2.

2.17 Vérification numérique

On construit la tour des dérivées d'un signal et l'on mesure, à chaque étage, la *variance résiduelle* après régression sur les étages précédents (proxy de l'information conditionnelle : nulle = étage déterminé = redondant).

Signal	étage 1	étage 2	étage 3	rang de fermeture
$\cos(\omega t)$ (harmonique)	1,0	$\sim 10^{-20}$	$\sim 10^{-15}$	2
$e^{-t/\tau}$ (relaxation)	$\sim 10^{-26}$	$\sim 10^{-19}$	$\sim 10^{-12}$	1
3 modes incommensurables	1,0	0,48	0,18	6 ($= 2 \times 3$)

Variance résiduelle relative : ~ 1 (étage indépendant, information nouvelle) ou ~ 0 (étage redondant, déterminé). Le rang où elle s'effondre est l'ordre de fermeture. Pour 3 modes, la fermeture est à l'ordre 6 (deux crans par mode). Code :

```
import numpy as np
def saturation(signal, max_order=6, dt=1e-3):
    tower = [signal]
    for _ in range(max_order):
        tower.append(np.gradient(tower[-1], dt)) # etage suivant = derivee
    tower = [t[max_order:-max_order] for t in tower]
    for n in range(1, len(tower)):
        X = np.vstack(tower[:n]).T # etages precedents
        coef, *_ = np.linalg.lstsq(X, tower[n], rcond=None)
        res = np.var(tower[n] - X @ coef) / np.var(tower[n]) # ~0 => redondant
        print(" etage %d : variance residuelle relative = %.2e" % (n, res))

t = np.linspace(0, 20, 20000); dt = t[1]-t[0]
saturation(np.cos(2*t), dt=dt) # sature a l'ordre 2
saturation(np.exp(-t/3), dt=dt) # sature a l'ordre 1
```

Remarque 2.29 (Note numérique). Les dérivées successives amplifient le bruit numérique : au-delà de l'ordre ~ 5 , la variance résiduelle remonte artificiellement (erreur d'arrondi différenciée). La saturation aux ordres bas (1, 2) est en revanche nette (chute à 10^{-20}). C'est une limite de la mesure, non du résultat.

2.18 Le moteur sémantique, défini

Définition 2.30 (Moteur sémantique d'ordre n). On appelle *moteur sémantique d'ordre n* une tour RFDG dont la néguentropie de composition sature au rang fini n . Sa *complexité sémantique* est n : le nombre de degrés de liberté indépendants de sa production de sens ($\dot{I} = S$).

Remarque 2.31 (Ce que cette définition gagne, et sa limite). La définition remplace le terme flou « moteur sémantique » par un *invariant* précis : l'ordre de fermeture n . Un moteur d'ordre 1 relaxe (sens convergent), d'ordre 2 oscille (sens cyclique), d'ordre ∞ est sémantiquement inépuisable. C'est démontré *comme structure formelle*.

La ligne à ne pas franchir. Définir un moteur sémantique comme une tour à fermeture finie est *licite* ; *affirmer* qu'un processus biologique réel *est* un tel moteur ne l'est pas encore. Il resterait à exhiber un système biologique où $\mathcal{I}, \dot{\mathcal{I}}, \ddot{\mathcal{I}}$ sont mesurables, à vérifier la fermeture sur données, et à en tirer une prédiction (cf. note personnelle *Moteur sémantique*). La définition est un *cadre*, pas un constat.

2.19 Portée

Remarque 2.32 (Acquis). La néguentropie de composition de la tour sature exactement au rang de fermeture (théorème 2.26) ; ce rang est la complexité dynamique (définition 2.27) ; l'oscillateur informationnel en est le cas $n = 2$. Ceci unifie trois objets du programme — RFDG itérée, néguentropie de composition, oscillateur — en un énoncé démontré. Le « moteur sémantique » reçoit une définition formelle (ordre de fermeture) ; son incarnation biologique demeure une question ouverte.

IV — Complexité dynamique et chaos. La non-saturation de la tour est la signature du chaos, reliée au plongement de Takens et à l'exposant de Lyapunov.

2.20 Correction préalable : chaos et déterminisme

Le chaos est déjà déterministe. Un système chaotique (Lorenz, pendule double) est *entièrement* déterministe : mêmes conditions initiales, même trajectoire. Ce qui le caractérise n'est pas un défaut de déterminisme mais la *sensibilité aux conditions initiales* (divergence exponentielle). La non-saturation ne *cause* donc aucun déterminisme — celui-ci est en amont. La question pertinente n'est pas « déterministe ou non » mais « combien de degrés de liberté pour spécifier l'état ». C'est là que la tour intervient.

2.21 La hiérarchie des régimes par l'ordre de fermeture

Le rang de saturation de la néguentropie de composition de la tour $(\mathcal{I}, \dot{\mathcal{I}}, \ddot{\mathcal{I}}, \dots)$ — l'ordre de fermeture n — est la complexité dynamique (§III ci-dessous). Elle classe les régimes.

Régime	Ordre n	Dynamique
Point fixe / relaxation	1	convergence vers un équilibre
Cycle / oscillateur	2	périodique, prévisible
Quasi-périodique (k modes)	$2k$ (fini)	tores, prévisible
Chaotique	∞ (non-saturé)	complexité dynamique non bornée

Proposition 2.33 (Non-saturation et chaos). *Un système chaotique a une tour RFDG qui ne sature pas : sa néguentropie de composition croît sans se stabiliser, chaque étage de dérivée apportant de l'information conditionnelle non nulle. La complexité dynamique est non bornée.*

Remarque 2.34 (Signature, non cause). La proposition dit que le chaos *implique* la non-saturation, non l'inverse comme mécanisme causal. La non-saturation *exprime* (signale) une complexité dynamique infinie ; elle ne la *produit* pas, et ne produit aucun déterminisme. La flèche va du système (chaotique, donné) vers sa signature (non-saturation observée).

2.22 Le pont avec Takens : la tour est un plongement

Ce résultat n'est pas isolé : il coïncide avec une construction établie de la théorie des systèmes dynamiques.

Remarque 2.35 (Théorème de Takens). Pour reconstruire l'attracteur d'un système à partir d'un seul signal, on empile le signal et ses dérivées (ou ses retards) $\mathcal{I}, \dot{\mathcal{I}}, \ddot{\mathcal{I}}, \dots$ — la tour RFDG — jusqu'à ce que l'attracteur se « déplie » sans auto-intersection. Le nombre d'étages nécessaires est la *dimension de plongement* m , bornée par $m \geq 2D + 1$ où D est la dimension fractale de l'attracteur. Un système régulier a un petit m (la tour sature) ; un système chaotique exige un m supérieur, lié à D non entier. La tour RFDG est donc, à peu de choses près, la reconstruction de Takens, et la saturation de la néguentropie de composition en détermine la dimension de plongement.

Remarque 2.36 (Lien avec la dimension fractale : le chaos est « fractal en temps »). L'attracteur chaotique a une dimension fractale (Lorenz : $D \approx 2,06$). Le document *stratifiabilité fractale* a montré que la dimension fractale est le taux d'information par cran de raffinement *spatial*. Ici, la non-fermeture de la tour joue le rôle analogue *temporel* : le système est inépuisable étage après étage, « fractal en temps ». Les deux non-saturations — spatiale (fractale) et temporelle (chaos) — sont deux faces du même refus de fermeture.

2.23 La limite : non-saturation $\neq$ chaos

Nécessaire, non suffisant. La non-saturation ne suffit pas à caractériser le chaos. Un système *quasi-périodique* (modes incommensurables) ne sature pas non plus à un ordre bas, sans être chaotique : pas de sensibilité aux conditions initiales. Ce qui distingue *vraiment* le chaos est l'**exposant de Lyapunov positif** $\lambda > 0$ (divergence exponentielle des trajectoires voisines). La caractérisation complète est donc :

$$\text{chaos} = \text{non-saturation de la tour} + \lambda > 0.$$

La non-saturation est la porte d'entrée (complexité non bornée) ; Lyapunov est le verrou (sensibilité exponentielle).

2.24 Vérification numérique

On compare la tour d'un système régulier (oscillateur) et d'un système chaotique (Lorenz, composante x). Variance résiduelle relative de chaque étage après régression sur les précédents : ~ 0 (redondant, saturé) ou ~ 1 (information nouvelle, non saturé).

étage n	1	2	3	4	5	6	7
Oscillateur $\cos(1,5t)$	1,0	10^{-19}	10^{-13}	10^{-9}	...	...	...
Lorenz $x(t)$ (chaos)	1,0	0,78	0,54	0,40	0,27	0,20	0,13

L'oscillateur *sature* à l'ordre 2 (effondrement à 10^{-19}) : complexité dynamique 2. Lorenz *ne sature pas* : chaque étage garde une information conditionnelle substantielle (décroissance lente, sans effondrement) — complexité dynamique non bornée, signature du chaos (proposition 2.33). Code :

```
import numpy as np
from scipy.integrate import solve_ivp

def saturation(sig, max_order=7, dt=1e-3):
    tower = [sig]
    for _ in range(max_order):
        tower.append(np.gradient(tower[-1], dt))
    m = max_order + 2
    tower = [t[m:-m] for t in tower]
    for n in range(1, len(tower)):
        X = np.vstack(tower[:n]).T
        coef, *_ = np.linalg.lstsq(X, tower[n], rcond=None)
        res = np.var(tower[n] - X @ coef) / np.var(tower[n])
        print(" etage %d : var res rel = %.2e" % (n, res))

# oscillateur : sature a l'ordre 2
t = np.linspace(0, 40, 40000); saturation(np.cos(1.5*t), dt=t[1]-t[0])

# Lorenz : ne sature pas
def lorenz(t, X, s=10, r=28, b=8/3):
    x, y, z = X; return [s*(y-x), x*(r-z)-y, x*y-b*z]
sol = solve_ivp(lorenz, [0,60], [1,1,1], max_step=0.002, dense_output=True,
                rtol=1e-9, atol=1e-9)
x = sol.sol(np.arange(10, 60, 0.002))[0] # apres transitoire
saturation(x, dt=0.002)
```

Remarque 2.37 (Honnêteté sur Lyapunov). On ne rapporte pas ici d'estimation de λ : le calcul fiable exige une renormalisation périodique (méthode de Benettin), qu'une simple paire de trajectoires ne fournit pas. La valeur de référence pour Lorenz est $\lambda \approx 0,906$ (positif, chaos confirmé). Notre calcul établit solidement la *non-saturation* ; la *positivité de Lyapunov* est citée d'après la littérature, non recalculée.

2.25 Portée

Remarque 2.38 (Acquis). La complexité dynamique (rang de saturation de la tour) classe les régimes : 1 (relaxation), 2 (cycle), $2k$ (quasi-périodique), ∞ (chaos). La non-saturation est une *signature* du chaos — pas sa cause, et pas une cause de déterminisme (déjà présent). La tour s'identifie à la reconstruction de Takens, et la non-fermeture temporelle fait écho à la dimension fractale de l'attracteur. Caractérisation complète : non-saturation + Lyapunov > 0 .

Remarque 2.39 (Limites). (i) La non-saturation est nécessaire, non suffisante (quasi-périodique l'exhibe aussi) ; Lyapunov tranche. (ii) La mesure numérique de la saturation se dégrade aux ordres élevés (dérivées = amplification du bruit) ; elle est nette aux ordres bas. (iii) Le cadre *décrit* le chaos en termes de complexité informationnelle ; il ne le *prédit* pas et n'ajoute pas à la théorie des systèmes dynamiques — il la relit dans le langage du grain.

Chapter 3

Moteur sémantique

Résumé du chapitre. Ce chapitre définit et incarne le *moteur sémantique*. On établit d'abord que la néguentropie de composition de la tour RFDG *sature* exactement au rang de fermeture, ce qui définit un moteur sémantique d'ordre n (sa *complexité sémantique*). On montre ensuite, sur l'exemple de la tique de Von Uexküll, que le moteur a en réalité *deux axes* — la *profondeur* (dérivations : perception $\rightarrow$ sens $\rightarrow$ action) et la *largeur* (canaux parallèles) — articulés par un *cycle fonctionnel* qui le fait tourner. Résultats démontrés et chiffrés ; l'incarnation biologique est traitée comme illustration, non comme validation.

I — Définition par la saturation. La tour des dérivées temporelles de l'information (RFDG itérée, cf. chapitre Dynamique) est ici lue comme un système de composantes ; la saturation de sa néguentropie de composition définit le moteur sémantique et sa complexité.

3.1 La tour comme système de composantes

La tour RFDG (chapitre Dynamique) est la suite des dérivées temporelles $\mathcal{I}^{(0)} = \mathcal{I}$, $\mathcal{I}^{(1)} = \dot{\mathcal{I}}$, $\mathcal{I}^{(2)} = \ddot{\mathcal{I}}$, ... On la lit ici comme un *vecteur d'état* dont les composantes sont les étages.

Définition 3.1 (Néguentropie de composition de la tour). Au rang N , la néguentropie de composition des $N+1$ premiers étages est leur corrélation totale

$$\mathcal{N}_N = \text{TC}(\mathcal{I}^{(0)}, \dots, \mathcal{I}^{(N)}) = \sum_{n=0}^N \mathcal{H}(\mathcal{I}^{(n)}) - \mathcal{H}(\mathcal{I}^{(0)}, \dots, \mathcal{I}^{(N)}).$$

Elle mesure la redondance entre étages : nulle s'ils sont indépendants, maximale s'ils sont déterminés les uns par les autres.

3.2 Saturation au rang de fermeture

Théorème 3.2 (Saturation $\Leftrightarrow$ fermeture). La néguentropie de composition de la tour *sature* au rang n — c'est-à-dire $\mathcal{N}_N = \mathcal{N}_n$ pour tout $N \geq n$ — si et seulement si la tour se referme à l'ordre n , i.e. $\mathcal{I}^{(n)}$ est fonction des $\mathcal{I}^{(0)}, \dots, \mathcal{I}^{(n-1)}$.

Proof. La corrélation totale s'accroît d'un étage par l'information conditionnelle de cet étage sachant les précédents :

$$\mathcal{N}_N - \mathcal{N}_{N-1} = \mathcal{H}(\mathcal{I}^{(N)}) - \mathcal{H}(\mathcal{I}^{(N)} \mid \mathcal{I}^{(0)}, \dots, \mathcal{I}^{(N-1)}) = I(\mathcal{I}^{(N)}; \mathcal{I}^{(0)}, \dots, \mathcal{I}^{(N-1)}),$$

l'information mutuelle entre le nouvel étage et les précédents. Cet incrément *sature* (devient nul) exactement quand $\mathcal{I}^{(N)}$ n'apporte plus rien de neuf, i.e. quand $\mathcal{H}(\mathcal{I}^{(N)} \mid \text{précédents}) = \mathcal{H}(\mathcal{I}^{(N)})$ au sens déterministe : $\mathcal{I}^{(N)}$ est fonction des précédents. Or c'est la définition de la fermeture à l'ordre n : dès $\mathcal{I}^{(n)} = \Phi(\mathcal{I}^{(0)}, \dots, \mathcal{I}^{(n-1)})$, tous les étages suivants le sont aussi (par dérivation),

leur information conditionnelle est nulle, et $\mathcal{N}_N = \mathcal{N}_n$ pour $N \geq n$. Réciproquement, si $\mathcal{N}$ sature au rang n , l'étage n a une information conditionnelle nulle, donc est déterminé par les précédents : fermeture. $\square$

Ce que « sature à l'ordre n » veut dire. Ce n'est *pas* que la néguentropie *vaut* n bits. C'est que le *rang de saturation* est n : à partir du n -ième étage, la néguentropie n'augmente plus. La *valeur* en bits dépend des amplitudes ; le *rang* est un entier, la complexité dynamique.

Définition 3.3 (Complexité dynamique). L'*ordre de fermeture* n — rang de saturation de la néguentropie de composition de la tour — est la *complexité dynamique* du système : le nombre de degrés de liberté informationnels indépendants nécessaires pour spécifier son état complet.

3.3 Les trois régimes

Système	Loi	Ordre n	Sens dynamique
Relaxation	$\dot{\mathcal{I}} = -\mathcal{I}/\tau$	1	le sens décroît vers un équilibre
Oscillateur	$\ddot{\mathcal{I}} = -\omega^2(\mathcal{I} - \frac{1}{2})$	2	le sens est cyclique
Inépuisable	pas de fermeture	∞	chaque dérivée apporte du neuf

Remarque 3.4 (L'oscillateur informationnel est l'ordre 2). Le cas $n = 2$ est exactement l'oscillateur informationnel du programme, $\ddot{\mathcal{I}} = -(2\omega)^2(\mathcal{I} - \frac{1}{2})$: sa tour sature à l'ordre 2, l'état complet tient en $(\mathcal{I}, \dot{\mathcal{I}})$, et tous les étages supérieurs sont déterminés. Le « sens cyclique » est la signature d'une complexité dynamique 2.

3.4 Vérification numérique

On construit la tour des dérivées d'un signal et l'on mesure, à chaque étage, la *variance résiduelle* après régression sur les étages précédents (proxy de l'information conditionnelle : nulle = étage déterminé = redondant).

Signal	étage 1	étage 2	étage 3	rang de fermeture
$\cos(\omega t)$ (harmonique)	1,0	$\sim 10^{-20}$	$\sim 10^{-15}$	2
$e^{-t/\tau}$ (relaxation)	$\sim 10^{-26}$	$\sim 10^{-19}$	$\sim 10^{-12}$	1
3 modes incommensurables	1,0	0,48	0,18	6 ($= 2 \times 3$)

Variance résiduelle relative : ~ 1 (étage indépendant, information nouvelle) ou ~ 0 (étage redondant, déterminé). Le rang où elle s'effondre est l'ordre de fermeture. Pour 3 modes, la fermeture est à l'ordre 6 (deux crans par mode). Code :

```
import numpy as np
def saturation(signal, max_order=6, dt=1e-3):
    tower = [signal]
    for _ in range(max_order):
        tower.append(np.gradient(tower[-1], dt)) # etage suivant = derivee
    tower = [t[max_order:-max_order] for t in tower]
    for n in range(1, len(tower)):
        X = np.vstack(tower[:n]).T # etages precedents
        coef, *_ = np.linalg.lstsq(X, tower[n], rcond=None)
        res = np.var(tower[n] - X @ coef) / np.var(tower[n]) # ~0 => redondant
        print(" etage %d : variance residuelle relative = %.2e" % (n, res))
```

```
t = np.linspace(0, 20, 20000); dt = t[1]-t[0]
saturation(np.cos(2*t), dt=dt) # sature a l'ordre 2
saturation(np.exp(-t/3), dt=dt) # sature a l'ordre 1
```

Remarque 3.5 (Note numérique). Les dérivées successives amplifient le bruit numérique : au-delà de l'ordre ~ 5 , la variance résiduelle remonte artificiellement (erreur d'arrondi différenciée). La saturation aux ordres bas (1, 2) est en revanche nette (chute à 10^{-20}). C'est une limite de la *mesure*, non du résultat.

3.5 Le moteur sémantique, défini

Définition 3.6 (Moteur sémantique d'ordre n). On appelle *moteur sémantique d'ordre n* une tour RFDG dont la néguentropie de composition sature au rang fini n . Sa *complexité sémantique* est n : le nombre de degrés de liberté indépendants de sa production de sens ($\dot{I} = S$).

Remarque 3.7 (Ce que cette définition gagne, et sa limite). La définition remplace le terme flou « moteur sémantique » par un *invariant* précis : l'ordre de fermeture n . Un moteur d'ordre 1 relaxe (sens convergent), d'ordre 2 oscille (sens cyclique), d'ordre ∞ est sémantiquement inépuisable. C'est démontré *comme structure formelle*.

La ligne à ne pas franchir. Définir un moteur sémantique comme une tour à fermeture finie est *licite* ; *affirmer* qu'un processus biologique réel *est* un tel moteur ne l'est pas encore. Il resterait à exhiber un système biologique où $\mathcal{I}, \dot{\mathcal{I}}, \ddot{\mathcal{I}}$ sont mesurables, à vérifier la fermeture sur données, et à en tirer une prédiction (cf. note personnelle *Moteur sémantique*). La définition est un *cadre*, pas un constat.

3.6 Portée

Remarque 3.8 (Acquis). La néguentropie de composition de la tour sature exactement au rang de fermeture (théorème 3.2) ; ce rang est la complexité dynamique (définition 3.3) ; l'oscillateur informationnel en est le cas $n = 2$. Ceci unifie trois objets du programme — RFDG itérée, néguentropie de composition, oscillateur — en un énoncé démontré. Le « moteur sémantique » reçoit une définition formelle (ordre de fermeture) ; son incarnation biologique demeure une question ouverte.

II — Les deux axes, et l'exemple de la tique. L'exemple de Von Uexküll révèle que le moteur a deux axes, profondeur et largeur, articulés par un cycle fonctionnel — ce que la définition de la partie I, purement verticale, ne capturerait pas encore.

3.7 Ce que la définition initiale manquait

La partie I (§ I) définissait un moteur sémantique d'ordre n comme une tour de dérivées temporelles $\mathcal{I}, \dot{\mathcal{I}}, \ddot{\mathcal{I}}, \dots$ se refermant à l'ordre n — une cascade *verticale* (profondeur de dérivation). L'exemple de la tique montre que ce n'est qu'un des deux axes.

Remarque 3.9 (L'hésitation féconde). Dans l'exemple, l'intuition « distinct d'une itération de F , mais on répète le process » pointe exactement la différence : la tique ne *dérive* pas F indéfiniment (profondeur croissante) ; elle *répète un cycle* de profondeur fixe. C'est une structure *horizontale* (canaux) + *bouclée* (répétition), non une tour verticale. Le concept a donc deux dimensions que l'exemple met au jour.

3.8 Les deux axes

Définition 3.10 (Moteur sémantique à deux axes). Un *moteur sémantique* est caractérisé par :

- sa *profondeur* d : le nombre de dérivations de l'information dans chaque canal avant l'action ($\mathcal{I} \rightarrow \dot{\mathcal{I}} = \text{sens} \rightarrow \ddot{\mathcal{I}} = F_{\text{sém}}$), soit l'ordre de fermeture d'un canal ;
- sa *largeur* L : le nombre de canaux perception-action parallèles, chacun traitant un signal distinct du milieu.

La *complexité sémantique* du moteur est le couple (L, d) .

Définition 3.11 (Cycle fonctionnel). Le *cycle fonctionnel* (*Funktionskreis* de Von Uexküll) est la boucle par laquelle l'action modifie le monde perçu, régénérant la perception :

$$\text{perception} \rightarrow \text{sens} \rightarrow \text{action} \rightarrow [\text{monde}] \rightarrow \text{perception} \rightarrow \dots$$

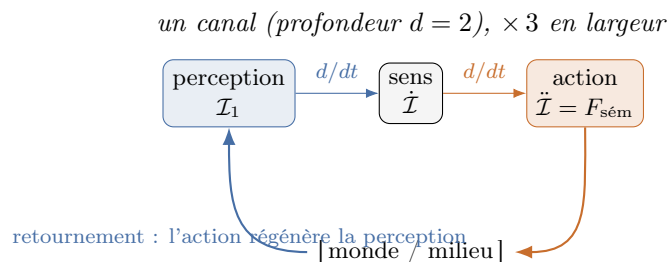
Le *retournement* de l'organe d'action *annule* la perception courante, fermant le cycle. C'est cette boucle qui fait du système un *moteur* — quelque chose qui tourne — et non une chaîne linéaire.

Remarque 3.12 (Ce qui fait le « moteur » : les deux articulés). Le moteur n'est ni la boucle seule ni la structure seule. Sans boucle, on a L chaînes linéaires parallèles — statiques, elles s'exécutent une fois et s'arrêtent. Sans structure (L et d), la boucle n'a rien à faire tourner. Le *moteur* est la boucle *qui entraîne* la structure à deux axes : le cycle fonctionnel réinjecte, à chaque tour, les signaux du milieu dans les L canaux de profondeur d . C'est l'articulation qui produit le mouvement.

3.9 Exemple travaillé : la tique de Von Uexküll

D'après Von Uexküll, l'*Umwelt* de la tique se réduit à trois signaux, donc trois canaux ($L = 3$), chacun de profondeur $d = 2$ (perception $\rightarrow$ sens $\rightarrow$ action).

canal	$\mathcal{I}_1$: perception	$\dot{\mathcal{I}}$: sens (détection)	$\ddot{\mathcal{I}} = F_{\text{sém}}$: action
1	acide butyrique	détection de l'acide	se laisser tomber
2	poils du mammifère (contact)	mouvement d'exploration	exploration
3	chaleur de la peau	détection de température	perforation



La boucle. « Se laisser tomber » modifie le monde perçu : plus d'acide (la tique a quitté sa branche), apparition du contact (poils), puis de la chaleur. Chaque action *régénère* la perception suivante — le cycle tourne, entraîné par le milieu. Le *retournement* de l'organe d'action annule la perception courante et arme la suivante.

Remarque 3.13 (Le canal d'échec). Le quatrième traitement mentionné — en cas d'échec, la tique remonte dans les feuillages — est un *canal de retour* qui referme la boucle globale : il ramène le système à l'état initial (attente d'un nouveau signal). C'est la condition de *redémarrage* du moteur, cohérente avec le cycle fonctionnel.

3.10 Distinction : profondeur vs répétition

	Itération verticale (tour)	Moteur de la tique
Opération	dérivée F encore : $\ddot{\mathcal{I}}, \mathcal{I}^{(4)} \dots$	répéter le cycle
Axe	profondeur croissante	largeur $\times$ boucle
Profondeur	$\rightarrow \infty$ (ou ordre n)	fixe, $d = 2$
Ce qui « tourne »	rien (cascade)	la boucle perception-action

Remarque 3.14. Les deux notions sont distinctes et complémentaires. L'itération verticale (chapitre *Dynamique*) mesure la *profondeur* d'un canal (son ordre de fermeture). Le moteur de la tique exploite la *largeur* et la *boucle*. Un moteur sémantique complet a les deux : des canaux de profondeur d (dérivation), en largeur L (parallélisme), refermés par un cycle fonctionnel (boucle). La tique est $(L, d) = (3, 2)$ avec boucle.

3.11 Garde-fou : illustration, non validation

Ce que l'exemple établit, et ce qu'il n'établit pas. La tique *illustre* que la formalisation *peut décrire* un système biologique connu — c'est le pas « exhiber un système » du programme (note *Moteur sémantique*). Elle ne *valide* pas le moteur sémantique comme mécanisme biologique, pour deux raisons :

- Le mapping perception $\rightarrow \dot{\mathcal{I}} \rightarrow$ action est une *ré-description* de l'éthologie de la tique dans le vocabulaire du grain ; Von Uexküll décrit ces cycles *sans* cette théorie.
- Pour dépasser l'illustration, le cadre devrait *prédire* sur la tique quelque chose que l'éthologie classique ne voit pas (une contrainte quantitative sur les temps de réaction, sur l'ordre des cycles...). Ce pas n'est pas franchi.

Excellent comme *illustration* de la structure $(L=3, d=2, \text{boucle})$; à ne pas présenter comme *preuve* d'existence biologique.

3.12 Portée

Remarque 3.15 (Acquis). L'exemple de la tique enrichit la définition du moteur sémantique : à la *profondeur* (ordre de fermeture, déjà formalisé) s'ajoutent la *largeur* (canaux parallèles) et la *boucle* (cycle fonctionnel de Von Uexküll). Le *moteur* est la boucle articulée à la structure à deux axes. La tique en est l'exemple minimal, $(L, d) = (3, 2)$. C'est une illustration fidèle et féconde — le premier pas concret vers un système mesurable.

Remarque 3.16 (Reste à faire). Pour transformer l'illustration en énoncé biologique : (i) rendre $\mathcal{I}, \dot{\mathcal{I}}, \ddot{\mathcal{I}}$ mesurables sur la tique (temps, seuils de détection, latences) ; (ii) vérifier que les données suivent la structure (L, d) et la boucle ; (iii) en tirer une prédiction testable. Sans ces pas, l'exemple reste une belle carte, non le territoire.

Chapter 4

Matière

Résumé du chapitre. Ce chapitre relie l'information à la matière, par l'énergie. On établit d'abord le *maillon 2* (déformer un corps engendre nécessairement des forces, mécanique des milieux continus), puis le *maillon 1* (une variation de néguentropie de composition d'un système physique se stocke, via Landauer, comme énergie libre potentielle $\Delta F = \mathcal{N} k_B T \ln 2$, dont le gradient déforme). On assemble alors la *chaîne complète* — de la brisure de symétrie (Klein) à la déformation, en passant par le comptage d'orbites et Landauer. On clôt par une *note spéculative* sur les forces fondamentales, avec ses garde-fous. Les résultats sont démontrés et chiffrés (échelle moléculaire) ; la spéculation est explicitement séparée.

I — Maillon 2. On pose d'abord le maillon établi et purement physique : déformer un corps matériel met nécessairement en jeu un champ de forces internes (mécanique des milieux continus). Il est muet sur la cause de la déformation — c'est l'objet du maillon 1.

4.1 Cadre : la mécanique des milieux continus

Un *corps* est modélisé comme un milieu continu occupant un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Le *déformer*, c'est déplacer ses points matériels : un champ de déplacement $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ envoie chaque point $\mathbf{x}$ sur $\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x})$. On mesure la déformation *locale* (les variations relatives de position), non le déplacement global (une translation ne déforme pas).

Définition 4.1 (Tenseur des déformations). En petites déformations, le tenseur (symétrique) des déformations est

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_i u_j + \partial_j u_i).$$

Il capture les variations relatives de longueur (termes diagonaux) et les cisaillements (termes croisés). $\varepsilon = 0$ ssi le déplacement est un mouvement rigide (translation + rotation) : *pas* de déformation.

4.2 Déformation $\Rightarrow$ contraintes

Définition 4.2 (Tenseur des contraintes). Le tenseur des contraintes σ_{ij} décrit les *forces internes* : la composante σ_{ij} est la i -ième composante de la force par unité de surface s'exerçant sur une facette de normale $\mathbf{e}_j$. Ses dimensions sont celles d'une force sur une aire (une pression).

Proposition 4.3 (Loi de comportement : déformation $\rightarrow$ contraintes). Une déformation ε d'un corps engendre un champ de contraintes σ via une loi de comportement $\sigma = \mathcal{C}(\varepsilon)$. Pour un solide élastique linéaire (loi de Hooke généralisée),

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl},$$

où C_{ijkl} est le tenseur d'élasticité du matériau. Toute déformation non nulle ($\varepsilon \neq 0$) d'un tel corps produit des contraintes non nulles ($\sigma \neq 0$) : des forces internes.

Remarque 4.4. La loi de comportement dépend du matériau (élastique, plastique, visqueux...), mais le principe est universel : *déformer un corps, c'est mettre en jeu des contraintes*. Un corps qui se déforme sans contrainte n'existe pas — ce serait un corps sans cohésion, donc pas un corps.

4.3 Contraintes $\Rightarrow$ forces

Proposition 4.5 (Divergence des contraintes : la force volumique). *La force par unité de volume exercée sur un élément du corps est la divergence du tenseur des contraintes :*

$$f_i = \partial_j \sigma_{ij}.$$

À l'équilibre, elle équilibre les forces extérieures volumiques b_i : $\partial_j \sigma_{ij} + b_i = 0$. Hors équilibre, elle donne l'accélération (deuxième loi de Newton pour un milieu continu) : $\rho \ddot{u}_i = \partial_j \sigma_{ij} + b_i$.

Idée. Le bilan des forces sur un volume élémentaire dV fait apparaître, par le théorème de la divergence, le flux du tenseur des contraintes à travers la surface : $\oint \sigma_{ij} n_j dS = \int \partial_j \sigma_{ij} dV$. La force nette par unité de volume est donc $\partial_j \sigma_{ij}$. $\square$

Théorème 4.6 (Le maillon 2). *Toute déformation $\varepsilon \neq 0$ d'un corps matériel s'exprime par un champ de forces internes : via la loi de comportement (prop. 4.3) elle engendre des contraintes σ , dont la divergence (prop. 4.5) est la densité de force. Symboliquement,*

$$\boxed{\varepsilon \neq 0 \xrightarrow{\mathcal{C}} \sigma \neq 0 \xrightarrow{\partial_j} \mathbf{f} \neq 0.}$$

Proof. Composition des propositions 4.3 et 4.5 : $\varepsilon \neq 0 \Rightarrow \sigma = \mathcal{C}(\varepsilon) \neq 0$ (loi de comportement non dégénérée) $\Rightarrow$ un champ de forces $\mathbf{f} = \text{div } \sigma$ associé. La déformation ne peut exister sans ce champ de forces. $\square$

4.4 Ce que ce maillon établit — et ce qu'il ne dit pas

Le maillon 2 est établi ; il ne dit rien du maillon 1. Le théorème 4.6 affirme : *si* un corps est déformé, *alors* des forces s'expriment. Il est muet sur la *cause* de la déformation. En particulier, il ne dit *pas* que « la variation d'information déforme le corps » (maillon 1) : cela exigerait un couplage physique information $\rightarrow$ matière, non contenu dans la mécanique des milieux continus. Le maillon 2 est une implication *déformation $\Rightarrow$ forces* ; il ne fournit pas la prémisse « quelque chose $\Rightarrow$ déformation ».

Remarque 4.7 (Le sens de la flèche). La mécanique des milieux continus lie déformation et forces de façon *bidirectionnelle* : une force appliquée déforme, une déformation imposée crée des forces. Mais dans les deux cas, les deux termes sont *physiques* (matière, contraintes). Brancher une *information* en amont — comme cause de la déformation — est un pas supplémentaire, hors de ce cadre, qui reste à fonder (cf. § IV). Le maillon 2 est solide précisément parce qu'il reste *entièrement* dans le registre matériel.

4.5 Portée

Remarque 4.8 (Acquis). La chaîne déformation $\rightarrow$ contraintes $\rightarrow$ forces est un résultat classique et vérifié de la mécanique des milieux continus (théorème 4.6). Elle justifie rigoureusement l'énoncé « toute déformation d'un corps s'exprime par des forces ». C'est le maillon 2, posé proprement.

Remarque 4.9 (Limite). Ce document n'établit *que* le maillon 2. L'articulation avec une variation d'information (maillon 1) n'en découle pas : elle suppose un couplage information $\rightarrow$ matière (piste : la thermodynamique de l'information, relation de Landauer $E \geq k_B T \ln 2$), qui est d'une autre nature et fait l'objet d'une réflexion séparée. Ne pas présenter le maillon 2 comme validant le maillon 1.

II — Maillon 1. On fournit la cause manquante, non par un argument formel mais par la thermodynamique de l'information : la néguentropie de composition d'un système physique se stocke, via Landauer, comme énergie libre potentielle dont le gradient est une force.

4.6 Pourquoi la voie mathématique échoue

Le prolongement de g^{-1} ne franchit pas le saut. Prolonger $g^{-1} : \mathcal{I} \rightarrow \kappa$, ou remplir une section sur la partie non atteinte (si g n'est pas surjective), reste une opération entre *espaces de description* : l'arrivée est toujours κ (les descriptions de corps), non le corps physique. Surtout, c'est une opération à *énergie nulle*. Or déformer un corps *coûte* de l'énergie (maillon 2 : $\varepsilon \neq 0 \Rightarrow \sigma \neq 0$, un travail). Aucune manipulation d'applications, si libre soit-elle, ne fabrique de l'énergie. Le maillon 1 n'est donc pas un fait mathématique : c'est un fait *physique* (un couplage énergétique). Sa seule voie est thermodynamique.

4.7 Le principe de Landauer

Proposition 4.10 (Landauer, 1961 ; vérifié expérimentalement 2012). *Dans un système physique à température T , effacer un bit d'information dissipe au minimum*

$$E_{\min} = k_B T \ln 2 \approx 2,87 \times 10^{-21} \text{ J} \quad (T = 300 \text{ K}).$$

Plus généralement, une variation d'entropie informationnelle de ΔS bits correspond à une énergie $\Delta E = \Delta S k_B T \ln 2$.

C'est le *taux de change* exact entre information (bits) et énergie (joules), établi et mesuré (Bérut *et al.*, *Nature* 2012).

4.8 Le pont : néguentropie de composition $\rightarrow$ énergie libre

Définition 4.11 (Énergie libre de structuration). Pour un système physique dont la néguentropie de composition (chapitre *Information*) vaut $\mathcal{N}$ bits, l'*énergie libre de structuration* est

$$\Delta F = \mathcal{N} k_B T \ln 2 \quad (\text{joules}).$$

Remarque 4.12 (Effacement vs structuration : dissipé vs potentiel). C'est la distinction décisive. L'énergie de Landauer est *dissipée* (perdue en chaleur) pour un *effacement* irréversible — destruction d'information. Mais la néguentropie de composition n'est pas un effacement : c'est une *structuration* (créer de l'ordre, des corrélations, sans détruire d'information). Une structuration réversible *stocke* l'énergie comme *énergie libre*, non la dissipe. Or l'énergie libre stockée dans une configuration ordonnée *est une énergie potentielle* — récupérable, et donc capable de produire un travail.

4.9 Du potentiel à la force : jonction avec le maillon 2

Théorème 4.13 (Le maillon 1, fondé thermodynamiquement). *La variation de néguentropie de composition d'un système physique se stocke comme énergie libre $\Delta F = \mathcal{N} k_B T \ln 2$; le gradient de cette énergie potentielle par rapport à une déformation ε est une force généralisée*

$$\mathbf{F} = - \frac{\partial(\Delta F)}{\partial \varepsilon} = - k_B T \ln 2 \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \varepsilon},$$

laquelle déforme le corps (maillon 2). Symboliquement,

$$\Delta \mathcal{N} \xrightarrow{\times k_B T \ln 2} \Delta F \text{ (potentiel)} \xrightarrow{-\partial/\partial \varepsilon} \mathbf{F} \xrightarrow{\text{maillon 2}} \text{déformation}.$$

Idée. Landauer (prop. 4.10) donne $\Delta F = \mathcal{N} k_B T \ln 2$. Sous l'hypothèse de structuration réversible (remarque 4.12), ΔF est une énergie libre stockée, fonction de l'état de déformation ε du système. La force généralisée conjuguée à ε est, par définition thermodynamique, $-\partial(\Delta F)/\partial \varepsilon$. Cette force alimente la chaîne du maillon 2 (contraintes, divergence). $\square$

Remarque 4.14 (Ce qui est gagné). Pour la première fois, une grandeur informationnelle du programme (la néguentropie de composition $\mathcal{N}$) se convertit en une grandeur physique mesurable (une force en newtons) par une relation *établie* ($k_B T \ln 2$), non une analogie. Le maillon 1 cesse d'être une affirmation : il devient un couplage thermodynamique, avec une équation et un ordre de grandeur.

4.10 Ordres de grandeur : le mécanisme est microscopique

Énergie visée	Bits de structuration requis ($\mathcal{N}$)
1 attojoule (10^{-18} J, échelle moléculaire)	$\sim 3,5 \times 10^2$
1 picojoule	$\sim 3,5 \times 10^8$
1 millijoule (déformation perceptible)	$\sim 3,5 \times 10^{17}$
1 joule	$\sim 3,5 \times 10^{20}$

$\mathcal{N}$ (bits structurés)	Force sur 1 nm
1	2,9 pN
10	29 pN
100	287 pN
1000	2,9 nN

Remarque 4.15 (Pertinent là où la biologie opère). Les forces obtenues (quelques pN à quelques nN par centaine de bits sur le nanomètre) sont *exactement* l'ordre des forces moléculaires réelles (moteurs moléculaires, repliement, liaisons). Repère : l'hydrolyse d'un ATP ($\sim 20 k_B T$) « vaut » ≈ 29 bits Landauer. Le mécanisme est donc *négligeable au macroscopique* (il faudrait 10^{17} bits pour un millijoule) mais *significatif à l'échelle moléculaire et biologique* — précisément l'échelle du *moteur sémantique* (document *Moteur sémantique de la tique*). Le pont Landauer reconnecte ainsi le maillon 1 à la biologie, là où il a un sens physique.

```
import math
kB, T = 1.380649e-23, 300
E_bit = kB*T*math.log(2) # 2.87e-21 J : cout Landauer d'un bit
print("k_B T ln2 =", f"{E_bit:.3e}", "J/bit")
for N in [1, 10, 100, 1000]:
    dF = N*E_bit # energie libre de structuration
```

```
force_pN = dF/1e-9 * 1e12 # gradient sur 1 nm, en piconewtons
print(f"N={N:5d} bits -> dF={dF:.2e} J -> {force_pN:.1f} pN sur 1 nm")
# ATP ~ 20 kT ~ 29 bits : Landauer est a l'echelle moléculaire
```

4.11 Portée et limites

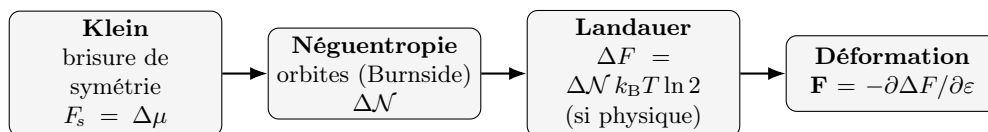
Remarque 4.16 (Acquis). Le maillon 1 reçoit un fondement *thermodynamique* : $\Delta F = \mathcal{N}k_B T \ln 2$ (Landauer), énergie libre *potentielle* sous structuration réversible, dont le gradient est une force (théorème 4.13), qui déforme (maillon 2). L'énergie potentielle que réclamait la question est bien là : c'est l'énergie libre de structuration.

Deux conditions strictes. (i) *Système physique requis.* Landauer n'a de sens que dans un système à température T , avec des degrés de liberté physiques. La néguentropie *abstraite* (symboles, groupes purement formels) n'a pas de température : le pont ne s'y applique pas. Il exige que $\mathcal{N}$ soit la néguentropie d'un *système matériel* (molécules, spins, configurations) — ce qui inclut la matière (quarks→molécules), exclut les structures symboliques pures. (ii) *Microscopique.* $k_B T \ln 2 \approx 10^{-21}$ J est minuscule : le mécanisme est réel à l'échelle moléculaire, négligeable au macroscopique, et le stockage réversible est un *idéal* (tout processus réel dissipe davantage).

Remarque 4.17 (Statut). Ce document établit un *couplage* information→énergie→force physiquement fondé, non une nouvelle force fondamentale. Il *décrit* comment une structuration informationnelle peut, dans un système thermodynamique, stocker une énergie déformante. La reconnexion à la biologie (moteur sémantique) est une *piste* désormais quantifiée — pas encore une prédiction vérifiée sur un système biologique donné.

III — La chaîne complète. On assemble les deux maillons : la brisure d'une symétrie (Klein) est une force sémantique, chiffrée en néguentropie par le comptage d'orbites (Burnside), convertie en énergie libre (Landauer), dont le gradient déforme.

4.12 Vue d'ensemble : la chaîne



Chaque flèche est un résultat démontré ailleurs ; ce document les compose et chiffre la deuxième (le maillon Burnside, qui manquait).

4.13 Maillon 1 — Klein : la brisure de symétrie est une force sémantique

Remarque 4.18 (Rappel, d'après *Théorème de Klein*). Le théorème de Klein pose une correspondance de Galois antitone (Sym, Inv) entre contenus $A \subseteq P$ (propriétés mesurables) et sous-groupes de transformations. Une géométrie est un couple clos (A, G) avec $G = \text{Sym}(A)$. La *force sémantique* d'un processus (τ_t) est la variation instantanée des mesures, $F_s(p) = \frac{d}{dt}\mu(p)[\tau_t V]$, et

$$F_s = 0 \iff (\tau_t) \subseteq \text{Sym}(A) :$$

la force sémantique est nulle ssi le processus reste dans le groupe principal. *Elle mesure exactement l'écart à la symétrie* : toute transformation hors du groupe principal brise une invariance et fait apparaître $F_s = \Delta\mu \neq 0$.

Remarque 4.19 (Noether lu dans les deux sens). $F_s = \dot{q}_X = \{q_X, H\}$: la charge conjuguée q_X est conservée tant que la symétrie tient, et sa variation à la rupture *est* la force. Symétrie conservée et force à la brisure sont deux faces d'un même fait.

4.14 Maillon 2 — La brisure fait varier la néguentropie (Burnside)

C'est le maillon nouveau : chiffrer la variation d'information qu'une brisure de symétrie produit. L'outil est le comptage d'orbites.

Définition 4.20 (Néguentropie de libération d'une action de groupe). Soit un groupe G agissant sur un ensemble de Ω configurations. Le nombre d'orbites (classes de configurations identifiées par G) est donné par la *formule de Burnside* :

$$|\Omega/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)|.$$

La néguentropie de libération (qui est une l'opposé d'une entropie de décomposition) portée par la structure G est la réduction d'entropie configurationnelle

$$\mathcal{N}_G = \log_2 \frac{|\Omega|}{|\Omega/G|} \text{ bits.}$$

Proposition 4.21 (Antitonie de Klein, chiffrée). *Enrichir le quantum restreint le groupe (théorème de Klein, $\text{Sym}(A_1 \cup A_2) = \text{Sym}(A_1) \cap \text{Sym}(A_2)$) — mais un groupe plus grand fusionne davantage de configurations, donc porte plus de néguentropie. La brisure d'une symétrie ($G \rightarrow G' \subsetneq G$) libère*

$$\Delta\mathcal{N} = \mathcal{N}_G - \mathcal{N}_{G'} = \log_2 \frac{|\Omega/G'|}{|\Omega/G|} \geq 0 :$$

c'est la force sémantique F_s , quantifiée en bits.

Proof. Un sous-groupe $G' \subsetneq G$ identifie moins de configurations, donc $|\Omega/G'| \geq |\Omega/G|$, d'où $\mathcal{N}_{G'} \leq \mathcal{N}_G$ et $\Delta\mathcal{N} \geq 0$. La brisure retire des identifications : elle *distingue* des configurations auparavant confondues, ce qui *est* la variation de mesure $\Delta\mu$ du maillon 1. $\square$

Exemple chiffré (collier à 6 perles, 3 couleurs). $|\Omega| = 3^6 = 729$.

Groupe	$ \Omega/G $ (Burnside)	$\mathcal{N}_G$ (bits)	
C_6 (rotations, $ G = 6$)	130	2,487	
D_6 (rotations + réflexions, $ G = 12$)	92	2,986	quantum plus riche
Brisure $D_6 \rightarrow C_6$		$\Delta\mathcal{N} = 0,499$	force sémantique

Le groupe plus grand (D_6) fusionne plus de configurations ($92 < 130$), porte plus de néguentropie ; la brisure $D_6 \rightarrow C_6$ (perte des réflexions) libère 0,499 bit. Code :

```

import math
log2 = math.log2
def count_fixed(perm, n): # n^(nb de cycles de perm)
    seen, cyc = set(), 0
    for i in range(len(perm)):
        if i not in seen:
            cyc += 1; j = i
            while j not in seen: seen.add(j); j = perm[j]
    return n**cyc
def orbits(G, n): return sum(count_fixed(p, n) for p in G.values()) // len(G)

N, ncol = 6, 3
C6 = {f"r{k}": [(i+k) % N for i in range(N)] for k in range(6)} # rotations
D6 = dict(C6)
for a in range(6): D6[f"s{a}"] = [(a-i) % 6 for i in range(6)] # + reflexions
free = ncol*N
for name, G in [("C6", C6), ("D6", D6)]:
    o = orbits(G, ncol)
    print(f"{name}: orbites={o} N={log2(free/o):.3f} bits") # C6:130/2.487 D6:92/2.986

```

4.15 Maillon 3 — Landauer : la néguentropie devient énergie libre

Proposition 4.22 (Conversion, si le système est physique). *Si l'action de groupe structure un système physique à température T , la variation de néguentropie $\Delta\mathcal{N}$ (maillon 2) se stocke, sous structuration réversible, comme énergie libre potentielle*

$$\Delta F = \Delta\mathcal{N} k_B T \ln 2 \quad (k_B T \ln 2 \approx 2,87 \times 10^{-21} \text{ J/bit}).$$

Condition stricte. Landauer n'a de sens que pour un système physique (degrés de liberté matériels, température T). Si l'action de groupe porte sur une structure *abstraite* (symboles, géométrie pure), $\Delta\mathcal{N}$ reste une néguentropie *informationnelle* : pas de T , pas de ΔF , pas de force physique. La chaîne s'arrête alors au maillon 2 (structure), sans atteindre la déformation matérielle.

4.16 Maillon 4 — Déformation : le gradient de l'énergie libre

Théorème 4.23 (De la brisure de symétrie à la déformation). *Pour une action de groupe sur un système physique, la force qui déforme est le gradient de l'énergie libre de structuration :*

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial(\Delta F)}{\partial \varepsilon} = -k_B T \ln 2 \frac{\partial(\Delta\mathcal{N})}{\partial \varepsilon},$$

laquelle engendre des contraintes σ et déforme le corps (mécanique des milieux continus, § I (maillon 2)). La chaîne complète est

$$\underbrace{\text{brisure de symétrie}}_{F_s = \Delta\mu} \rightarrow \underbrace{\Delta\mathcal{N}}_{\text{Burnside}} \xrightarrow{k_B T \ln 2} \underbrace{\Delta F}_{\text{potentiel}} \xrightarrow{-\partial/\partial \varepsilon} \mathbf{F} \rightarrow \text{déformation}.$$

Proof. Composition : maillon 1 (la brisure est $F_s = \Delta\mu$), maillon 2 (prop. 4.21, $\Delta\mu$ chiffrée en $\Delta\mathcal{N}$ par Burnside), maillon 3 (prop. 4.22, $\Delta F = \Delta\mathcal{N} k_B T \ln 2$), maillon 4 (force = gradient de l'énergie libre $\rightarrow$ contraintes). $\square$

Ordre de grandeur (collier, $\Delta\mathcal{N} = 0,499$ bit, système physique). $\Delta F = 0,499 \times 2,87 \times 10^{-21} \approx 1,43 \times 10^{-21}$ J, soit une force $\approx 1,4$ pN sur 1 nm — l'échelle des forces moléculaires. Le mécanisme est microscopique, significatif en biologie moléculaire, négligeable au macroscopique.

4.17 Ce que la chaîne établit — et ses garde-fous

Remarque 4.24 (Acquis). Les quatre maillons, chacun démontré séparément, se composent : une brisure de symétrie du groupe principal (Klein/Noether) est une force sémantique, qu'un comptage d'orbites (Burnside) chiffre en variation de néguentropie de composition, que Landauer convertit — dans un système physique — en énergie libre, dont le gradient déforme. C'est le fil complet « symétrie brisée $\rightarrow$ force physique », par l'énergie.

Trois garde-fous, tenus. (i) *Description vs prédiction* : $F_s = \dot{q}$ est une définition ; le contenu prédictif est dans le générateur H , spécifié indépendamment (remarque de prédictivité, *Théorème de Klein*). (ii) *Physique requise* : le passage à la force matérielle (maillons 3–4) exige un système physique à température T ; sur une structure abstraite, la chaîne s'arrête au maillon 2. (iii) *Microscopique* : $k_B T \ln 2$ est minuscule ; l'effet est réel à l'échelle moléculaire, négligeable au-delà. La chaîne *décrit* un couplage possible ; elle ne *prédit* sur aucun système donné tant que H et le système physique ne sont pas fixés.

Remarque 4.25 (Deux ponts « groupe $\rightarrow$ force » à ne pas confondre). La physique établie relie déjà groupes et forces par *Noether* (symétrie continue $\rightarrow$ charge conservée) et les *théories de jauge* (les interactions *sont* des groupes : $SU(3)$, $SU(2) \times U(1)$). Ce pont-là agit sur la *dynamique*. Le pont de ce document est distinct : le groupe *structure l'information* (Klein), et c'est *Landauer* qui fait le lien à l'énergie. Les deux sont légitimes et complémentaires ; ne pas les confondre ni prétendre que le second remplace le premier.

IV — Note spéculative (non validée). On consigne enfin, clairement séparée du reste, l'intuition reliant néguentropie de composition et forces fondamentales, avec les trois ruptures physiques qui l'en séparent. Registre : question ouverte, au conditionnel.

La part défendable (à garder)

Une chose est solide et prolonge le cadre sans rien risquer :

La hiérarchie d'échelles de la matière — quarks $\rightarrow$ nucléons $\rightarrow$ atomes $\rightarrow$ molécules — porte, à chaque niveau de composition, une néguentropie de composition croissante.

Composer des constituants en une structure d'ordre supérieur crée des corrélations, donc une néguentropie de composition (chapitre *Information*). C'est vrai, mesurable en principe, et cela n'affirme rien sur les interactions. **C'est cette formulation, et elle seule, qui peut figurer dans le corps du travail.**

L'intuition spéculative

On aimerait aller plus loin : poser $g : \kappa \rightarrow \mathcal{I}$, où $\kappa = \{\text{quarks, nucléons, atomes, } \dots\}$, et former $g^{-1} : \mathcal{I} \rightarrow \kappa$; puis *conjecturer* que le supplément de néguentropie de composition « déforme » les K , et que cette déformation « s'exprime par une force » — l'une des interactions fondamentales.

Formulée honnêtement, l'intuition est une *question* :

La composition croissante de la matière pourrait-elle se relier à l'émergence des forces fondamentales, via une déformation informationnelle ?

Elle n'est *pas* un mécanisme établi. Trois obstacles majeurs l'en séparent.

Les trois ruptures à lever

Rupture 1 — l'association « une force par niveau » est physiquement fausse. L'interaction *forte* lie les quarks *et* tient le noyau (nucléons) ; elle n'est pas cantonnée à un niveau. L'interaction *faible* gouverne la désintégration β , ce n'est pas une « composition » de nucléons. La *gravitation* n'émerge pas « au niveau des atomes » : elle agit sur toute masse-énergie, à toute échelle, et elle est $\sim 10^{36}$ fois plus faible que l'électromagnétisme à l'échelle atomique (donc négligeable, non émergente, là). L'attribution force $\leftrightarrow$ niveau est une reconstruction *a posteriori* sans correspondance avec la structure réelle des interactions.

Rupture 2 — les forces fondamentales ne sont pas des déformations informationnelles. Leur origine est établie et vérifiée à très haute précision : *symétries de jauge* (SU(3) pour la forte, SU(2) $\times$ U(1) pour l'électrofaible) avec échange de bosons médiateurs (gluons, W/Z, photon) ; *courbure de l'espace-temps* par le tenseur énergie-impulsion pour la gravitation. Poser que la néguentropie de composition *produit* ces forces, c'est proposer une origine des interactions entièrement distincte du Modèle Standard et de la relativité générale — une physique alternative, non testée, non un raffinement du cadre existant.

Rupture 3 — l'outil du programme ne s'applique pas ici. La déformation informationnelle rigoureuse, $\Delta\mathcal{I}_g = \log_2 |g'|$ (document *Déformation informationnelle*), suppose que g agit sur une *mesure* (longueur, densité) d'un *domaine continu* : c'est une déformation de métrique. Or $g : \kappa \rightarrow \mathcal{I}$ va d'objets physiques discrets vers l'information : ce n'est pas une dilatation de mesure, il n'y a pas de g' à prendre. La formule qui donnait un sens à « déformation $\rightarrow$ force » *ne mord pas* sur κ . L'outil qui marchait pour un signal physique continu est inapplicable à une correspondance entre registres hétérogènes.

Programme pour transformer la spéculation en énoncé

Dans l'ordre, et chacun est un verrou :

1. **Corriger l'association force/niveau** : abandonner « une force par niveau » ; identifier, s'il existe, un lien *réel* entre une observable de composition et une observable d'interaction, conforme au Modèle Standard.
2. **Définir la déformation sur le bon objet** : trouver une *mesure* (pas un ensemble discret d'objets) sur laquelle une déformation informationnelle aurait un sens — faute de quoi $\Delta\mathcal{I}_g$ reste inapplicable.
3. **Produire une prédiction** : une grandeur mesurable que l'hypothèse informationnelle prédirait et que la physique standard ne donnerait pas, pour distinguer l'hypothèse du simple ré-habillage.

Tant que ces trois verrous tiennent, l'intuition demeure une *question ouverte*, formulée au conditionnel, jamais un « exemple en physique ».

Résumé. *Défendable* : la hiérarchie de la matière porte une néguentropie de composition croissante (peut figurer dans le corps). *Spéculatif, non fondé* : que ce supplément *soit* une force fondamentale — trois ruptures (association force/niveau fausse, forces = jauge/courbure et non information, outil $\Delta\mathcal{I}_g$ inapplicable). À garder au conditionnel interrogatif, hors du corps rigoureux. Comme partout : décrire $\neq$ expliquer ; la physique établie *contraint*, le formalisme ne la remplace pas.

Chapter 5

La mécanique quantique dans le programme du grain

Une lecture stratale des postulats, de la mesure et de la limite classique

Introduction

La mécanique quantique standard se présente sous la forme d’une liste de postulats posés *ex nihilo* : l’espace des états est un espace de Hilbert **complexe**, les probabilités s’obtiennent par le **carré** du module de l’amplitude (règle de Born), la mesure **projette** irréversiblement l’état sur un vecteur propre. Ces trois traits — la complexité, le carré, la projection — sont d’ordinaire adjoints comme des axiomes, sans que leur *nécessité* soit expliquée. Pourquoi le corps des états est-il $\mathbb{C}$ et non $\mathbb{R}$? Pourquoi $|\psi|^2$ et non $|\psi|$ ou $|\psi|^4$? Pourquoi la mesure détruit-elle de l’information ?

Le présent chapitre propose une réponse d’un genre particulier. Il ne dérive pas la mécanique quantique d’un principe premier ; il montre que ses structures mathématiques centrales trouvent une **fondation géométrique naturelle** dans le *programme du grain*, dès lors qu’une seule caractéristique structurelle est admise : la **dualité stratale** entre une strate fine $\mathcal{G}_{n_\infty}$ et une strate grossière, *articulées par leur quotient cyclique*.

Ce fil conducteur — *une même distinction fine/grossière lue tantôt sur l’axe réel, tantôt sur le cercle* — traverse tout le chapitre. Il est la clé de voûte qui unifie six résultats d’apparence disparate : la nature complexe de la fonction d’onde, la localisation de l’interférence, la réalité du spectre, le carré de Born, l’effondrement de la mesure, et l’émergence du continu classique.

Gradation épistémologique. Le lecteur trouvera dans ce chapitre trois régimes de certitude, soigneusement distingués :

- Les sections 5.1 à 5.2 (substrat géométrique, plan complexe stratal, sphère de Bloch) sont **rigoureuses** : elles construisent, comme objets mathématiques du programme, la variété des états d’un qubit et sa fibration.
- Les sections 5.3 et 5.4 (les deux premiers postulats) sont des **reformulations** : elles réénoncent les postulats de superposition et d’observables dans le cadre stratal, avec une lecture géométrique du spectre.
- Les sections 5.10 à 5.12 (fonction d’onde, règle de Born, mesure, dynamique) sont **exploratoires** : elles proposent une lecture stratale des mécanismes de mesure, entre suggestion conceptuelle et reformulation.

- La section 5.13 (limite classique) est explicitement une **analogie structurelle**, encadrée par des garde-fous.

Cette gradation n'est pas une faiblesse mais la structure même de l'entreprise : elle sépare ce qui est construit de ce qui est suggéré, et ce qui est suggéré de ce qui n'est qu'un motif partagé.

5.1 Le substrat géométrique : le grain et ses sphères de directions

Cadre. On travaille dans un espace $X = \mathbb{R}^d$ muni du produit scalaire standard, et son extension non standard $X^* = \widetilde{\mathbb{R}}^d$. La norme est $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, à valeurs dans $\widetilde{\mathbb{R}}_{\geq 0}$. La partie standard st et le halo sont ceux du document *Des espaces métriques aux espaces de Hilbert*.

5.1.1 Le grain à une résolution stratale

Définition 5.1 (Finesse d'un niveau). Au niveau de résolution $\mathcal{G}_{kn_\infty}$, la *finesse* est $\varepsilon_k := 2^{-kn_\infty}$, un infinitésimal non nul de $\widetilde{\mathbb{R}}$. C'est la plus petite longueur distinguable à cette résolution.

Définition 5.2 (Grain de dimension d). Le *grain de dimension d* centré en O , à la résolution kn_∞ , est la boule fermée de rayon infinitésimal

$$\mathcal{G}_{kn_\infty}^{(d)}(O) := \{x \in X^* : \|x - O\| \leq \varepsilon_k\} \subset \widetilde{\mathbb{R}}^d.$$

C'est l'ensemble des points *indistinguables de O* à la résolution kn_∞ .

Remarque 5.3 (Le grain est un morceau du halo). Puisque ε_k est infinitésimal, tout point de $\mathcal{G}_{kn_\infty}^{(d)}(O)$ est infiniment proche de O : $\mathcal{G}_{kn_\infty}^{(d)}(O) \subset \text{hal}(O)$. Le grain est donc un voisinage infinitésimal de O dans l'extension X^* .

Proposition 5.4 (Promotion du grain). *La partie standard du grain est le point O :*

$$\text{st}(\mathcal{G}_{kn_\infty}^{(d)}(O)) = \{O\}.$$

Proof. Tout $x \in \mathcal{G}_{kn_\infty}^{(d)}(O)$ vérifie $\|x - O\| \leq \varepsilon_k$, infinitésimal, donc $\text{st}(\|x - O\|) = 0$, d'où $\text{st}(x) = O$. Réciproquement O est atteint (O appartient au grain). Donc l'image par st est le singleton $\{O\}$. $\square$

Remarque 5.5 (L'anomalie cartésienne). La Proposition 5.4 est la forme précise de l'anomalie cartésienne : dans l'extension X^* , l'origine est un *grain* de dimension d (une boule d'épaisseur infinitésimale) ; après promotion, elle redevient le *point* O de X . Le grain est l'origine « vue à la résolution kn_∞ » ; le point est sa promotion.

5.1.2 Trois objets à ne pas confondre

Le grain de dimension d met en jeu trois objets de dimensions distinctes. Les confondre conduit à des erreurs de dimension ; on les sépare ici.

Définition 5.6 (Bord du grain). Le *bord* du grain est la sphère de rayon ε_k :

$$\partial \mathcal{G}_{kn_\infty}^{(d)}(O) = \{x \in X^* : \|x - O\| = \varepsilon_k\},$$

de dimension $d - 1$.

Définition 5.7 (Sphère des directions). La *sphère des directions* issues de O est la sphère unité de X :

$$S^{d-1} = \{v \in X : \|v\| = 1\},$$

de dimension $d - 1$.

Objet	Description	Dimension
Grain $\mathcal{G}_{kn_\infty}^{(d)}(O)$	boule de rayon ε_k	d
Bord $\partial\mathcal{G}$	sphère de rayon ε_k	$d - 1$
Sphère des directions S^{d-1}	vecteurs unitaires	$d - 1$

Remarque 5.8 (« Forme » du grain). Le grain *n'a pas la forme d'une sphère* : il est une *boule* (pleine, dimension d). La sphère (dimension $d-1$) apparaît seulement comme son *bord* ou comme sa *sphère de directions*. Cette distinction évite l'inflation de dimension : un grain plan ($d = 2$) est un disque, bordé par un cercle S^1 , non « un cercle ».

5.1.3 Le cas $d = 2$: disque et cercle

Proposition 5.9 (Grain plan). *Pour $d = 2$, le grain $\mathcal{G}_{kn_\infty}^{(2)}(O)$ est un disque de rayon ε_k (dimension 2). Son bord est un cercle de rayon ε_k (dimension 1). Sa sphère de directions est le cercle unité S^1 (dimension 1). Deux directions orthogonales $e_1, e_2 \in S^1$ engendrent le plan $X = \mathbb{R}^2$ et fournissent les vecteurs directeurs de deux axes orthogonaux.*

Remarque 5.10 (Lien avec le plan à l'infini). Les deux directions orthogonales e_1, e_2 fournissent les vecteurs directeurs des axes $\Delta_\infty^{\mathbb{R}}$ et $\Delta_{\infty, \perp}^{\mathbb{R}}$ du plan à l'infini. La sphère des directions S^1 est un cercle ; en identifiant les directions opposées ($v \sim -v$), on retrouve la droite projective $\mathbb{RP}^1$, âme du ruban de Möbius. Le grain plan et le Möbius projectif partagent ainsi la même sphère de directions.

5.1.4 Généralisation à la sphère S^n

Théorème 5.11 (Grain de dimension $n + 1$ et sphère S^n). *Soit $n \geq 0$ un entier standard. Le grain de dimension $n + 1$*

$$\mathcal{G}_{kn_\infty}^{(n+1)}(O) = \{x \in \widetilde{\mathbb{R}}^{n+1} : \|x - O\| \leq \varepsilon_k\}$$

est engendré par $n + 1$ directions orthogonales $e_1, \dots, e_{n+1}$. Sa sphère de directions est la sphère unité

$$S^n = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} : \|v\| = 1\},$$

de dimension n . Autrement dit :

$$(n + 1) \text{ directions orthogonales } \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \text{sphère unité } S^n.$$

Proof. Les $n + 1$ directions orthogonales forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^{n+1}$, donc engendrent cet espace. La sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$ est par définition S^n , de dimension n (sous-variété de codimension 1). Le grain est la boule associée, de rayon infinitésimal ε_k , de partie standard $\{O\}$ (Proposition 5.4). $\square$

Corollaire 5.12 (Table des dimensions).

directions	espace	grain (boule)	sphère des directions
1	$\mathbb{R}^1$	segment	S^0 (2 points)
2	$\mathbb{R}^2$	disque	S^1 (cercle)
3	$\mathbb{R}^3$	boule	S^2 (sphère)
$n + 1$	$\mathbb{R}^{n+1}$	boule	S^n

Remarque 5.13 (Portée : dimension finie). Le Théorème 5.11 vaut pour tout n standard *fini* : l'extension $\widetilde{\mathbb{R}}^{n+1}$ se construit composante par composante, et le produit scalaire est celui du cadre de Hilbert stratal. Le cas de la dimension infinie (sphère de ℓ^2) reste *ouvert* : il requiert le cadre des séries dans $\widetilde{\mathbb{R}}$, non encore construit (cf. points ouverts du document Hilbert).

5.1.5 Synthèse

- À la résolution kn_∞ , l'origine est un *grain* de dimension d : une boule de rayon infinitésimal $\varepsilon_k = 2^{-kn_\infty}$, de partie standard $\{O\}$.
- Le grain (dimension d) ne doit pas être confondu avec son bord (sphère de dimension $d-1$) ni avec sa sphère de directions S^{d-1} .
- Pour $n+1$ directions orthogonales, la sphère des directions est S^n : la formule $S^n \leftrightarrow (n+1)$ directions respecte le décalage $\dim S^{d-1} = d-1$.
- Cette construction est rigoureuse pour tout n fini, dans le cadre de Hilbert stratal ; la dimension infinie reste ouverte.

5.2 L'espace des états d'un qubit : la sphère de Bloch stratale

Préambule

Cette section construit la *sphère de Bloch stratale* — l'espace des états (purs) d'un système à deux niveaux — à partir des objets déjà établis dans le programme du grain :

- le corps complexe stratal $\tilde{\mathbb{C}} = \tilde{\mathbb{R}}[i]$, où i émerge de la compatibilité circulaire de l'exponentielle stratale (*De la métrique logarithmique à l'exponentielle complexe*) ;
- le cadre de Hilbert stratal (produit scalaire, norme, partie standard) du chapitre de la théorie du grain *Des espaces métriques aux espaces de Hilbert* ;
- la notion de sphère unité S^{d-1} d'un espace de dimension d (section 5.1) (*Le grain de dimension n et sa sphère de directions*).

On établit que ces objets contiennent déjà les trois pièces de la *fibration de Hopf* $S^3 \rightarrow S^2$, dont le quotient est la sphère de Bloch.

Statut. On construit la *géométrie des états* d'un qubit : l'espace des états purs comme variété. Elle ne construit *pas* la mécanique quantique complète (évolution unitaire, mesure, règle de Born, intrication), qui requiert des structures supplémentaires. Le résultat est géométrique et rigoureux ; son interprétation physique reste au rang de correspondance structurelle.

5.2.1 Rappel : le corps complexe stratal

Définition 5.14 (Corps complexe stratal). Le *plan complexe stratal* est $\tilde{\mathbb{C}} := \tilde{\mathbb{R}} \oplus i\tilde{\mathbb{R}} = \{x + iy : x, y \in \tilde{\mathbb{R}}\}$, muni de la structure de corps de $\tilde{\mathbb{R}}[i]$ ($i^2 = -1$). Pour $z = x + iy$:

$$\bar{z} = x - iy, \quad |z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} \in \tilde{\mathbb{R}}_{\geq 0}, \quad z = |z| e^{i \arg z}.$$

Remarque 5.15 (Module et argument, deux strates). Conformément au théorème des correspondances stratales, le module $|z|$ vit sur l'axe réel ($\leftrightarrow \mathcal{G}_{-2n_\infty}$), et l'argument $\arg z$ sur le cercle unité ($\leftrightarrow \mathcal{G}_{-n_\infty}/\mathcal{G}_{-2n_\infty}$). La multiplication complexe combine les deux :

$$z_1 z_2 = |z_1| |z_2| e^{i(\arg z_1 + \arg z_2)},$$

multiplication des modules (axe réel), *addition* des arguments (cercle, via $\mathcal{E}(\theta) = e^{i\theta}$).

5.2.2 L'espace d'un qubit : $\tilde{\mathbb{C}}^2$

Définition 5.16 (Espace des états et produit hermitien). L'espace d'un système à deux niveaux est $\tilde{\mathbb{C}}^2$. Pour $\psi = (z_1, z_2)$ et $\phi = (w_1, w_2)$, le *produit scalaire hermitien stratal* est

$$\langle \psi, \phi \rangle := \bar{z}_1 w_1 + \bar{z}_2 w_2 \in \tilde{\mathbb{C}}, \quad \|\psi\|^2 := \langle \psi, \psi \rangle = |z_1|^2 + |z_2|^2 \in \tilde{\mathbb{R}}_{\geq 0}.$$

Proposition 5.17 (Cohérence avec le cadre de Hilbert stratal). $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est hermitien (linéaire à droite, semi-linéaire à gauche, $\langle \phi, \psi \rangle = \overline{\langle \psi, \phi \rangle}$), et $\|\psi\|^2 \geq 0$ avec égalité ssi $\psi = 0$. La norme $\|\cdot\|$ est celle du cadre de Hilbert stratal appliquée à $\tilde{\mathbb{C}}^2 \cong \tilde{\mathbb{R}}^4$.

Proof. La conjugaison $\bar{\cdot}$ provient de $\tilde{\mathbb{C}}$ (Définition 5.14). Sesqui-linéarité et symétrie hermitienne sont directes. Positivité : $\|\psi\|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2$ est somme de deux carrés de modules, donc dans $\tilde{\mathbb{R}}_{\geq 0}$; nulle ssi $|z_1| = |z_2| = 0$, i.e. $\psi = 0$. La réalité de $\|\psi\|^2$ permet d'appliquer le produit scalaire réel du document Hilbert à la décomposition $\tilde{\mathbb{C}}^2 = \tilde{\mathbb{R}}^4$. $\square$

5.2.3 La sphère des états normalisés : S^3

Définition 5.18 (États normalisés). Un *état normalisé* est un $\psi \in \tilde{\mathbb{C}}^2$ tel que $\|\psi\| = 1$, i.e. $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$. L'ensemble des états normalisés est la sphère unité

$$S_*^3 := \{ \psi \in \tilde{\mathbb{C}}^2 : \|\psi\| = 1 \} \subset \tilde{\mathbb{R}}^4.$$

Proposition 5.19 (S^3 comme sphère des directions). S_*^3 est la sphère unité de l'espace $\tilde{\mathbb{C}}^2 \cong \tilde{\mathbb{R}}^4$ de dimension 4. C'est le cas $d = 4$ ($n = 3$) de la sphère des directions du grain : $S^{d-1} = S^3$. Sa promotion $\text{st}(S_*^3) = S^3$ est la sphère unité standard de $\mathbb{R}^4$.

Proof. $\|\psi\| = 1$ définit la sphère unité de $\tilde{\mathbb{R}}^4$; sa dimension est $4 - 1 = 3$. La promotion écrase les halos infinitésimaux et envoie la contrainte $\|\psi\| = 1$ sur la même contrainte dans $\mathbb{R}^4$, d'où $\text{st}(S_*^3) = S^3$. $\square$

5.2.4 Le quotient par la phase : la fibration de Hopf

Définition 5.20 (Équivalence de phase). Deux états normalisés ψ, ψ' sont *équivalents* si $\psi' = e^{i\theta} \psi$ pour un θ , où $e^{i\theta} = \mathcal{E}(\theta)$ est l'exponentielle complexe stratale sur le cercle unité. On note $[\psi]$ la classe.

Remarque 5.21 (La phase est la structure cyclique stratale). L'action $\psi \mapsto e^{i\theta} \psi$ est celle du groupe des phases $U(1) = \{e^{i\theta}\}$. Or ce cercle est précisément le quotient $\mathcal{G}_{-n_\infty}/\mathcal{G}_{-2n_\infty}$ (structure cyclique stratale). La fibre de l'équivalence de phase est donc la *structure cyclique déjà construite* dans le programme.

Théorème 5.22 (Sphère de Bloch stratale). Le quotient de S_*^3 par l'équivalence de phase est l'espace projectif complexe $\mathbb{CP}^1$, diffeomorphe à la sphère S^2 :

$$S_*^3 / (\psi \sim e^{i\theta} \psi) = \mathbb{CP}^1 \cong S^2.$$

Cette sphère S^2 est la sphère de Bloch : l'espace des états (purs) d'un qubit. Le passage $S_*^3 \rightarrow S^2$, de fibre S^1 (le cercle des phases), est la fibration de Hopf.

Proof. Un état normalisé $\psi = (z_1, z_2)$ modulo phase globale est déterminé par le rapport $[z_1 : z_2] \in \mathbb{CP}^1$ (droite complexe de $\tilde{\mathbb{C}}^2$), défini pourvu que $\psi \neq 0$ — garanti par $\|\psi\| = 1$. L'application $\psi \mapsto [z_1 : z_2]$ est surjective sur $\mathbb{CP}^1$ et ses fibres sont exactement les orbites de phase $\{e^{i\theta} \psi\}$, d'où l'identification du quotient à $\mathbb{CP}^1$.

Le diffeomorphisme $\mathbb{CP}^1 \cong S^2$ est classique : en coordonnée affine $w = z_2/z_1 \in \tilde{\mathbb{C}} \cup \{\infty\}$, la projection stéréographique envoie $\tilde{\mathbb{C}} \cup \{\infty\}$ sur S^2 . La structure de fibré $S_*^3 \rightarrow S^2$ à fibres S^1 est la fibration de Hopf. $\square$

Corollaire 5.23 (Les trois pièces de Hopf dans le programme). *La fibration de Hopf $S^3 \xrightarrow{S^1} S^2$ est entièrement composée d'objets du programme du grain :*

- S^3 sphère des états normalisés (grain de dim 4);
- S^1 cercle des phases = $\mathcal{G}_{-n_\infty}/\mathcal{G}_{-2n_\infty}$ (fibre);
- S^2 sphère de Bloch = $\mathbb{CP}^1$ (base, espace des états).

5.2.5 Coordonnées de Bloch

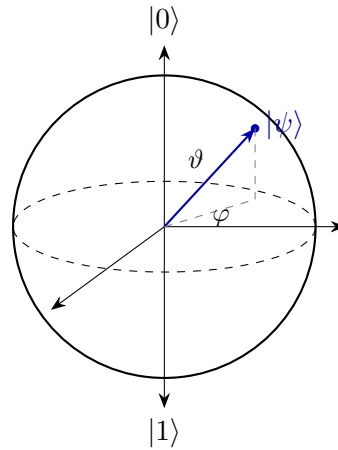
Proposition 5.24 (Paramétrage de la sphère de Bloch). *Tout état pur d'un qubit s'écrit, à phase globale près,*

$$|\psi\rangle = \cos \frac{\vartheta}{2} |0\rangle + e^{i\varphi} \sin \frac{\vartheta}{2} |1\rangle, \quad \vartheta \in [0, \pi], \quad \varphi \in [0, 2\pi[,$$

et (ϑ, φ) sont les coordonnées sphériques du point correspondant sur S^2 . Le module encode ϑ (poids relatifs des deux niveaux, sur l'axe réel stratal), la phase relative encode φ (sur le cercle stratal).

Remarque 5.25 (Répartition stratale des deux angles). Les deux angles de Bloch se lisent sur deux objets stratals distincts : ϑ (l'amplitude relative $\cos \frac{\vartheta}{2}$ vs $\sin \frac{\vartheta}{2}$) sur l'axe réel $\leftrightarrow \mathcal{G}_{-2n_\infty}$; φ (la phase relative) sur le cercle $\leftrightarrow \mathcal{G}_{-n_\infty}/\mathcal{G}_{-2n_\infty}$. La sphère de Bloch combine ainsi les deux strates du plan complexe.

5.2.6 Schéma



Sphère de Bloch $S^2 = \mathbb{CP}^1$

5.2.7 Synthèse

- Le corps complexe stratal $\tilde{\mathbb{C}} = \tilde{\mathbb{R}}[i]$ (déjà construit) fournit le produit hermitien sur $\tilde{\mathbb{C}}^2$.
- Les états normalisés forment la sphère S^3 (sphère des directions du grain de dimension 4).
- Le quotient par la phase — où la fibre S^1 est la structure cyclique $\mathcal{G}_{-n_\infty}/\mathcal{G}_{-2n_\infty}$ — donne $\mathbb{CP}^1 \cong S^2$, la sphère de Bloch.
- La fibration de Hopf $S^3 \xrightarrow{S^1} S^2$ est ainsi entièrement composée d'objets du programme du grain (Corollaire 5.23).

Portée. Ce résultat construit l'espace des états d'un qubit, non sa dynamique ni sa mesure. L'évolution unitaire (Schrödinger), la règle de Born et l'intrication requièrent des structures supplémentaires, non abordées ici. La correspondance établie est *géométrique* : le programme du grain fournit la variété des états purs (S^2) et sa fibration ($S^3 \rightarrow S^2$), objets centraux mais distincts de la mécanique quantique complète.

5.3 Premier postulat : la superposition

Préambule

Cette section formule le *premier postulat* de la mécanique quantique (principe de superposition) dans le cadre du programme du grain, en s'appuyant sur :

- le corps complexe stratal $\tilde{\mathbb{C}} = \tilde{\mathbb{R}}[i]$;
- l'espace de Hilbert stratal $\tilde{\mathbb{C}}^n$ et sa sphère des états S^{2n-1} (note *Sphère de Bloch stratale*).

L'apport propre est la *localisation stratale* des deux composantes d'un coefficient complexe — amplitude et phase — sur deux structures distinctes de la stratification, et la localisation du terme d'interférence.

Statut. Ce postulat décrit la *structure de l'espace des états*. Il ne concerne ni l'évolution (postulat de Schrödinger), ni la mesure (règle de Born), traitées séparément.

5.3.1 Énoncé

[Superposition stratale] L'espace des états d'un système quantique est un espace vectoriel $\mathcal{H} = \tilde{\mathbb{C}}^n$ sur le corps complexe stratal $\tilde{\mathbb{C}}$. Si $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle \in \mathcal{H}$ sont des états, alors toute combinaison linéaire

$$|\psi\rangle = \alpha |\phi_1\rangle + \beta |\phi_2\rangle, \quad \alpha, \beta \in \tilde{\mathbb{C}},$$

est un état du système, après normalisation $\| |\psi\rangle \| = 1$.

Remarque 5.26 (Ce qu'est — et n'est pas — le postulat). Le principe de superposition est l'énoncé que *l'espace des états est vectoriel* : les combinaisons d'états sont des états. Il ne doit pas être confondu avec la linéarité du produit scalaire $\langle \chi | \phi_1 + \lambda \phi_2 \rangle = \langle \chi | \phi_1 \rangle + \lambda \langle \chi | \phi_2 \rangle$, qui en est une *conséquence* (propriété de $\langle \cdot | \cdot \rangle$), non le postulat lui-même. Une seule origine O ; les états sont des *vecteurs* qui en partent.

5.3.2 Action d'un coefficient : rotation-dilatation stratale

Proposition 5.27 (Décomposition stratale de λ). *Soit $\lambda = |\lambda| e^{i \arg \lambda} \in \tilde{\mathbb{C}}$. Son action $|\phi\rangle \mapsto \lambda |\phi\rangle$ se décompose en :*

- une dilatation de facteur $|\lambda|$, portée par l'axe réel $\tilde{\mathbb{R}} \leftrightarrow \mathcal{G}_{-2n_\infty}$ (amplitude) ;
- une rotation d'angle $\arg \lambda$, portée par le cercle unité $\leftrightarrow \mathcal{G}_{-n_\infty} / \mathcal{G}_{-2n_\infty}$ (phase).

C'est la multiplication complexe stratale $z_1 z_2 = |z_1| |z_2| e^{i(\arg z_1 + \arg z_2)}$, appliquée à $\lambda \cdot |\phi\rangle$.

Remarque 5.28 (Contenu stratal de la superposition). La superposition met donc en jeu *les deux structures* du plan complexe stratal : l'amplitude (module) sur la strate fine $\mathcal{G}_{-2n_\infty}$, et la phase (argument) sur la strate cyclique $\mathcal{G}_{-n_\infty} / \mathcal{G}_{-2n_\infty}$. Un coefficient complexe n'est pas un scalaire indifférencié : ses deux parties vivent sur deux niveaux distincts de la stratification.

5.3.3 Normalisation et localisation de l'interférence

Proposition 5.29 (Norme d'une superposition). *Pour $|\psi\rangle = \alpha |\phi_1\rangle + \beta |\phi_2\rangle$ avec $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle$ normalisés,*

$$\| |\psi\rangle \|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2 \operatorname{Re}(\bar{\alpha} \beta \langle \phi_1 | \phi_2 \rangle).$$

La condition de normalisation $\| |\psi\rangle \| = 1$ place l'état sur la sphère $S^{2n-1} \subset \tilde{\mathbb{C}}^n$.

Proof. $\|\psi\|^2 = \langle \alpha\phi_1 + \beta\phi_2 | \alpha\phi_1 + \beta\phi_2 \rangle$. Par sesqui-linéarité, on développe en quatre termes : $|\alpha|^2 \langle \phi_1 | \phi_1 \rangle + |\beta|^2 \langle \phi_2 | \phi_2 \rangle + \bar{\alpha}\beta \langle \phi_1 | \phi_2 \rangle + \bar{\beta}\alpha \langle \phi_2 | \phi_1 \rangle$. Les deux premiers valent $|\alpha|^2$ et $|\beta|^2$ (états normalisés) ; les deux derniers sont conjugués l'un de l'autre, de somme $2 \operatorname{Re}(\bar{\alpha}\beta \langle \phi_1 | \phi_2 \rangle)$. $\square$

Théorème 5.30 (L'interférence vit sur la strate cyclique). *Le terme croisé $I := 2 \operatorname{Re}(\bar{\alpha}\beta \langle \phi_1 | \phi_2 \rangle)$, signature de la superposition quantique (interférence), dépend de la phase relative $\arg(\bar{\alpha}\beta) + \arg\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle$. Cette phase relative est portée par la strate cyclique $\mathcal{G}_{-n_\infty}/\mathcal{G}_{-2n_\infty}$.*

Proof. Écrivons $\bar{\alpha}\beta \langle \phi_1 | \phi_2 \rangle = R e^{i\Phi}$ avec $R = |\alpha||\beta| |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle| \in \tilde{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ et $\Phi = \arg(\bar{\alpha}\beta) + \arg\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle$. Alors $I = 2R \cos \Phi$. Le module R vit sur l'axe réel ($\mathcal{G}_{-2n_\infty}$) ; la phase Φ , dont dépend le signe et l'amplitude de $\cos \Phi$, vit sur le cercle ($\mathcal{G}_{-n_\infty}/\mathcal{G}_{-2n_\infty}$). L'interférence est donc *modulée par la phase relative*, portée par la strate cyclique. $\square$

Remarque 5.31 (Pourquoi c'est un énoncé, non une reformulation triviale). Une simple addition de probabilités classiques donnerait $|\alpha|^2 + |\beta|^2$, *sans* terme croisé. Le terme I est absent du classique et présent du quantique : c'est le contenu de la superposition. Le programme du grain le *localise* : I est porté par la phase relative, qui vit sur la strate cyclique $\mathcal{G}_{-n_\infty}/\mathcal{G}_{-2n_\infty}$ — la même structure qui, dans la note *Sphère de Bloch stratale*, est la fibre S^1 de la fibration de Hopf. L'interférence quantique et la phase de Bloch partagent ainsi la même strate.

5.3.4 Synthèse

- Le premier postulat s'énonce : l'espace des états est $\tilde{\mathbb{C}}^n$, vectoriel sur $\tilde{\mathbb{C}}$ (Postulat 5.3.1).
- Un coefficient $\lambda \in \tilde{\mathbb{C}}$ agit par rotation-dilatation, décomposée sur les deux strates : amplitude (fine) et phase (cyclique) (Proposition 5.27).
- La superposition fait apparaître un terme d'interférence $I = 2R \cos \Phi$ (Proposition 5.29), absent du classique.
- Ce terme est *localisé* : sa modulation vit sur la strate cyclique $\mathcal{G}_{-n_\infty}/\mathcal{G}_{-2n_\infty}$ (Théorème 5.30), la même que la phase de Bloch.

Portée. Ce postulat fixe la *structure de l'espace des états* (linéarité, superposition, interférence). L'évolution unitaire et la mesure relèvent des postulats suivants, qui requièrent des structures supplémentaires (opérateurs, dynamique, projection) non abordées ici.

5.4 Second postulat : les observables

Le premier postulat fixe la structure de l'espace ; le second, la façon dont on y lit des grandeurs mesurables.

Préambule

Cette section formule le *second postulat* de la mécanique quantique (les observables) dans le cadre du programme du grain, à la suite du premier postulat (superposition). Elle s'appuie sur :

- l'espace de Hilbert stratal $\mathcal{H} = \tilde{\mathbb{C}}^n$ et sa sphère des états S^{2n-1} ;
- la décomposition stratale d'un coefficient complexe (module sur $\mathcal{G}_{-2n_\infty}$, phase sur $\mathcal{G}_{-n_\infty}/\mathcal{G}_{-2n_\infty}$).

L'apport propre est une *lecture géométrique* du spectre (déformation sphère $\rightarrow$ ellipsoïde) et la *localisation stratale* des valeurs propres et des phases de décomposition.

Statut. Ce postulat fixe la correspondance grandeur-mesurable $\leftrightarrow$ opérateur, le spectre des valeurs possibles et la base de décomposition. Il ne dit ni *quelle* valeur est obtenue, ni *avec quelle probabilité* (règle de Born), ni ce que devient l'état après mesure (projection) : ces points relèvent des postulats suivants.

5.5 Énoncé

[Observables stratales] À toute grandeur physique mesurable est associé un *opérateur hermitien* A sur $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$, i.e. $A^\dagger = A$ (où $\dagger$ est l'adjoint pour le produit hermitien stratal). Les *valeurs possibles* de la mesure sont les valeurs propres de A ; les *vecteurs propres* forment une base de décomposition des états.

Remarque 5.32 (Ce que le postulat dit — et ne dit pas). L'observable A ne *déforme pas* l'état : elle fournit une *base privilégiée* (ses axes propres) et une *échelle de résultats* (ses valeurs propres). L'action de A comme opérateur linéaire (déformation, §3) est une *lecture géométrique du spectre*, à distinguer du rôle physique de mesure.

5.6 Spectre réel et base propre

Proposition 5.33 (Théorème spectral stratal). *Soit A hermitien sur $\mathbb{C}^n$. Alors, après promotion :*

1. *les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont réelles ($\lambda_k \in \mathbb{R}$) ;*
2. *il existe une base orthonormée ($|a_1\rangle, \dots, |a_n\rangle$) de vecteurs propres, $A|a_k\rangle = \lambda_k|a_k\rangle$;*
3. *dans cette base, A est diagonale : $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.*

Proof. Réalité des valeurs propres : si $A|a\rangle = \lambda|a\rangle$ avec $\| |a\rangle \| = 1$, alors $\lambda = \langle a|A|a\rangle = \overline{\langle a|A^\dagger|a\rangle} = \overline{\langle a|A|a\rangle} = \bar{\lambda}$, donc $\lambda \in \mathbb{R}$. Orthogonalité des espaces propres et existence de la base orthonormée : théorème spectral usuel, transféré à $\mathbb{C}^n$ (dimension finie), puis promu dans $\mathbb{C}^n$ par st. $\square$

Corollaire 5.34 (Décomposition d'un état). *Tout état $|\psi\rangle$ se décompose sur la base propre :*

$$|\psi\rangle = \sum_{k=1}^n c_k |a_k\rangle, \quad c_k = \langle a_k|\psi\rangle \in \mathbb{C}.$$

Le module $|c_k|$ (amplitude) vit sur l'axe réel $\leftrightarrow \mathcal{G}_{-2n_\infty}$; la phase $\arg c_k$ vit sur le cercle $\leftrightarrow \mathcal{G}_{-n_\infty}/\mathcal{G}_{-2n_\infty}$.

5.7 Lecture géométrique : déformation de la sphère

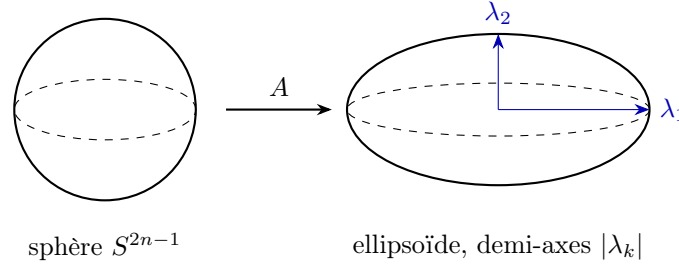
Théorème 5.35 (Sphère $\rightarrow$ ellipsoïde). *Comme opérateur linéaire, A transforme la sphère unité S^{2n-1} en un ellipsoïde dont les demi-axes ont pour longueurs $|\lambda_k|$, orientés selon les directions propres $|a_k\rangle$:*

$$A(S^{2n-1}) = \left\{ \sum_k \lambda_k x_k |a_k\rangle : \sum_k |x_k|^2 = 1 \right\}.$$

La distorsion est réelle (car les λ_k sont réels) : chaque axe propre est dilaté de λ_k (comprimé si $|\lambda_k| < 1$, inversé si $\lambda_k < 0$).

Proof. Dans la base propre, A est diagonale (Proposition 5.33). L'image d'un vecteur unitaire $\sum_k x_k |a_k\rangle$ (avec $\sum_k |x_k|^2 = 1$) est $\sum_k \lambda_k x_k |a_k\rangle$. En posant $y_k = \lambda_k x_k$, la contrainte devient $\sum_k |y_k|^2 / |\lambda_k|^2 = 1$ (pour $\lambda_k \neq 0$) : c'est l'équation d'un ellipsoïde de demi-axes $|\lambda_k|$. $\square$

Remarque 5.36 (La boule-grain devient ellipsoïde). La sphère des états (bord de la boule-grain de dimension $2n$) est ainsi déformée en un ellipsoïde par l'observable. C'est la *lecture géométrique du spectre* : les valeurs propres se lisent comme les longueurs des demi-axes. Cette déformation décrit l'action de A comme transformation linéaire ; elle n'est pas l'effet d'une mesure sur l'état (qui relève de la projection, postulat suivant).



5.8 Localisation stratale du spectre

Proposition 5.37 (Répartition stratale). *Dans la mesure d'une observable A sur un état $|\psi\rangle = \sum_k c_k |a_k\rangle$:*

- les valeurs propres λ_k (résultats possibles) sont réelles, portées par l'axe réel $\tilde{\mathbb{R}} \leftrightarrow \mathcal{G}_{-2n_\infty}$;
- les amplitudes $|c_k|$ sont réelles, portées par la même strate $\mathcal{G}_{-2n_\infty}$;
- les phases $\arg c_k$ sont portées par la strate cyclique $\mathcal{G}_{-n_\infty}/\mathcal{G}_{-2n_\infty}$.

Remarque 5.38 (Cohérence avec le premier postulat). La répartition est la même que pour la superposition : le *réel* (valeurs propres, amplitudes, dilatations) vit sur la strate fine $\mathcal{G}_{-2n_\infty}$; le *cyclique* (phases) vit sur $\mathcal{G}_{-n_\infty}/\mathcal{G}_{-2n_\infty}$. Les valeurs propres étant réelles, l'observable « n'agit » que sur la strate fine (dilatations réelles) : c'est le sens stratal de l'hermiticité.

5.9 Synthèse

- Le second postulat : toute grandeur mesurable $\leftrightarrow$ opérateur hermitien A sur $\tilde{\mathbb{C}}^n$; valeurs propres réelles = résultats possibles ; base propre = base de décomposition (Postulat 5.5, Proposition 5.33).
- Lecture géométrique : A déforme la sphère des états en un ellipsoïde de demi-axes $|\lambda_k|$ (Théorème 5.35) — distorsion réelle car spectre réel.
- Localisation stratale : valeurs propres et amplitudes sur la strate fine $\mathcal{G}_{-2n_\infty}$; phases sur la strate cyclique $\mathcal{G}_{-n_\infty}/\mathcal{G}_{-2n_\infty}$ (Proposition 5.37).
- L'hermiticité se lit stratalement : l'observable n'agit (par dilatation réelle) que sur la strate fine, le spectre étant réel.

Portée. Ce postulat fixe les valeurs possibles et la base de mesure. Il ne détermine ni le résultat d'une mesure individuelle, ni sa probabilité (règle de Born), ni l'état post-mesure (projection). Ces éléments relèvent des postulats de mesure, non abordés ici. La déformation sphère $\rightarrow$ ellipsoïde est une lecture géométrique du spectre, distincte de l'effet physique d'une mesure sur l'état.

5.10 La fonction d'onde et la règle de Born

À partir d'ici, le régime change : nous quittons la construction rigoureuse pour la lecture exploratoire. Les résultats qui suivent proposent une fondation stratale aux mécanismes de mesure ; ils se situent entre la suggestion conceptuelle et la reformulation, non au rang de démonstration.

5.10.1 La fonction d'onde comme objet stratal

En représentation position, l'état est une fonction d'onde $\psi(x) \in \mathbb{C}$ admettant la décomposition canonique $\psi(x) = |\psi(x)| e^{i\theta(x)}$. La question stratale est : où vivent ces deux composantes ?

Définition 5.39 (fonction d'onde stratale). Une fonction d'onde stratale est une application

$$\psi : \widetilde{\mathbb{R}}_*^+ \longrightarrow, \quad \psi(x) = |\psi(x)| e^{i\theta(x)},$$

où l'amplitude $|\psi(x)| \in \widetilde{\mathbb{R}}_*^+$ est une position dans la strate fine $\mathcal{G}_{-n_\infty}(axerel)$, et la phase $e^{i\theta(x)} \in S^1$ un élément du cercle unité $\leftrightarrow$.

La réponse reprend exactement le motif du §???. L'amplitude, non négative, « habite » la strate fine, là où sont localisées les positions précises. La phase, cyclique par nature (θ et $\theta + 2\pi$ donnent la même physique), vit sur le cercle — et sa cyclicité trouve sa fondation dans la structure quotient. **La nature complexe de la fonction d'onde n'est plus un axiome adjoint** : elle est forcée par la dualité stratale, qui exige que localisation (amplitude fine) et interférence (phase cyclique) vivent sur deux niveaux distincts.

5.10.2 Le caractère probabiliste par cardinalité stratale

[caractère probabiliste stratal] Le programme est intrinsèquement stratifié : pour chaque position grossière $X \in$, il existe 2^{n_∞} positions fines distinctes de $\mathcal{G}_{-n_\infty}$ qui projettent sur X . L'observation la résolution grossière états fins ; la probabilité d'un résultat est proportionnelle au nombre d'états fins compatibles.

La projection $\mathcal{G}_{-n_\infty} \rightarrow n_\infty$ n'est pas inversible sans perte : à chaque position grossière correspond une multitude de positions fines indistinguables au niveau grossier. Cette perte est l'analogue stratal de l'**incertitude quantique fondamentale**. L'observateur, situé au niveau grossier — c'est lui qui mesure, lui qui voit — n'accède qu'aux positions agrégées ; les positions fines restent inaccessibles, et leur multiplicité produit le caractère probabiliste. Dans le cadre d'une fonction d'onde, la distribution n'est pas uniforme mais pondérée : là où $|\psi|$ est grande se concentrent davantage de positions fines compatibles avec l'état.

5.10.3 La règle de Born : émergence du carré

La règle de Born stipule que la densité de probabilité est $|\psi|^2$, non $|\psi|$. Le carré est essentiel, et voici sa lecture stratale.

Théorème 5.40 (règle de Born stratale). Si l'amplitude $|\psi|$ est une position dans la strate fine $\mathcal{G}_{-n_\infty}$, la densité de probabilité observée la strate grossière s'duit par projection, et fait apparaitre le carré $|\psi|^2$ comme conséquence du **facteur 2** de la transformation logarithmique entre strates adjacentes.

Argument. La multiplication lexicale stratifie : pour $x \in$, le produit $x \cdot x = x^2$ sort de strate vers $\mathcal{G}_{-n_\infty}$. Inversement, en coordonnée logarithmique, le passage entre strates adjacentes se fait par facteur 2 additif $2T(x)$. L'amplitude $|\psi|$, qui mesure la localisation dans la strate fine, doit produire une densité observable par projection vers la strate grossière ; cette projection introduit le facteur 2, qui se manifeste comme **carré** dans la coordonnée linéaire et comme **facteur 2 additif** dans la coordonnée logarithmique. Plus concrètement : la densité observée correspond à l'aire occupée par l'amplitude dans la strate fine, et l'aire d'une portion linéaire de longueur $|\psi|$ dans la mosaïque fine est précisément $|\psi|^2$. $\square$

5.10.4 Pourquoi le carré, et pas une autre puissance

Remarque 5.41 (le carré comme signature d'un décalage stratal). Le carré $|\psi|^2$ n'est pas une convention arbitraire : c'est le **degré de stratification** qui sépare la strate de l'observateur (grossière) de la strate de la réalité physique (fine). Cette lecture a une valeur prédictive conceptuelle :

- Dans une mécanique hypothétique où l'observateur serait **deux** strates au-dessus de la réalité, la règle serait $|\psi|^4$.
- Dans une mécanique où observateur et réalité seraient dans la **même** strate (le cas classique), il n'y aurait pas de règle de Born : $|\psi|$ donnerait directement la probabilité — ce qui est exactement la distribution de probabilité classique.

Le carré est donc la signature d'un décalage d'une strate entre observation et réalité : la profondeur stratale propre à la mécanique quantique. La conservation de la probabilité $\int |\psi(x)|^2 dx = 1$ s'interprète alors comme la conservation du flux entre strate fine (amplitude) et strate grossière (densité observée).

5.11 La mesure comme projection stratale irréversible

5.11.1 Le mécanisme

[mesure stratale] La mesure quantique est la projection

$$\pi : \mathcal{G} \longrightarrow n_\infty$$

qui à chaque position fine associe sa position grossière. Cette projection est **irréversible** : connaître la position grossière ne permet pas de reconstituer la fine (il y a 2^{n_∞} positions fines compatibles).

Avant la mesure, le système est en superposition : il occupe simultanément plusieurs positions fines, encodées par l'amplitude (strate fine) et la phase (cercle unité, quotient stratal). Après la mesure, il est dans une position grossière déterminée — le résultat observé. La probabilité d'obtenir $X \in$ est proportionnelle au nombre de positions fines compatibles à la fois avec X et avec l'état préparé ψ , soit précisément $|\psi(X)|^2$.

5.11.2 L'effondrement comme élimination de la phase

Remarque 5.42 (effondrement comme passage stratal). L'« effondrement de la fonction d'onde » correspond au passage instantané et irréversible de la strate fine vers la strate grossière au moment de la mesure. La projection π réduit le système à sa composante grossière : la position grossière est observée, et **la phase est éliminée**. Cette phase vivait sur le cercle unité S^1 ; la mesure l'écrase sur un point.

C'est cette élimination qui rend la mesure irréversible. On perd la coordonnée cyclique, et l'on ne peut pas la reconstituer à partir de la seule position grossière. Géométriquement, on **projette le cercle unité S^1 sur un point** : la phase est « gelée ». On mesurera ici toute la cohérence du chapitre : la même strate cyclique qui portait l'interférence (§5.3) et la fibre de Bloch (§5.2) est celle que la mesure détruit. Interférence, géométrie des états et irréversibilité de la mesure sont trois faces du même quotient.

5.11.3 Relecture : un changement d'échelle, non un effondrement objectif

Remarque 5.43 (lecture stratale de l'effondrement). La superposition avant mesure n'est pas une « indéterminée » au sens classique : c'est une **réalité plurielle** à la strate fine, la multiplicité des

positions de $\mathcal{G}_{-n_\infty}$ compatibles avec l'attribution. L'observateur, suivant la stratégie choisie, ne peut accéder à cette pluralité de

Dans cette lecture, il n'y a pas d'effondrement *physique* au sens d'un changement objectif du système : il y a un **passage d'échelle d'observation**, qui agrège la pluralité fine en un résultat grossier unique. L'apparent mystère de la réduction du paquet d'ondes se dissout dans une relation entre deux résolutions.

5.12 Perspectives : dynamique et indétermination

Les deux lectures suivantes sont proposées comme conjectures exploratoires, demandant chacune une formalisation séparée. Elles indiquent des directions, non des résultats acquis.

5.12.1 L'évolution unitaire comme rotation sur le cercle

L'évolution temporelle est gouvernée par l'équation de Schrödinger, $|\psi(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar}|\psi(0)\rangle$, où H est l'hamiltonien. C'est une exponentielle complexe d'un opérateur autoadjoint — et l'exponentielle complexe $e^{i\theta}$ émerge naturellement du programme comme construction stratale.

[évolution unitaire] L'évolution unitaire $e^{-iHt/\hbar}$ pourrait s'interpréter comme une **rotation sur le cercle unité** S^1 , c'est-à-dire un déplacement dans le quotient stratal. L'hamiltonien H jouerait le rôle du générateur de la rotation, et la constante $\hbar$ serait liée à l'invariant stratal $(2\pi)^2$.

La dynamique quantique serait alors un mouvement dans la strate cyclique — cohérent avec le fait que c'est cette même strate qui porte la phase, l'interférence et la fibre de Bloch.

5.12.2 Le principe d'indétermination et l'invariant stratal

Le principe de Heisenberg borne inférieurement le produit des incertitudes : $\Delta X \cdot \Delta P \geq \hbar/2$. Or le programme a fait apparaître un invariant produit $(2\pi)^2$, comme produit croisé *fine* $\times$ *grossière* des finesse élémentaires.

[indétermination stratale] Si la position X vit dans la strate fine $\mathcal{G}_{-n_\infty}$ avec finesse $1/2^{n_\infty}$, et l'impulsion P (canoniquement conjuguée) dans la strate grossière avec finesse 2π , alors le produit $\Delta X \cdot \Delta P$ serait au moins l'invariant croisé $(2\pi)^2$, modulo un facteur lié à l'identification de $\hbar$.

Le principe d'indétermination trouverait ainsi une fondation dans la **dualité de résolution** du programme, et la constante de Planck $\hbar$ deviendrait un invariant stratal dérivable du procédé du grain. La conjugaison canonique position/impulsion refléterait la dualité fine/grossière elle-même.

5.13 La limite classique : promotion et principe de correspondance

Cette dernière section est explicitement une analogie structurelle. Elle ne dérive pas la physique du cadre stratal, ni l'inverse : deux structures partagent un motif mathématique, que l'on explicite — avec ses garde-fous.

5.13.1 La promotion stratale

Définition 5.44 (promotion). La promotion est le passage $\tilde{\mathbb{R}}^{\text{fin}} \rightarrow \mathbb{R} = \tilde{\mathbb{R}}^{\text{fin}}/\mathfrak{m}$, quotient par l'idéal $\mathfrak{m}$ des infinitésimaux. Elle **écrase la finesse** 2^{-n_∞} **sur** 0 : le grain (structure discrète d'épaisseur 2^{-n_∞}) devient le continu.

5.13.2 Le principe de correspondance

Le principe de correspondance de Bohr (1920) énonce que les prédictions quantiques rejoignent les prédictions classiques dans une certaine limite. On en distingue deux mécanismes.

[espacement relatif des niveaux] Les niveaux d'énergie $E_1, E_2, E_3, \dots$ sont discrets, mais leur espacement relatif s'annule à grand nombre quantique :

$$\frac{E_{n+1} - E_n}{E_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

À grand n , les niveaux sont si serrés (relativement à leur valeur) qu'ils deviennent indistinguables d'un continu.

[limite $\hbar/S \rightarrow 0$] Les équations quantiques redonnent les équations classiques lorsque le quantum d'action $\hbar$ devient négligeable devant l'action S : $\hbar/S \rightarrow 0$. Le quantum $\hbar$ joue le rôle du « grain d'action » ; son effacement relatif fait émerger le continu classique.

5.13.3 Le motif commun

Proposition 5.45 (analogie structurelle). *La promotion stratale et le principe de correspondance partagent le motif : un pas élémentaire discret, rendu négligeable à l'échelle d'observation, fait émerger le continu. Schématiquement :*

$$\underbrace{2^{-n\infty} \xrightarrow{\text{st}} 0}_{\text{grain} \rightarrow \text{continu (programme)}} \longleftrightarrow \underbrace{\frac{\hbar}{S} \rightarrow 0}_{\text{quantique} \rightarrow \text{classique (correspondance)}}$$

Programme du grain	Principe de correspondance
finesse $2^{-n\infty}$	quantum $\hbar$
grain (discret)	niveaux / spectre (discret)
promotion st	limite classique $\hbar/S \rightarrow 0$
continu $\mathbb{R}$	continuum classique

5.13.4 Garde-fous : trois différences de nature

Le parallèle est structurel ; il ne doit pas masquer trois différences de nature, sous peine de dériver vers une identification abusive.

1. **$\hbar$ est une constante finie, non un infinitésimal.** La finesse $2^{-n\infty}$ est plus petite que tout standard, et la promotion l'écrase *exactement* sur 0. Le quantum $\hbar \approx 1,05 \times 10^{-34}$ J.s est fini non nul ; la « limite $\hbar \rightarrow 0$ » signifie $\hbar/S \rightarrow 0$, non $\hbar = 0$. La promotion est **exacte** ; la correspondance est **asymptotique**.
2. « **Paraître continu** » n'est pas « **être continu** ». Dans le mécanisme 1, le spectre reste discret à tout n fini : il *paraît* continu, il ne le *devient* pas. La promotion **pose** le continu (quotient exact) ; la correspondance le rend seulement *indistinguishable* (limite). La promotion est plus radicale.
3. **Analogie, non dérivation.** Ce parallèle éclaire une ressemblance de structure ; on ne démontre pas le principe de correspondance par la promotion, ni l'inverse. Deux structures, un motif commun.

Portée. Ce parallèle fournit néanmoins à la promotion stratale un ancrage physique légitime : contrairement à la dualité onde-corpuscule (complémentarité sans passage) ou à la métrologie de l'horloge atomique (échantillonnage sans discrétisation), le principe de correspondance possède *réellement* un mécanisme de passage discret $\rightarrow$ continu. C'est ce qui distingue cette analogie d'une simple ressemblance verbale.

Synthèse et conclusion

Ce chapitre a lu la mécanique quantique à travers une unique lentille : la **dualité stratale** fine/grossière et son quotient cyclique. Ramassons ce que chaque niveau de certitude a livré.

Ce qui est construit (rigoureux). L'espace des états d'un qubit et sa géométrie sont entièrement composés d'objets du programme du grain. Le grain de dimension 4 fournit la sphère S^3 des états normalisés ; le quotient par la phase — dont la fibre S^1 est la structure cyclique — donne la sphère de Bloch $S^2 = \mathbb{CP}^1$ via la fibration de Hopf. La variété des états purs préexiste dans la stratification.

Ce qui est reformulé (postulé). Les deux premiers postulats s'énoncent dans ⁿ. La superposition fait apparaître un terme d'interférence $I = 2R \cos \Phi$, absent du classique, localisé sur la strate cyclique — la même que la phase de Bloch. Les observables sont les opérateurs hermitiens ; leur spectre réel déforme la sphère des états en ellipsoïde, et l'hermiticité se lit comme l'action sur la seule strate fine.

Ce qui est proposé (exploratoire). La fonction d'onde complexe est forcée par la dualité stratale : amplitude fine, phase cyclique. Le caractère probabiliste émerge de la cardinalité (2^{n_∞} positions fines par position grossière). La règle de Born $|\psi|^2$ se lit comme le facteur 2 de la stratification — le carré étant la signature d'un décalage d'une strate entre observation et réalité. La mesure est la projection irréversible $\mathcal{G} \rightarrow n_\infty$, et l'effondrement l'écrasement du cercle des phases sur un point.

Ce qui est conjecturé ou analogue. L'évolution unitaire comme rotation sur S^1 , et l'indétermination comme invariant stratal $(2\pi)^2$, restent des pistes à formaliser. La limite classique, enfin, partage avec la promotion un motif — *un pas élémentaire effacé fait émerger le continu* — mais une analogie, non une identité.

Le gain conceptuel de cette lecture tient en quatre points. Elle donne une **fondation géométrique** à la nature complexe de la fonction d'onde, qui cesse d'être un axiome adjoint. Elle interprète le **caractère probabiliste** comme une conséquence de l'échelle d'observation plutôt que comme une indéterminée fondamentale. Elle **dérive** la règle de Born d'une propriété structurelle (le facteur 2), plutôt que de la poser. Et elle **distingue nettement les rôles** de la strate fine (amplitude, localisation, spectre réel) et du quotient cyclique (phase, interférence, effondrement).

Les directions d'approfondissement restent nombreuses : formalisation de l'évolution unitaire comme rotation, identification précise de $\hbar$ à un invariant du procédé, extension aux systèmes multi-particules et à l'intrication, articulation avec la théorie quantique des champs. Elles ouvrent, dans le prolongement du programme du grain, un programme de recherche autonome — dont ce chapitre n'aura tracé que la géométrie de départ.

Chapter 6

Les jauges

Résumé du chapitre. On développe une alternative au calcul en espace vectoriel : la *jauge*, définie comme un couple relationnel (ordre générique, équivalence) sur un support sans structure préalable. La *partie I* pose la théorie algébrique (relations d'ordre génériques, jauges, sphère, finesse, morphismes par tirage en arrière et poussée en avant), puis la stratifie (ensembliste, topologique, différentielle, analytique, métrique). La *partie II* l'applique — photon, déformation moléculaire, boucle adaptative en biologie. La *partie III* établit le pont avec le programme du grain : la chute de finesse d'une jauge *est* l'annulation du jacobien informationnel. Les analogies sont signalées comme telles.

Table des matières

I. Théorie des jauges

Partie I. On construit la jauge comme objet algébrique premier, puis on stratifie sa construction en couches superposées, de l'ensembliste au métrique.

6.1 Pragmatisme versus universalité

Face à une universalité qui voudrait qu'un temps absolu soit une jauge pour tout ce qui se déploie dans le temps — ou que le réductionnisme soit la méthode conduisant à une jauge universelle — on peut opposer une attitude épistémologique différente, dont Archimède est un représentant, et qui guide dans les problématiques où l'universalité conduit à une complexité en définitive impossible à traiter. Non par limite de la nature, mais parce que cela relève d'un biais en décalage avec certains de ses mécanismes.

Un concept pratique. Archimède utilisa les jauges à des fins comparatives de masses dans un corps composé, ou pour définir une distance à atteindre par rapport à un volume. Galilée, connaissant son œuvre, jaugea les temps de parcours de billes sur un plan incliné, et le pouls humain contre un pendule. Le concept dépasse la physique : il permet l'interaction entre le physique et le biologique.

Un exemple biologique : les jauges temporelles. Ce qui distingue les temps vécus, ce sont les jauges qu'ils induisent : le temps de l'amitié, celui des amoureux, celui d'une promenade. La jauge circadienne (contraste jour/nuit) induit une jauge comportementale : un individu qui bascule ses activités la nuit voit tout son comportement — nocturne *et* diurne — réorganisé. Un comportement final émerge de la *superposition* de plusieurs jauges. Les jauges se construisent sur des propriétés ensemblistes et topologiques : le *topos* peut être un continu, un milieu extracellulaire, un organe, ou une entité abstraite (la restriction comportementale d'un régime circadien).

6.2 Formalisation algébrique

6.2.1 Relations d'ordre génériques

On part des relations d'équivalence et d'ordre, en généralisant l'antisymétrie.

Définition 6.1 (Antisymétrie générique). Soient O_1 une relation binaire et R une relation binaire symétrique. On dit que O_1 est *antisymétrique générique* si

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad (x O_1 y) \wedge (y O_1 x) \iff x R y.$$

Le cas particulier bien connu est $R = =$ (l'égalité), qui redonne l'antisymétrie de la relation d'ordre $\leq$. À toute relation antisymétrique générique on associe deux relations complémentaires O_1 et O_2 (avec $x O_1 y \iff y O_2 x$), et l'on note $O = (O_1, O_2)$.

Définition 6.2 (Relation d'ordre générique). Une *relation d'ordre générique* O sur E est un pré-ordre antisymétrique générique : une relation binaire transitive et antisymétrique générique.

Définition 6.3 (Antisymétrie stricte, ordre strict). O_1 est *antisymétrique stricte* si $(x O_1 y) \wedge (y O_1 x) \iff x R y$ avec R symétrique fixée. Une *relation d'ordre stricte* est un pré-ordre antisymétrique strict transitif. Sans adjectif, « relation d'ordre » désignera désormais une relation d'ordre stricte.

Proposition 6.4 (Couple non ordonnable). Un couple (x, y) est non ordonnable, noté $x \overline{O} y$, ssi $\neg(x O_1 y) \wedge \neg(y O_1 x)$. La non-ordonnabilité coïncide avec l'équivalence : $\overline{O} \equiv R$. Ce n'est pas parce que $x R y$ (même valeur pour l'attribut jaugé) que $x = y$: deux objets peuvent partager un attribut sans être égaux sur les autres.

6.2.2 Jauges

Définition 6.5 (Jauge). Soient $F \subseteq E$ munis d'une relation d'ordre O d'équivalence associée R . On appelle *jauge* sur F le couple relationnel ${}_F(O, R)$ tel que $\forall (x, y) \in F^2$, $(x O y) \wedge (y O x) \iff x R y$.

Définition 6.6 (Jauge absolue, de capacité, universelle). La jauge est *absolue* si $F = E$ (notée E ou ${}_E$). Elle est *de capacité* pour F et F' (avec $E \cap E' = \emptyset$) si une jauge ${}_F$ est aussi une jauge pour F' : elle jauge alors un ensemble distinct de son ensemble natif. Elle est *universelle* relativement à une famille (E_i) si elle est absolue et de capacité pour tout E_i .

6.2.3 Sphère et finesse

Définition 6.7 (Ensembles compatibles). Deux ensembles E_i, E_k sont *compatibles* s'il existe un morphisme α exprimant les éléments de l'un en ceux de l'autre pour la relation d'équivalence du domaine. La réciproque α^{-1} est alors un morphisme pour le couple de relations inverse.

Définition 6.8 (Sphère). On appelle *sphère* S la réunion d'ensembles compatibles de jauges appartenant à une famille.

Définition 6.9 (Finesse). Soient ${}_i, {}_k$ deux jauges sur une même sphère. Si ${}_i$ est de capacité pour les ensembles de la sphère et ${}_k$ ne l'est pas, ${}_i$ est dite *plus fine* que ${}_k$. Notant $(E, \cdot)$ le cardinal de la classe des éléments ordonnables de E par $\cdot$, on a $(E_{k,i}) \geq (E_{k,k})$: égalité si le jaugeage est *homogène* (mêmes couples ordonnés/équivalents), inégalité stricte s'il est *hétérogène* (des couples équivalents pour ${}_k$ deviennent ordonnés pour ${}_i$). Des jauges homogènes sur toute la sphère sont dites *isofines*.

Proposition 6.10 (La finesse est une relation d'ordre générique). *La relation ${}_i O_\delta {}_k$ (« ${}_i$ plus fine que ${}_k$ ») sur une sphère est antisymétrique générique (isofinesse = équivalence) et transitive : c'est une relation d'ordre générique sur les jauges de la sphère.*

Proof. Antisymétrie générique : ${}_i O_\delta {}_k \wedge {}_k O_\delta {}_i \iff {}_{i,k}$ isofines. Transitivité : de $(E_{\ell,i}) \geq (E_{\ell,k}) \geq (E_{\ell,\ell})$ on tire ${}_i O_\delta {}_\ell$. $\square$

6.2.4 Morphismes et portabilité du jaugeage

Une jauge est entièrement déterminée par le pré-ordre total qu'elle induit : $x \preceq y : \iff (x O_1 y) \vee (x R y)$, avec R la partie symétrique et O_1 la partie asymétrique. La propriété de jauge équivaut à la totalité de $\preceq$. Conséquence-clé : la réflexivité de R interdit le *strict réflexif* $x O_1 x$.

Définition 6.11 (Morphisme de jauges). $\alpha : (E, {}_E) \rightarrow (E', {}_{E'})$ est un *morphisme* si elle préserve le pré-ordre : $x \preceq y \Rightarrow \alpha(x) \preceq' \alpha(y)$. Elle préserve donc l'équivalence, mais une relation stricte $x O_1 y$ peut être préservée ou effondrée en équivalence si les images se confondent. Aucune injectivité ni surjectivité n'est requise — c'est ce relâchement qui donne son contenu aux théorèmes.

Théorème 6.12 (Jauge induite par tirage en arrière). *Soit $\alpha : E \rightarrow E'$ quelconque et ${}_{E'}(O', R')$ une jauge sur E' . Les relations $x O_1 y : \iff \alpha(x) O'_1 \alpha(y)$ et $x R y : \iff \alpha(x) R' \alpha(y)$ forment une jauge ${}_E(O, R)$ sur E , dont α est automatiquement un morphisme.*

Proof. R est une équivalence (report de la réflexivité, symétrie, transitivité de R'). O_1 est transitive (report de O'_1). Propriété de jauge : $(x O y \wedge y O x) \iff (\alpha(x) O' \alpha(y) \wedge \alpha(y) O' \alpha(x)) \iff \alpha(x) R' \alpha(y) \iff x R y$. Enfin $x \preceq y \Rightarrow \alpha(x) \preceq' \alpha(y)$ par construction. La réciproque α^{-1} n'intervient jamais. $\square$

Remarque 6.13. Aucune hypothèse sur α : une application non injective, non surjective, qui plie, projette ou écrase, rapatrie tout de même une jauge. Seule exigence : l'ensemble d'arrivée est jaugé.

Lemme 6.14 (Compatibilité de l'ordre strict avec l'équivalence). *Dans un pré-ordre total, si $a R a'$, $b R b'$ et $a O_1 b$, alors $a' O_1 b'$.*

Proof. De $a R a' : a' \preceq a$; de $a O_1 b : a \preceq b$; de $b R b' : b \preceq b'$. Par transitivité $a' \preceq b'$. Si $b' \preceq a'$, la transitivité donne $b \preceq a$, contredisant $a O_1 b$. Donc $a' O_1 b'$. $\square$

Théorème 6.15 (Jauge induite par poussée en avant). *Soit $\alpha : E \rightarrow E'$ un morphisme, E muni de $_E$. Pour $x' \in \alpha(E)$, notant $A_{x'} = \alpha^{-1}(x')$, on pose sur $\alpha(E) : x' O'_1 y' : \iff \exists a \in A_{x'}, \exists b \in A_{y'}, a O_1 b$, et de même pour R' . Ces relations forment une jauge sur $\alpha(E)$ si et seulement si le noyau de α raffine $R : \alpha(x) = \alpha(y) \Rightarrow x R y$.*

Proof. *Nécessité.* Si la condition est en défaut, il existe x, y avec $\alpha(x) = \alpha(y) =: x'$ et $\neg(x R y)$, donc (totalité) $x O_1 y$; la définition donne $x' O'_1 x'$, un strict réflexif interdit. *Suffisance.* Si $\ker \alpha \subseteq R$, les antécédents $A_{x'}$ sont dans une unique classe d'équivalence ; le lemme 6.14 transforme le quantificateur existentiel en universel, rendant les relations non ambiguës. La totalité de $\preceq'$ découle de celle de $\preceq$. $\square$

Remarque 6.16. Un morphisme peut fusionner des classes équivalentes, jamais écraser deux éléments ordonnés sur un même point. La condition $\ker \alpha \subseteq R$ est automatique dès que α est injective.

Proposition 6.17 (Monotonie de la finesse). *Sous les hypothèses de la poussée en avant, l'application quotient $\bar{\alpha} : E/R \rightarrow \alpha(E)/R'$ est un morphisme d'ordre surjectif. En particulier $\#(\alpha(E)/R') \leq \#(E/R)$, égalité ssi $\bar{\alpha}$ injective.*

Proof. $\ker \alpha \subseteq R$ rend $\bar{\alpha}$ bien définie sur les quotients ; surjective (tout point de $\alpha(E)$ a un antécédent), préservant l'ordre. Une surjection entre ensembles totalement ordonnés ne crée pas de niveaux : le cardinal du but est au plus celui de la source. $\square$

L'invariant réel n'est pas « la jauge se conserve » mais « la jauge se conserve ou se dégrade » : le jaugeage ne peut que se grossir le long d'une application, jamais s'affiner, et la dégradation se localise aux points de fusion.

Corollaire 6.18 (Invariance stricte : cas bijectif). *Si α est un morphisme bijectif de réciproque morphisme (en particulier un homéomorphisme), tirage en arrière et poussée en avant coïncident et sont mutuellement inverses : la jauge se transporte sans perte, les deux jauges sont isofines. La jaugeabilité est un invariant au sens plein.*

Corollaire 6.19 (Chute de finesse et invariant topologique). *Un recollement identifiant deux éléments strictement ordonnés du bord viole $\ker \alpha \subseteq R$: la jauge ne pousse pas en avant et la finesse chute le long de la couture. Cette chute signe l'événement topologique. Exemple : $\gamma : [0, 1] \rightarrow S^1$, $t \mapsto e^{2i\pi t}$ identifie $0 \prec 1$; aucun ordre total ne survit à la fermeture d'une boucle (l'antisymétrie l'interdit), et la finesse chute à la couture — c'est elle, non un nombre caractéristique, qui localise l'obstruction.*

6.3 Stratification de la construction d'une jauge

Suivant Connes, pour attribuer des propriétés à un espace on stratifie des théories superposées. On distingue les couches ensembliste, topologique, différentielle, analytique et métrique.

6.3.1 Couche ensembliste : congruence, égalité, méisme

Définition 6.20 (Congruence, égalité, identité, méisme). $E \cong E' \bmod R$: *congruence* (même classe, à une représentation près). *Égalité* : congruence suivant toutes les relations d'équivalence des attributs. *Identité* : automorphisme $x \mapsto x$. *Méisme* : isomorphisme portant une entité représentée dans E vers la même entité représentée dans un ensemble distinct F , conservant les caractéristiques statiques et dynamiques.

Remarque 6.21 (Statut du méisme). Le méisme s'applique à un triplet $(E, F, E) \rightarrow (F, E, F)$. Il va au-delà d'une transposition géométrique : celle-ci sous-entendrait un ensemble originel « réel » rendu par sa représentation. Le méisme permet de travailler dans une théorie hypothético-déductive ne retenant qu'un axiome hors de la sphère mathématique : la représentation du système par une fonction ponctuelle.

6.3.2 Le quantum et sa dimension

Définition 6.22 (Quantum, variété quantitative, dimension). Un *quantum* sur E est une multiplicité jaugeante sur E (au sens de Kant : ensemble doué de grandeur ; de Riemann : variété séparée). Une *variété quantitative* est un sous-ensemble de quantités suivant une jauge E . La *dimension* d'un quantum est celle de l'espace quotient de la projection canonique de sa détermination parfaite.

6.3.3 Couche topologique

Définition 6.23 (Convergence, voisinage, continuité). Une suite (e_i) de $(E,)$ converge vers ℓ si à partir d'un rang n_0 , $e_{i+1} O_j e_i$ et $e_n R_j \ell$. Un *voisinage* de e est un sous-ensemble continu de E contenant e . E' est *continue* autour de e si tout voisinage infinitésimal est de dimension topologique minimale ; *continuum* si continue en tout point intérieur. C'est l'expression du postulat d'Archimède placé au niveau architectonique : il existe une jauge élémentaire.

Définition 6.24 (Jauge de compatibilité topologique). Soient $(E, \hat{x})$ et $(F, \hat{y})$ deux partitions. S'il existe une jauge de $(E, \hat{x})$ vers $(F, \hat{y})$, on l'appelle *jauge de compatibilité topologique*, notée $(\hat{x}, \hat{y})$. Elle rapproche des ensembles hétérogènes (discret et continu). Si les partitions sont des singletons, on retombe sur une jauge de capacité.

6.3.4 Couche analytique : la jauge par quantification réelle

Toute la couche analytique repose sur une observation : $\mathbb{R}$ (ou $[0, +\infty]$) est totalement ordonné par $\leq$, portant une *jauge canonique* $(\leq, =)$ — la jauge universelle de quantification.

Théorème 6.25 (Jauge analytique par quantification réelle). Soit E un ensemble sans structure préalable et $\alpha : E \rightarrow \mathbb{R}$ une application. Le tirage en arrière de $(\leq, =)$ le long de α ($x O_1 y : \iff \alpha(x) < \alpha(y)$, $x R y : \iff \alpha(x) = \alpha(y)$) munit E d'une jauge $E(O, R)$, dont α devient un morphisme.

Proof. Application du théorème 6.12 à α et à la jauge $(\leq, =)$, pré-ordre total sur $\mathbb{R}$. □

Remarque 6.26 (Aucune structure préalable). Au départ α n'est pas un morphisme (aucune jauge n'est donnée sur E) : c'est le tirage en arrière qui l'érige en morphisme *a posteriori*. Seule une quantification $E \rightarrow \mathbb{R}$ est requise — étalon, norme, mesure, densité de probabilité — laissée à l'appréciation de qui construit la hiérarchie. Une mesure engendre une jauge sur la tribu ; pour la faire descendre aux points, il faut une quantification ponctuelle (densité, répartition, observable).

6.3.5 Couches différentielle et métrique

Définition 6.27 (Dérivabilité, jauge métrique). α est *dérivable* en e si les nombres dérivés à gauche (O_1) et à droite (O_2), définis via $\mu(\alpha(E_i))/\mu(E_i)$, existent et coïncident. Une *jauge métrique* est un couple (R, O) induit par un isomorphisme de E vers un ensemble de quantification mesurant les écarts (étalon, norme, ou distance dérivée d'une probabilité).

Remarque 6.28 (La pyramide des jauges). La hiérarchie se formalise en une pyramide : ensembliste $\rightarrow$ topologique $\rightarrow$ différentielle $\rightarrow$ analytique $\rightarrow$ métrique. On suppose souvent les niveaux implicitement (on dérive dans l'espace par rapport au temps), ce qui fonctionne dans bien des cas mais induit un *biais de complexité* dans une large classe d'autres — traiter le temps ou l'espace comme jauges absolues alors qu'ils sont des résultantes. La méthode stratifiée permet de s'en déprendre.

II. Applications

Partie II. On applique la théorie à trois systèmes où les couches se séparent concrètement : le photon (compatibilité discret/continu), la déformation moléculaire (hiérarchie de finesse), la boucle adaptative en biologie.

6.4 Le photon

L'expérience des fentes de Young fonctionne *photon par photon* : les photons sont émis un à un, et la figure d'interférence se construit par accumulation. Un photon interfère avec lui-même. Ce qu'on vise — la compatibilité de jauges entre discret et continu, et le rôle de pont de c — en sort épuré.

Une entité, deux représentations. Soit D l'espace discret des impacts et W le continu de l'amplitude ondulatoire. Ce sont deux *situs* différents : un impact isolé ne répond à aucun point unique de l'onde.

Définition 6.29 (Méisme corpuscule–onde). Le *méisme du photon* porte le photon de sa représentation corpusculaire dans D vers sa représentation ondulatoire dans W , conservant les caractéristiques statiques et dynamiques de l'entité unique.

Précision sur le mot « isomorphisme ». Le méisme ne peut pas être une bijection d'éléments (un impact ne correspond à aucun point unique de l'onde). Il faut l'entendre comme un morphisme entre *partitions* (jauge de compatibilité), non comme une correspondance point à point — sinon le terme « isomorphisme » induit en erreur.

La figure de Young, photon par photon. La distribution des impacts est la jauge analytique du phénomène. Elle émerge par accumulation des déterminations discrètes, via la jauge de compatibilité reliant chaque événement discret à l'amplitude continue. On partitionne le phénomène ondulatoire en créneaux indexés par la période $T = 1/\nu$: $\hat{t} = \bigcup_j [x_0 + jT ; x_0 + (j+1)T[$, et l'on définit les blocs corpusculaires $\hat{p} = \{p_1, \dots, p_n\}$. Il existe une jauge de compatibilité $(\hat{p}, \hat{t})$ telle que $\forall i, j, p_i t_j \iff (p_i R t_j) \vee (p_i O t_j)$, où O se lit « précède ou succède ».

[c comme pont] Le rôle de c n'est pas sa valeur ni sa nature calculatoire, mais son caractère de *jauge de compatibilité topologique* entre un situs discret (le corpuscule) et un situs continu (l'onde) : c relie la fréquence (période T , côté discret) à la longueur d'onde (côté continu). C'est le pont qui autorise le méisme corpuscule–onde.

c est appelé « jauge » sans que son couple (O, R) soit explicité. Tant que la relation d'ordre induite par c n'est pas donnée, « c comme pont » reste une image, non une jauge au sens strict de la partie I.

Proposition 6.30 (Complémentarité comme incompatibilité de finesse). *La jauge corpusculaire complète (qui détermine la fente) et la jauge d'interférence ne peuvent être simultanément de capacité. Raffiner l'une jusqu'à la détermination parfaite détruit l'autre : un gain de finesse sur le chemin se paie d'une perte totale de la jauge d'interférence.*

Remarque 6.31. La complémentarité cesse d'être une métaphore : c'est une incompatibilité de finesse entre deux jauges sur le même phénomène — une obstruction structurelle, non une analogie. L'auto-interférence (un corps, une amplitude sur un seul espace) se distingue de l'intrication (une jauge sur $E \times E$ non factorisable) : confondre les deux, c'est imputer à une interaction à deux corps ce qui se passe déjà avec un seul.

6.5 La déformation moléculaire

Sur l'espace des configurations nucléaires C (chaque point $q \in C$ donnant les positions de tous les atomes), on bâtit trois jauges par tirage en arrière de trois quantifications réelles.

Définition 6.32 (Trois jauges). *Énergétique* V : tirage en arrière de $(\leq, =)$ le long de l'énergie potentielle $V : C \rightarrow \mathbb{R}$. *De réaction* ξ : le long d'une coordonnée de réaction $\xi : C \rightarrow \mathbb{R}$. *Spatiale* σ : le long d'un paramètre géométrique $\sigma : C \rightarrow \mathbb{R}$.

Les trois sont légitimes par le théorème 6.25 (aucune structure préalable requise). Elles forment une *sphère* sur C , dominées par la jauge de configuration complète $q \mapsto q$ qui les raffine toutes.

Proposition 6.33 (Transversalité). *Sur C pris globalement, V, ξ, σ sont deux à deux incompatibles pour la finesse : les isoénergétiques $\{V = cte\}$, les surfaces $\{\xi = cte\}$ et les tranches $\{\sigma = cte\}$ sont des hypersurfaces transverses, aucune ne raffine l'autre.*

La finesse les range en sœurs sous la jauge de configuration — leur borne supérieure, raffinement commun — au sens de la *superposition* de jauges. C'est la situation d'ordre générique que le cadre est fait pour porter.

Proposition 6.34 (Hiérarchie de finesse sur un chemin). *Le long d'un chemin $\gamma : [0, 1] \rightarrow C$ franchissant une barrière :*

- (i) $\xi \circ \gamma$ est strictement monotone, donc injective : ξ sépare toutes les configurations ;
- (ii) $V \circ \gamma$ n'est pas monotone (croît jusqu'à la barrière puis décroît) : elle replie le chemin, identifiant q_- (montée) et q_+ (descente) avec $V(q_-) = V(q_+)$ mais $\xi(q_-) < \xi(q_+)$.

Donc sur le chemin, ξ est strictement plus fine que V , l'inégalité étant localisée au pli (voisinage de la barrière).

Corollaire 6.35 (La coordonnée de réaction comme jauge optimale). *ξ , de capacité et de finesse maximale tout au long de γ , en est la jauge optimale. L'énergie, qui replie, n'est qu'une jauge de capacité dégradée : elle perd la finesse exactement à l'endroit physiquement décisif (l'état de transition).*

Théorème 6.36 (Singularité de finesse à l'état de transition). *Soit $\kappa : C \rightarrow \mathbb{R}$ une jauge de connectivité (nombre de liaisons formées le long de γ). À une rupture ou formation de liaison, la poussée en avant de κ viole la condition de fibre $\ker \subseteq R$ (théorème 6.15) : deux configurations strictement ordonnées par κ avant l'événement sont envoyées sur un même état de connectivité à l'état de transition. La finesse de κ chute localement, et cette chute signe l'état de transition.*

Remarque 6.37 (Trois comportements à l'événement chimique). ξ préserve la monotonie (jauge optimale, traverse sans singularité) ; V préserve la régularité mais perd la monotonie (replie à la barrière) ; κ perd la connectivité à la réorganisation (sa chute localise l'état de transition). La rupture de liaison est l'analogue, dans l'espace des configurations, de la variation du nombre d'Euler–Poincaré : un événement topologique que la non-conservation de la jauge mesure quantitativement.

6.6 La boucle adaptative en biologie

Un organisme est relié au monde par une *boucle* : une voie efférente (l'état interne agit sur le monde) et une voie afférente (le monde relu met à jour l'état interne).

Définition 6.38 (Boucle, jauge interne). Soient I l'espace interne (sans structure préalable) et Φ l'espace de fonctionnement muni d'une jauge de valeur Φ . Les voies sont $a : I \rightarrow \Phi$ (action) et $p : \Phi \rightarrow I$ (perception). La *jauge interne* est le tirage en arrière $I := a_\Phi^* : x \preceq_I y \iff a(x) \preceq_\Phi a(y)$.

Remarque 6.39 (Ce qui est automatique). Par le théorème 6.12, $_I$ est une jauge *sans aucune condition* sur a : la seule existence d'une lecture fonctionnelle des actions suffit à ordonner les états internes par leur conséquence. Mais cet ordre est un *paysage* (quels états valent mieux), non une *trajectoire* (comment s'y rendre).

Définition 6.40 (Boucle cohérente, adaptative). La boucle est *cohérente* si p est un morphisme de (Φ, Φ) vers (I, I) . On note $T = p \circ a$ l'opérateur de boucle. Elle est *adaptative* si $\forall x, x \preceq_I T(x)$ (chaque passage améliore la valeur).

Théorème 6.41 (La valeur est une fonction de Lyapunov). *Si la boucle est adaptative, le long de toute trajectoire $x_n = T^n(x_0)$ la valeur est non décroissante : $x_0 \preceq_I x_1 \preceq_I \dots$. Tout point fixe x^* est maximal pour $\preceq_I$ sur les états qu'il atteint : c'est un état adapté.*

Proof. L'ascension donne $x_n \preceq_I T(x_n) = x_{n+1}$; la transitivité enchaîne la chaîne. Un point fixe x^* n'est pas dépassé strictement ($x^* R_I T(x^*)$), donc maximal sur sa trajectoire. $\square$

Remarque 6.42 (Cohérence et ascension sont orthogonales). La cohérence (préservation de l'ordre) et l'ascension (amélioration de la valeur) sont indépendantes : c'est la distinction, dans la stratification, entre la couche ensembliste (l'ordre) et la couche différentielle (la dynamique qui le remonte).

Proposition 6.43 (Borne de discrimination). *L'application quotient $\bar{a} : I/R_I \rightarrow \Phi/R_\Phi$ est injective, donc $\#(I/R_I) \leq \#(\Phi/R_\Phi)$: la finesse interne est bornée par la finesse fonctionnelle.*

Remarque 6.44 (Perception catégorielle). Deux états de même conséquence fonctionnelle sont équivalents pour $_I$: l'organisme est aveugle à leur différence, par construction de sa jauge adaptative, non par défaut de capteur. C'est la perception catégorielle et les seuils de discrimination sensorielle — une borne falsifiable sur le pouvoir de résolution. Ce cadre généralise l'ultrastabilité d'Ashby (l'état adapté comme point fixe ascendant) et la viabilité d'Aubin, en ajoutant la hiérarchie de jauges et l'ordre générique qui préserve les compromis incomparables (un état meilleur pour la survie mais pire pour la reproduction reste non ordonnable).

III. Jauges et déformation informationnelle

Partie III. On établit le pont avec le programme du grain : la chute de finesse d'une jauge est l'annulation du jacobien informationnel, et l'on corrige l'idée « une jauge coûte moins » en distinguant contrainte axiomatique et contenu.

6.7 Le point à corriger : coût axiomatique vs coût de contenu

« Une jauge coûte moins qu'un espace vectoriel métrique » n'est pas évident — c'est vrai dans un registre, faux dans l'autre.

Une jauge $_F(O, R)$ est un pré-ordre antisymétrique générique sur un support ; une jauge analytique (tirage en arrière d'une application $\alpha : C \rightarrow \mathbb{R}$) partitionne C en surfaces de niveau. Deux coûts, distincts :

- **Coût de contrainte axiomatique.** Un espace vectoriel métrique impose une longue liste d'axiomes (groupe additif, corps des scalaires, distributivité, définie-positivité de la métrique. . .), chacun de coût informationnel non nul (document *Quantification des axiomes* : l'associativité domine). Une jauge n'impose qu'un pré-ordre transitif antisymétrique générique. Là, la jauge coûte *beaucoup moins* : elle présuppose bien moins de structure.
- **Coût d'information de contenu.** La finesse d'une jauge — le nombre de classes qu'elle distingue — porte $\log_2(\text{nombre de classes})$ bits. Une jauge *de capacité maximale* (injective, séparant tous les points, comme ξ le long d'un chemin) distingue *tous* les points du support : sur un continu, $\aleph_0$ bits, autant qu'une coordonnée réelle. Là, la jauge ne coûte *pas moins* qu'une structure riche.

Remarque 6.45 (Formulation correcte). Une jauge coûte moins qu'un espace vectoriel métrique en *néguentropie de contrainte axiomatique* (elle impose moins de propriétés), mais *pas nécessairement* en information de contenu : une jauge fine sépare autant de points que le support. Ce sont les deux axes déjà rencontrés — contrainte vs contenu — qu'il ne faut pas confondre sous le mot « coûter ».

6.8 Le dictionnaire jauge $\leftrightarrow$ grain

Les deux théories décrivent le même phénomène — la déformation d'un support — dans deux langages. Le dictionnaire :

Théorie des jauges	Programme du grain
Finesse d'une jauge α (nb de classes)	Information stratale $\log_2 N$ (nb de grains)
Finesse <i>locale</i> $ \alpha'(t) $ le long d'un chemin	Facteur jacobien $ g'(x) $
Information portée $\propto \log \alpha' $	Déformation informationnelle $\Delta\mathcal{I}_g = \log_2 g' $
Régime bijectif (transport sans perte)	Réversibilité, $\Delta\mathcal{I}_{g^{-1}} = -\Delta\mathcal{I}_g$ (rotationnel nul)
Chute de finesse (perte de fibre)	Annulation du jacobien, $\Delta\mathcal{I}_g \rightarrow -\infty$
Transversalité de jauges (sœurs sous la config)	Structure de selle (axes de finesse incomparables)
Jauge de configuration complète (borne sup)	Grain le plus fin (résolution maximale)

6.9 Le résultat central : chute de finesse = annulation du jacobien

On formalise la correspondance-clé sur un chemin de déformation $\gamma : [0, 1] \rightarrow C$.

Théorème 6.46 (Équivalence des deux plis). *Soit $\alpha : C \rightarrow \mathbb{R}$ une quantification et α la jauge associée. Le long de γ , les trois énoncés suivants coïncident au point t_0 :*

- (i) (jauge) α subit une chute de finesse en t_0 : la fibre de $\alpha \circ \gamma$ en t_0 contient des configurations strictement ordonnées avant t_0 (perte de la condition $\ker \subseteq R$) ;
- (ii) (calcul) $(\alpha \circ \gamma)'(t_0) = 0$: le repli de la quantification ;
- (iii) (grain) la déformation informationnelle $\Delta\mathcal{I}_\alpha(t_0) = \log_2 |(\alpha \circ \gamma)'(t_0)| \rightarrow -\infty$: le jacobien s'annule, la réciproque locale cesse d'exister.

Proof. (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) : $\Delta\mathcal{I}_\alpha = \log_2 |(\alpha \circ \gamma)'|$ tend vers $-\infty$ ssi $(\alpha \circ \gamma)' \rightarrow 0$ (le logarithme diverge en 0). (ii) $\Leftrightarrow$ (i) : en un zéro de la dérivée, $\alpha \circ \gamma$ a un extremum local ou un point critique ; par le théorème des valeurs intermédiaires de part et d'autre, il existe $t_- < t_0 < t_+$ avec $\alpha(\gamma(t_-)) = \alpha(\gamma(t_+))$ — deux configurations *distinctes* (donc strictement ordonnées par le paramètre γ) que α rend équivalentes. La fibre contient des éléments strictement ordonnés : chute de finesse. $\square$

Remarque 6.47 (L'état de transition dans les deux langages). Pour la déformation moléculaire : la jauge énergétique V replie le chemin à la barrière ($V' = 0$ à l'état de transition), identifiant q_- (montée) et q_+ (descente) de même énergie. Côté grain, c'est exactement le point critique où $\Delta\mathcal{I}_V \rightarrow -\infty$: l'énergie perd la finesse là où le jacobien s'annule. La jauge de réaction ξ , elle, a $\xi' > 0$ partout (jacobien jamais nul, $\Delta\mathcal{I}_\xi$ fini) : finesse maximale conservée — la jauge optimale.

6.10 Vérification numérique

Chemin à barrière : $\xi(\gamma(t)) = t$ (réaction, monotone) et $V(\gamma(t)) = 1 - (2t - 1)^2$ (énergie, barrière en $t = \frac{1}{2}$).

Jauge	dérivée	min dérivée en	$\Delta\mathcal{I} = \log_2 \text{dérivée} $
ξ (réaction)	$\xi' = 1$	— (jamais nul)	fini partout (optimale)
V (énergie)	$V' = -4(2t - 1)$	$t = \frac{1}{2}$ (barrière)	$\rightarrow -\infty$ (chute)

Confirmation : ξ garde une finesse maximale ($\xi' \neq 0$) ; V chute exactement à la barrière ($V' = 0$), où $\Delta\mathcal{I}_V \rightarrow -\infty$. Les deux configs $t = 0,25$ et $t = 0,75$ ont $V = 0,75$ (repli), ξ distinct. Code :

```
import numpy as np
log2 = np.log2
t = np.linspace(0, 1, 1001)
xi = t # coordonnee de reaction : monotone
V = 1 - (2*t - 1)**2 # energie : barriere au milieu

dI_xi = log2(np.abs(np.gradient(xi, t))) # jacobien info de la reaction
dI_V = log2(np.abs(np.gradient(V, t))) # jacobien info de l'energie
print("xi : min|xi'| en t =", round(t[np.argmin(np.abs(np.gradient(xi,t)))],2),
      "-> dI fini (finesse max)")
print("V : min|V'| en t =", round(t[np.argmin(np.abs(np.gradient(V, t)))],2),
      "-> dI -> -inf (chute de finesse = etat de transition)")
# V(0.25)=V(0.75)=0.75 : repli, deux configs distinctes rendues equivalentes
```

6.11 Ce que le pont apporte aux deux théories

Remarque 6.48 (Enrichissement mutuel). *Aux jauges* : la chute de finesse reçoit une mesure quantitative — $\Delta\mathcal{I}_\alpha = \log_2 |\alpha'|$ dit de combien la finesse chute, pas seulement qu'elle chute. *Au grain* : l'annulation du jacobien reçoit une lecture *structurelle* — ce n'est pas qu'une singularité analytique, c'est la perte de la condition de fibre d'une jauge, un *événement topologique* (analogue au saut du nombre d'Euler–Poincaré). Les deux langages se complètent : l'un chiffre, l'autre situe.

Remarque 6.49 (La transversalité est la selle). Sur C entier, les jauges v, ξ, σ sont deux à deux incomparables pour la finesse (leurs surfaces de niveau sont transverses). C'est exactement la *structure de selle* du programme : plusieurs axes de finesse incomparables sur un même support, dont la jauge de configuration complète est la borne supérieure (la « superposition »). La restriction à un chemin γ rend la finesse comparable — de même que, dans la selle, une coupe le long d'un axe donne une courbure définie.

6.12 Portée et limites

Remarque 6.50 (Acquis). La chute de finesse d'une jauge et l'annulation du jacobien informationnel sont le même pli (théorème 6.46) ; la transversalité des jauges est la selle ; le régime bijectif est la réversibilité. La théorie des jauges et le programme du grain sont deux langages d'un même phénomène de déformation, l'un par partitions/finesse, l'autre par jacobien/néguentropie. L'affirmation « une jauge coûte moins » est corrigée : vraie en contrainte axiomatique, fausse en contenu.

Limites. (i) La correspondance vaut le long d'un *chemin* (où la finesse est comparable) ; sur le support entier, jauges et grains partagent la transversalité, non un ordre total. (ii) Le jacobien suppose les quantifications α dérivables ; aux points anguleux, la chute de finesse existe sans dérivée (à traiter par variation, non par $\log |\alpha'|$). (iii) Le pont est *descriptif* : il traduit un langage dans l'autre, il n'ajoute pas de contenu physique — la chimie de l'état de transition reste donnée par la surface d'énergie, non dérivée du formalisme.

Chapter 7

Le ruban de Möbius du flot symétrique

Ce chapitre rassemble quatre études sur le ruban de Möbius issu du flot symétrique de cercles géants. On y établit d'abord que le flot borde un ruban de Möbius entourant la droite à l'infini du plan projectif ; on en étudie ensuite les niveaux strataux (échelle, retournement, information), puis les découpes ; on referme sur une analogie honnête avec la topologie de l'ADN. Un fil méthodologique traverse l'ensemble : distinguer le registre topologique (forme globale) du registre métrique/stratal (grains, mesures), et n'attacher de grandeur à un objet que si une quantité mesurable la définit.

Introduction

Le *flot symétrique* naît de la rectification stratale : deux cercles géants, de rayon infinitésimalement grand, tangents en une origine commune O . Après promotion, leur courbure s'annule et ils s'aplatissent sur une même droite, la droite à l'infini. La question directrice de ce chapitre est topologique : *quelle surface ces deux cercles bordent-ils, une fois le plan refermé projectivement ?* La réponse — un ruban de Möbius — organise les quatre sections. On maintient partout deux registres distincts : le *topologique* (la forme, dans $\mathbb{RP}^2$) et le *métrique/stratal* (les longueurs et les grains, dans l'anneau $\mathbb{R}$). Le ruban de Möbius appartient au premier : c'est une surface, sans longueur ni courbure au sens stratal.

7.1 Le Möbius projectif du flot symétrique

On établit que la réunion des deux cercles géants symétriques constitue le *bord unique* d'un ruban de Möbius entourant la droite à l'infini.

7.1.1 Les objets promus

Définition 7.1 (Cercle géant et sa promotion). Le cercle géant C_{kn_∞} a pour rayon $\rho_{kn_\infty} = 2^{kn_\infty-1}$ et pour courbure $\kappa = 2^{-(kn_\infty-1)}$, un infinitésimal non nul dans $\mathbb{R}$. Après promotion ($\text{st}(\kappa) = 0$), il s'aplatit au voisinage de O sur sa tangente en O , la *droite à l'infini* $\Delta_\infty^\mathbb{R}$, perpendiculaire à l'axe des centres Δ .

Définition 7.2 (Flot symétrique). Le *flot symétrique* est la donnée de deux cercles géants C_{kn_∞} (centre sur Δ) et C'_{kn_∞} (centre sur Δ'), tous deux tangents en O à la même droite $\Delta_\infty^\mathbb{R}$, délimitant après promotion deux demi-plans opposés de part et d'autre de $\Delta_\infty^\mathbb{R}$. Recollés le long de $\Delta_\infty^\mathbb{R}$, ils couvrent la totalité du plan.

7.1.2 La fermeture projective

Définition 7.3 (Droite projective). Dans $\mathbb{RP}^2$, la droite $\Delta_\infty^\mathbb{R}$ devient une droite projective $\mathbb{RP}^1$: ses deux extrémités $+\infty$ et $-\infty$ sont *identifiées* en un unique point à l'infini O_∞ . Topologique-

ment, $\mathbb{RP}^1$ est un cercle.

Lemme 7.4 (Retournement d'orientation). *L'identification précédente s'accompagne d'un retournement d'orientation transverse : une direction sortant en $+\infty$ d'un côté revient en $-\infty$ du côté opposé.*

Proof. Dans $\mathbb{RP}^2$, un point est une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$, i.e. une direction au signe près ($v \sim -v$). En franchissant O_∞ le long de $\Delta_\infty^\mathbb{R}$, le vecteur directeur transverse est envoyé sur son opposé : le côté « gauche » est échangé avec le côté « droit ». Ce retournement est intrinsèque à la structure projective. $\square$

Remarque 7.5 (Distinction avec l'échange naïf). Le passage projectif n'est pas une permutation des bornes ($+\infty \leftrightarrow -\infty$), mais une *identification* des deux en un seul point, avec retournement. C'est le retournement qui distingue le résultat d'un cylindre.

7.1.3 Le ruban de Möbius

Proposition 7.6 (Voisinage de $\Delta_\infty^\mathbb{R}$ dans $\mathbb{RP}^2$). *Un voisinage tubulaire de la droite à l'infini $\Delta_\infty^\mathbb{R}$ dans $\mathbb{RP}^2$ est un ruban de Möbius : une surface à une seule face et à un seul bord.*

Proof. Soit B une bande le long de $\Delta_\infty^\mathbb{R}$ (la droite plus une épaisseur ε de chaque côté), topologiquement un rectangle. La fermeture projective recolle ses deux extrémités (en $\pm\infty$) en O_∞ , avec le retournement (Lemme 7.4) qui envoie $(+\infty, +\varepsilon)$ sur $(-\infty, -\varepsilon)$. Un rectangle recollé bout à bout avec demi-tour est un ruban de Möbius ; son bord, formé des deux segments $\{\pm\varepsilon\}$, se referme en une *unique* courbe. $\square$

Corollaire 7.7 (Décomposition de $\mathbb{RP}^2$). *Le plan projectif se décompose en*

$$\mathbb{RP}^2 = D^2 \cup_{\partial} \mathcal{M},$$

où D^2 est un disque (voisinage fini de O) et $\mathcal{M}$ le ruban de Möbius (voisinage de $\Delta_\infty^\mathbb{R}$), recollés le long de leur bord commun, un cercle.

7.1.4 Le flot symétrique comme bord

Lemme 7.8 (Fermeture des cercles à l'infini). *Dans $\mathbb{RP}^2$, chaque cercle géant du flot passe par deux points de $\Delta_\infty^\mathbb{R}$: le point fini O (tangence) et le point à l'infini O_∞ . Il y a une courbe fermée passant par O et O_∞ .*

Théorème 7.9 (Le flot symétrique borde le Möbius). *Après promotion et fermeture projective, la réunion $C_{kn_\infty} \cup C'_{kn_\infty}$ des deux cercles géants constitue une unique courbe fermée, qui est le bord du ruban de Möbius $\mathcal{M}$ (Proposition 7.6).*

Proof. Par le Lemme 7.8, les deux cercles se rencontrent en O (fini) et O_∞ (infini). En parcourant le bord du demi-plan gauche (porté par C_{kn_∞}) et en franchissant O_∞ , le retournement (Lemme 7.4) fait passer sur le bord du demi-plan droit (porté par C'_{kn_∞}). Après un tour complet, on a parcouru les deux cercles en une seule composante connexe : $C_{kn_\infty} \cup C'_{kn_\infty}$ est une unique courbe fermée, qui coïncide avec le bord unique de $\mathcal{M}$. $\square$

Corollaire 7.10 (Rôle structurel de la symétrie). *La présence des deux cercles est nécessaire : un seul cercle borderait un demi-plan, non le ruban. Les deux moitiés sont requises pour que le bord fasse le tour complet, avec son retournement à l'infini.*

Remarque 7.11 (Möbius vs cylindre). Le retournement est l'ingrédient décisif. Sans lui, le recollement produirait un cylindre (deux bords disjoints) et non un ruban de Möbius (un seul bord). C'est la structure projective, non un choix arbitraire, qui l'impose.

7.2 Niveaux de Möbius : échelle, retournement, cardinal

Le ruban précédent relie deux niveaux strataux. On en dégage les invariants et une hiérarchie d'information.

7.2.1 La largeur indexée par un niveau

On donne à la bande une largeur déterminée par un niveau stratal jn_∞ distinct du niveau kn_∞ des bords :

$$\ell_j = 2^{jn_\infty} \quad (\text{diamètre du cercle } C_{jn_\infty}),$$

la longueur restant $2\pi r_k = 2^{kn_\infty}\pi$. Le rapport largeur/longueur vaut $2^{(j-k)n_\infty}/\pi$: bande large pour $j > k$, fine pour $j < k$.

7.2.2 Deux invariants distincts

Définition 7.12 (Retournement — un angle). Le **retournement** est l'angle $\phi = \pi$: parcourir l'âme une fois inverse l'orientation transverse. Il vaut π pour *tout* Möbius, indépendamment de j, k : signature (constante) de la non-orientabilité.

Définition 7.13 (Rapport d'échelle — un facteur). Le **rapport d'échelle** est $\frac{\text{diam}(C_{jn_\infty})}{\text{diam}(C_{kn_\infty})} = 2^{(j-k)n_\infty}$, une puissance de 2. C'est un facteur *multiplicatif* ($\in \mathbb{R}_{>0}$), non un angle.

Remarque 7.14. Le retournement ($\phi = \pi$, additif dans S^1) et le rapport d'échelle ($2^{(j-k)n_\infty}$, multiplicatif dans $\mathbb{R}_{>0}$) vivent dans des structures différentes. Les nommer tous deux « phase » les confondrait.

7.2.3 La hiérarchie de cardinal, lue par le logarithme

Définition 7.15 (Information de Hartley). Pour un objet formé de N symboles, $\mathcal{I} = \log_2 N$ (i.e. $2^{\mathcal{I}} = N$).

Étage 1 — dans l'anneau (grains, hyperfini). C_{kn_∞} est fait de $N = 2^{kn_\infty}$ grains, d'où $\mathcal{I}(C_{kn_\infty}) = kn_\infty$ et $\mathcal{I}(C_{jn_\infty}) = jn_\infty$; pour $k < j$, comparaison entre hyperentiers.

Étage 2 — après promotion (continu, cardinal). La droite promue Δ_∞ a $2^{\aleph_0}$ points, d'où $\mathcal{I}(\Delta_\infty) = \log_2 2^{\aleph_0} = \aleph_0$.

Théorème 7.16 (Hiérarchie, résolue par le logarithme). *Le logarithme ramène les cardinaux à leurs exposants, où la comparaison est licite :*

$$\mathcal{I}(C_{kn_\infty}) = kn_\infty < \mathcal{I}(C_{jn_\infty}) = jn_\infty < \mathcal{I}(\Delta_\infty) = \aleph_0 = \sup \mathcal{I}.$$

Les deux premiers sont des hyperentiers (niveaux strataux) ; le troisième est le cardinal $\aleph_0$, atteint par promotion, non par un comptage plus fin.

Remarque 7.17 (Pourquoi le logarithme est nécessaire). Sans logarithme, on comparerait 2^{kn_∞} (hyperfini) à $2^{\aleph_0}$ (cardinal) : deux natures incomparables. Le logarithme les envoie sur l'échelle des exposants, où l'ordre a un sens.

Remarque 7.18 (Statut de la grandeur). $\mathcal{I}$ est l'information de *Hartley* ($\log_2$ du nombre de symboles), non l'entropie de Shannon. Elle mesure une capacité de distinction, définie et calculable ; on ne lui attache aucune interprétation supplémentaire tant qu'aucune quantité nouvelle n'est définie.

7.3 Découpe du ruban de Möbius projectif

7.3.1 Remarque de notation

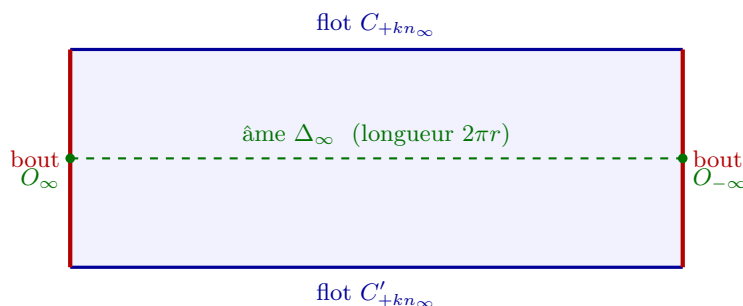
L'écriture C_{-kn_∞} pour le second cercle du flot crée un conflit : le signe $-$ désigne déjà le niveau de résolution symétrique $\mathcal{G}_{-kn_\infty}$. Or les deux cercles du flot sont au *même* niveau $+kn_\infty$. On note donc C_{+kn_∞} et C'_{+kn_∞} , le prime marquant la symétrie, non un changement de niveau.

7.3.2 La bande et ses deux lignes médianes

Avant recollement, la construction est une bande rectangulaire, avec *deux* lignes médianes perpendiculaires à ne pas confondre :

- l'**âme** Δ_∞ : médiane *longitudinale*, parallèle aux bords longs, de longueur $2\pi r$; extrémités $O_\infty, O_{-\infty}$;
- la **largeur** : mesurée *transversalement*, valeur ℓ .

Les deux **bords longs** sont le flot $C_{+kn_\infty}, C'_{+kn_\infty}$; les deux **bouts courts** sont recollés.



Proposition 7.19 (Le recollement identifie les extrémités de l'âme). *On obtient le ruban de Möbius projectif $\mathcal{R}$ en aboutant les deux bouts courts avec retournement. Ce recollement identifie $O_\infty \sim O_{-\infty} =: O_\infty$. L'âme Δ_∞ devient la ligne centrale ; les deux bords longs se raccordent en un unique bord (le flot refermé).*

Remarque 7.20. Il n'existe pas de « ligne axe de torsion » à l'intérieur de la bande. La torsion est le demi-tour donné à un bout court avant de l'aboutir. L'âme Δ_∞ n'est pas l'axe de torsion : elle est la ligne dont les extrémités sont identifiées.

7.3.3 La découpe transversale

Définition 7.21 (Découpe transversale). La découpe *transversale* de $\mathcal{R}$ est la coupe le long d'un segment transverse (parallèle aux bouts courts), en travers de l'âme. Elle *ouvre* le recollement.

Proposition 7.22 (Résultat de la découpe transversale). *La découpe transversale produit une bande plate orientable $\mathcal{B}$, à deux faces et **quatre bords** : deux bords longs (le flot, inchangé) et deux bords transverses (les lèvres de la coupe). L'âme Δ_∞ est la ligne médiane longitudinale (au milieu des faces), non un bord.*

Remarque 7.23 (Ne pas confondre avec la découpe longitudinale). Deux découpes, deux résultats : **transversale** (Δ_∞ reste médiane) ; **longitudinale**, le long de Δ_∞ (Δ_∞ se dédouble en bord ; bande à 4 demi-tours). Vouloir Δ_∞ à la fois bord et sous coupe transversale est impossible : ce sont deux opérations différentes.

Remarque 7.24 (Limite de l'interprétation). La bande $\mathcal{B}$ est un objet topologique : quatre bords, deux faces, une âme médiane. Les faces sont de simples côtés de surface ; on n'y attache aucune grandeur (« information », « propagation ») tant qu'aucune quantité mesurable n'est définie. S^3 et B^4 (dimensions 3 et 4) n'apparaissent pas dans cette construction plane et seraient hors sujet.

7.4 ADN et ruban de Möbius

Note honnête sur l'analogie entre le flot symétrique refermé et la topologie de l'ADN, séparant faits établis, analogie, limite chimique, et pont à construire.

7.4.1 Trois niveaux à ne pas confondre

Fait établi : un énoncé vérifié, avec référence et invariant mesurable. *Analogie* : une parenté de forme topologique, utile pour penser, sans identité ni prédiction. *Surinterprétation* : affirmer une équivalence (« l'ADN est un Möbius ») sans quantité qui la soutienne — à éviter.

7.4.2 Faits établis (topologie de l'ADN)

1. **Une science à invariants mesurables.** L'ADN circulaire fermé est caractérisé par le *linking number* Lk , entier décomposé en torsion et vrillage, $Lk = Tw + Wr$. Les topoisomérases modifient Lk en coupant et recollant.
2. **Des Möbius d'ADN existent.** Han, Pal, Liu, Yan (*Nature Nanotechnology*, 2010) ont assemblé par origami un Möbius d'ADN d'environ 50 nm.
3. **La découpe longitudinale se comporte comme en mathématiques.** Coupé le long de sa médiane, ce Möbius donne une boucle à quatre demi-tours (720°), deux faces, deux bords : plus un Möbius. C'est exactement le résultat topologique.
4. **Le critère de parité est expérimental.** La microscopie électronique identifie un Möbius *si et seulement si* le nombre de torsions est impair.

7.4.3 Analogie légitime

Flot symétrique / Möbius projectif	Topologie de l'ADN
âme Δ_∞	axe médian du ruban
bord = flot $C_{\pm kn_\infty}$	bord unique du Möbius d'ADN
recollement avec retournement	torsion (demi-tours impairs)
coupe le long de l'âme $\rightarrow$ deux tours	coupe médiane $\rightarrow 720^\circ$, deux bords

Cette table est une *correspondance de rôles topologiques*, non une égalité : elle justifie le vocabulaire commun, non l'identité des objets.

7.4.4 La limite chimique

Proposition 7.25 (Pas de Möbius par ligature directe des brins). *Les deux brins de la double hélice sont antiparallèles ($5' \rightarrow 3'$ et $3' \rightarrow 5'$). Une ligature ne joint qu'une extrémité $3'$ à une $5'$. La jonction croisée nécessaire à un Möbius par raccordement direct imposerait d'apparier deux extrémités $3'$ (ou deux $5'$) — ce que la chimie interdit.*

Remarque 7.26. D'où le recours à l'*origami* : la topologie de Möbius est portée par l'architecture globale du pliage, non par une ligature croisée des brins.

7.4.5 Le pont avec le programme du grain reste à construire

Pour que les Möbius d'ADN *disent* quelque chose du programme, il faudrait un pont explicite : quel invariant *stratal* correspondrait au linking number Lk ? la parité des demi-tours a-t-elle un analogue dans les strates $\mathcal{G}_{kn_\infty}$? le retournement projectif admet-il une traduction en orientation des grains ? Tant qu'aucune *quantité mesurable* du programme n'est mise en correspondance

avec un invariant de l'ADN, l'analogie reste une parenté d'images féconde, à garder comme piste, jamais comme équivalence.

Conclusion du chapitre

Le fil est constant. Le flot symétrique borde un ruban de Möbius entourant la droite à l'infini (Théorème 7.9), et cette structure décompose le plan projectif (Corollaire 7.7). Ses niveaux portent *deux* invariants irréductibles — un angle de retournement constant, un facteur d'échelle variable — et une hiérarchie d'information que seul le logarithme rend comparable (Théorème 7.16). Ses découpes se distinguent par la ligne suivie (Proposition 7.22). Enfin, l'analogie avec l'ADN est réelle au niveau topologique, mais bornée par la chimie (Proposition 7.25) et suspendue à un pont stratal encore à construire. Partout, la même exigence : une forme prouvée par ses invariants, une grandeur admise seulement si un nombre la définit, une analogie nommée comme telle.

Références

- D. Han, S. Pal, Y. Liu, H. Yan, *Folding and cutting DNA into reconfigurable topological nanostructures*, *Nature Nanotechnology* **5** (2010) 712–717.
- A. D. Bates, A. Maxwell, *DNA Topology*, 2^e éd., Oxford University Press, 2005.
- Rubans de Möbius auto-assemblés à hélicité contrôlée (critère de parité), *Nature Communications* **11** (2020).

Chapter 8

Fibrés du grain : la fibre de O et le fibré de la rectification

Ce chapitre rassemble deux études sur la structure de fibré qui sous-tend le programme du grain. On y montre qu'un point O , ou un cercle rectifié, ne “contient” pas la puissance du continu en tant que tel : cette puissance est portée par une fibre de grains infinitésimaux, que la promotion écrase sur la base. La distinction décisive est celle de la base — ponctuelle pour O , étendue pour le cercle S^1 — et elle gouverne à la fois le comptage des cardinaux et le sens des opérations. Un fil méthodologique traverse l'ensemble : distinguer le registre hyperfini (grains, dans l'anneau) du registre cardinal (points, après promotion), et n'attribuer une puissance qu'à l'objet qui la porte réellement — la fibre, non le point.

Introduction

L'intuition de départ est séduisante et récurrente : un point de contact, une origine O , ou un cercle, “cacheraient” une richesse infinie — comme s'il possédait, à lui seul, la puissance du continu. Formulée ainsi, l'idée *glisse* : un point reste un point, sans multiplicité intrinsèque. Le bon objet n'est pas un “point surpuissant” (qui n'existe pas), mais un *fibré* : une base, une fibre au-dessus, et une projection qui les relie.

La promotion $\text{st} : \widehat{\mathbb{R}}_{\text{fin}} \rightarrow \mathbb{R}$ joue précisément le rôle de cette projection : elle écrase les grains infinitésimaux d'une fibre sur leur point de base. La richesse (les 2^{kn_∞} grains, puis le continuum après promotion) est portée par la *fibre*, non par le point où elle s'écrase.

Ce chapitre traite deux cas, par complexité croissante de la base :

1. la fibre au-dessus d'un *point* O (base ponctuelle, §8.1) ;
2. le fibré de la *rectification* au-dessus du cercle S^1 (base étendue, §8.2).

Le second est plus riche que le premier, et c'est cette différence de base qui décide du comptage des cardinaux — ce que la synthèse (§8.3) met en regard.

8.1 La fibre au-dessus du point O

On formule proprement l'intuition d'un “point riche” sous O . Ce n'est pas O qui possède la puissance du continu (un point reste un point), mais la *fibre* des grains infinitésimaux au-dessus de O .

8.1.1 Le bon objet : un fibré, pas un point surpuissant

Définition 8.1 (Fibre infinitésimale au-dessus de O). On appelle *fibre* au-dessus de O l'ensemble des grains de la strate $\mathcal{G}_{-kn_\infty}$ dont la promotion est O . C'est un objet à deux étages :

$$\underbrace{\{O\}}_{\text{base, dans } \mathbb{R}^2} \quad \text{et} \quad \underbrace{F_k}_{\text{fibre : grains au-dessus de } O}.$$

Proposition 8.2 (Cardinal de la fibre, par registre). • **Avant promotion** (dans l'anneau), au niveau k : la fibre F_k a 2^{kn_∞} grains — un hyperfini (hyperentier non standard).

- **Après promotion** (dans $\mathbb{R}^2$) : la fibre continue de tous les points infinitésimaux au-dessus de O a la puissance $2^{\aleph_0}$ — un cardinal.

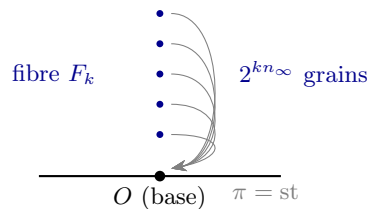
niveau k	cardinal de la fibre	nature
$1, 2, 3, \dots, k$	2^{kn_∞}	hyperfini
après promotion	$2^{\aleph_0}$	cardinal

8.1.2 La promotion est la projection du fibré

Proposition 8.3 (st écrase la fibre). La promotion st agit comme la projection du fibré sur sa base :

$$\pi = \text{st} : F \longrightarrow \{O\}, \quad \pi(\text{tout grain}) = O.$$

Elle efface la multiplicité : au-dessus de O , tous les grains sont identifiés à O . La richesse (la fibre) est détruite par la projection, non portée par le point.



8.1.3 Ce qui était faux, ce qui est vrai

Remarque 8.4 (Trois corrections). 1. **La multiplicité est dans la fibre, non dans le point.**

O promu reste un point, sans multiplicité. “Point recouvert N fois” n’a de sens que comme “ N grains dont la promotion est O ” — une propriété des grains, pas du point.

2. 2^{kn_∞} ne “tend” pas vers $2^{\aleph_0}$. À chaque niveau fini, la fibre est hyperfinie. Le cardinal $2^{\aleph_0}$ vient de la *promotion* (passage grains $\rightarrow$ continuum), non d’un comptage de grains qui grossirait jusqu’au continu. Hyperfini et cardinal sont deux registres.

3. **La “symétrie de résolution” n’est pas symétrique ici.** Du côté $+kn_\infty$, la promotion révèle une valeur-limite (π) ; du côté $-kn_\infty$, elle efface la multiplicité (tout devient O). Même écrasement, effets opposés : il n’en sort pas un point démultiplié.

Remarque 8.5 (Ce qu’on garde). L’intuition féconde, correctement dite : O cache une fibre infinitésimale riche (hyperfinie avant promotion, continue après), que la promotion écrase. Si l’on veut en faire un objet, c’est le fibré $\pi : F \rightarrow \{O\}$, non “un point de puissance $2^{\aleph_0}$ ”. La puissance du continu est la puissance de la fibre ; le point reste un point.

8.2 Le fibré de la rectification au-dessus de S^1

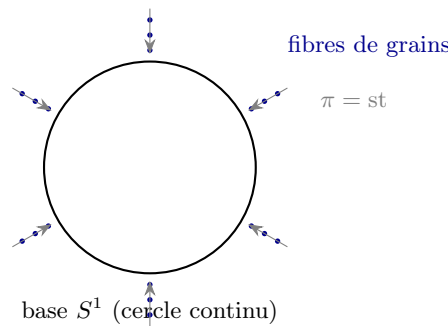
On passe d'une base ponctuelle à une base *étendue* : le cercle unité. La rectification y apparaît comme la promotion, fibre par fibre, d'un cercle granulaire.

8.2.1 Le fibré

Définition 8.6 (Fibré de la rectification). La base est le cercle unité S^1 (après promotion). Au-dessus de chaque point vit la fibre des grains infinitésimaux qui s'y écrasent. On note

$$\pi = \text{st} : E \longrightarrow S^1,$$

où E est l'espace des grains (avant promotion) et π la projection qui écrase chaque fibre sur son point de base.



8.2.2 Avant et après promotion

Proposition 8.7 (Les deux registres du cercle). • **Avant promotion** : le cercle est granulaire. À la résolution k , la circonférence rectifiée est comptée en $2^{kn\infty}$ grains (hyperfini).

- **Après promotion** : chaque fibre s'écrase sur son point ; le cercle continu S^1 émerge, de longueur $2\pi r$.

Corollaire 8.8 (La rectification est la promotion du fibré). Écraser les fibres de grains donne les points du cercle continu ; le comptage de grains (hyperfini $2^{kn\infty}$) devient la longueur continue $2\pi r$. La rectification n'est autre que la promotion, fibre par fibre, du cercle granulaire vers le cercle continu.

8.2.3 Cardinal total

Proposition 8.9 ($2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$, ici pertinent). Après promotion, si la base S^1 a $2^{\aleph_0}$ points et chaque fibre a la puissance $2^{\aleph_0}$, l'espace total a pour cardinal

$$|E| = |S^1| \cdot |\text{fibre}| = 2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}.$$

Remarque 8.10 (Deux facteurs, cette fois). Le produit de deux continus s'applique ici parce que la base est *étendue* (un cercle, $2^{\aleph_0}$ points) : il y a bien *base* $\times$ *fibre*, deux facteurs. Au-dessus d'une base *ponctuelle* $\{O\}$ (§8.1), il n'y a qu'un facteur (une seule fibre) : le produit ne s'y applique pas. Le calcul $2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$ était donc juste — il valait pour le *cercle*, non pour le point.

8.3 Synthèse : le fibré, motif du programme

Remarque 8.11 (Un motif récurrent). Le fibré est une structure constante du programme :

Objet	Base	Fibre
Hopf	S^2	S^1 (phase globale) ; $S^1 \hookrightarrow S^3 \rightarrow S^2$
flot	Δ_∞	bande tubulaire
point O (§8.1)	$\{O\}$ <i>ponctuelle</i>	grains infinitésimaux
cercle (§8.2)	S^1 <i>étendue</i>	grains infinitésimaux

Le cercle est le plus riche : sa base n'est pas un point mais tout S^1 . La rectification y apparaît comme promotion d'un fibré granulaire — objet bien défini, sans “point surpuissant”.

Remarque 8.12 (Ce que la comparaison enseigne). La différence entre les deux cas tient *entièrement* à la base :

- **base ponctuelle** (O) : une seule fibre, cardinal $2^{\aleph_0}$ après promotion ; *un* facteur, pas de produit ;
- **base étendue** (S^1) : une fibre par point, cardinal total $2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$; *deux* facteurs.

Dans les deux cas, la puissance du continu est portée par la *fibre* (et, pour le cercle, aussi par la base), *jamais* par un point pris isolément. Le point reste un point ; c'est la fibre qui est riche.

Conclusion du chapitre

Deux fibrés, une même leçon. Sous O vit une fibre de grains (Définition 8.1), hyperfinie avant promotion, continue après ; la promotion l'écrase sur le point (Proposition 8.3), et “point de puissance $2^{\aleph_0}$ ” est un abus — la puissance est celle de la fibre (Remarque 8.5). Au-dessus du cercle S^1 , la même structure devient le *fibré de la rectification* (Définition 8.6) : la circonférence granulaire, comptée en 2^{kn_∞} grains, se promeut en la longueur continue $2\pi r$ (Corollaire 8.8), et le cardinal total $2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$ s'applique cette fois légitimement, la base étant étendue (Remarque 8.10). La distinction base-ponctuelle / base-étendue gouverne le comptage ; la promotion, dans les deux cas, est la projection qui écrase les fibres. Le fibré s'affirme ainsi comme un motif structurel du programme (Remarque 8.11), aux côtés de la fibration de Hopf et du flot symétrique — toujours avec la même exigence : la richesse est dans la fibre, définie et comptée, jamais attribuée à un point seul.