

Théorie du grain

Hugues GENVRIN

30 Juillet 2026

Table des matières

1	Une famille de boucles circulaires emboîtées	17
1.1	Introduction	17
1.2	La famille $(B_k)_{k \in \mathbb{Z}}$	18
1.3	L'homéomorphisme ψ	19
1.3.1	Construction	19
1.3.2	Bijection et continuité	20
1.3.3	Action sur la famille (B_k)	21
1.4	La variante ψ^* et le statut topologique du cercle	21
1.4.1	Définition de ψ^*	21
1.4.2	Conséquence topologique	22
1.5	Une démonstration géométrique de la formule de Viète	22
1.6	Comportement asymptotique	23
1.7	Conclusion	24
2	Axiomatique du grain	25
2.1	Axiomatique du grain	25
2.1.1	Primitives	25
2.1.2	Niveaux, grains, résolutions	26
2.1.3	Stratification de $\tilde{\mathbb{N}}$	28
2.1.4	Axiomes	29
2.1.5	Théorèmes fondamentaux	29

2.2	Arithmétique des positions	31
2.2.1	Vue d'ensemble	31
2.2.2	Le cercle normalisé C'_1	32
2.2.3	Écritures lexicales binaires	32
2.2.4	Isomorphisme d'ordre lexical $\leftrightarrow$ géométrique . . .	34
2.2.5	Opérations lexicales	35
2.2.6	Transport vers la géométrie	36
2.2.7	Retour à C_1 : épaissement et arithmétique des positions	38
2.2.8	Synthèse de l'arithmétique des positions	39
2.3	Construction de l'anneau partiel $\widetilde{\mathbb{R}}$	40
2.3.1	Le cercle C_1 à résolution $-n_\infty$	40
2.3.2	Droite réelle déployée positive $\widetilde{\mathbb{R}}^+$	41
2.3.3	Compatibilité cercle / droite	41
2.3.4	Symétrisation : la droite $\widetilde{\mathbb{R}}$	42
2.3.5	Structure additive : groupe abélien partiel	42
2.3.6	Structure multiplicative	45
2.3.7	Inverse multiplicatif partiel	46
2.3.8	Distributivité	47
2.3.9	Structure d'anneau intègre	48
2.4	Revêtements du cercle par la droite déployée	49
2.4.1	Topologies	49
2.4.2	Première structure : revêtement à un feuillet vers $\mathcal{G}_{-2n_\infty}$	50
2.4.3	Seconde structure : revêtement à 2^{n_∞} feuillets vers $\mathcal{G}_{-n_\infty}$	50
2.4.4	Articulation : diagramme commutatif	51
2.4.5	Compatibilité avec la structure d'anneau partiel . .	52
2.4.6	Extension à $\widetilde{\mathbb{R}}$	52
2.5	Le corps $\mathbb{R}$ comme restriction standard	53
2.5.1	Éléments standards	53
2.5.2	Stabilité de $\mathbb{R}$	53

2.5.3	Théorème : $\mathbb{R}$ est un corps	55
3	Symétrie de résolution et dualité	57
3.1	Le procédé bidirectionnel et la dilatation $\mathcal{F}^{-1}$	57
3.2	Le procédé bidirectionnel	58
3.2.1	Rappel : la famille des cercles porteurs	58
3.2.2	Bidirectionnalité du procédé	59
3.2.3	La résolution limite ascendante $+n_\infty$	60
3.2.4	La droite à l'infini	61
3.2.5	Stratification ascendante $\tilde{N}_k^{\text{ext}}$	64
3.3	Arithmétique duale et dualité géométrique δ_k	65
3.4	Arithmétique externe sur les copies	66
3.4.1	Mosaïques et grains externes	66
3.4.2	Multiplication externe par juxtaposition d'échelles	67
3.4.3	Le théorème de dualité géométrique	68
3.4.4	Le théorème de factorisation	70
4	Intégrales divergentes et régularisation	73
4.1	Définition de l'intégrale stratifiée	74
4.1.1	Rappel : la double mosaïque de $\tilde{\mathbb{R}}^+$	74
4.1.2	La fonction discrétisée	75
4.1.3	L'intégrale stratifiée	75
4.1.4	Compatibilité avec l'intégrale classique	75
4.1.5	Premiers exemples	76
4.2	Hiérarchie des divergences	77
4.2.1	Strate de régularisation	77
4.2.2	Divergences polynomiales	77
4.2.3	Divergences inverses (UV)	78
4.2.4	Divergences logarithmiques	79
4.2.5	Divergences exponentielles	80
4.3	Régularisation par projection	81
4.3.1	La projection standard comme régularisation	81

4.3.2	Régularisation des divergences polynomiales . . .	81
4.3.3	Régularisation des divergences logarithmiques . .	82
4.4	Borne critique et convergence stratifiée	82
4.4.1	σ comme fonction de la borne	82
4.4.2	La borne critique	82
4.4.3	Bornes critiques pour les classes principales . . .	82
4.4.4	Hierarchie de croissance par bornes critiques . . .	83
4.4.5	Régularisation à la borne critique	83
5	Principe de transfert	87
5.1	Langage formel et formules	87
5.2	Interprétations duales	89
5.3	Théorème de transfert	89
5.4	Exemples et contre-exemples	91
5.4.1	Exemples : formules transférables	91
5.4.2	Contre-exemples : formules non transférables . .	91
5.5	Corollaires applicatifs	92
5.6	Application aux suites et limites	93
5.7	Synthèse	94
5.8	Points laissés ouverts	95
6	Partie standard et analyse dans $\widetilde{\mathbb{R}}$	97
6.1	Halo et monade	97
6.2	Théorème de la partie standard	99
6.3	Propriétés algébriques	100
6.4	La partie standard comme morphisme d'anneau	101
6.5	Application aux limites de suites	102
6.6	Application à la dérivée	103
6.7	Application à l'intégrale	104
6.8	Application aux séries numériques	106
6.9	Continuité non standard	106
6.10	Synthèse et vue d'ensemble	107

7	Compacité dans $\mathbb{R}$	111
7.1	Rappels et notations	111
7.2	Caractérisation non standard de la compacité	112
7.3	Conséquence 1 : théorème de Bolzano-Weierstrass	114
7.4	Conséquence 2 : théorème de Heine (continuité uniforme)	115
7.5	Conséquence 3 : théorème des valeurs extrêmes	116
7.6	Conséquence 4 : théorème des valeurs intermédiaires	117
7.7	Synthèse	118
7.8	Points laissés ouverts	118
8	Des espaces métriques aux espaces de Hilbert	119
8.1	Espaces métriques	120
8.1.1	Définitions et extension	120
8.1.2	Caractérisations non standard	120
8.1.3	Complétude	121
8.2	Espaces vectoriels normés et espaces de Banach	121
8.2.1	Définitions	121
8.2.2	Partie standard dans un Banach	122
8.3	Espaces préhilbertiens	123
8.3.1	Produit scalaire	123
8.3.2	Inégalités fondamentales	123
8.4	Espaces de Hilbert	124
8.4.1	Définition	124
8.4.2	Théorème de projection sur un convexe fermé	124
8.4.3	Théorème de représentation de Riesz	125
8.4.4	Synthèse	126
8.4.5	Points laissés ouverts	126
9	Structure récursive des factorisations stratales	129
9.1	Rappel : déploiement et factorisations	130
9.1.1	Le mécanisme de déploiement	130
9.1.2	Deux factorisations classiques	130

9.1.3	Position du problème	131
9.2	Transposabilité cardinal/dilatation	131
9.2.1	Une seule relation d'équivalence	131
9.2.2	Les deux opérations élémentaires	132
9.2.3	La transposabilité comme composée	132
9.2.4	Application au passage $f \rightarrow f'$	133
9.3	Factorisation imbriquée	134
9.3.1	Identification récursive de l'épaisseur	134
9.3.2	Le théorème d'imbrication	135
9.3.3	Lecture récursive stratale	135
9.3.4	Généralisation aux résolutions supérieures	136
9.4	Cohérence avec le programme	136
9.4.1	Lien avec la métrique stratale	136
9.4.2	Lien avec la construction pragmatique des réels	137
9.4.3	Lien avec le déploiement axiomatique	137
9.5	Le continu comme objet stratifié	138
10	Construction pragmatique des réels	147
10.1	Position du problème	148
10.1.1	Quatre constructions des réels	148
10.1.2	Pourquoi une construction pragmatique	148
10.1.3	Statut épistémologique	149
10.2	Étalonnage sur le cercle unité	150
10.2.1	Choix de l'étalon	150
10.2.2	Stratification à résolution $-n_\infty$	150
10.2.3	Stratification à résolution $-2n_\infty$	151
10.3	Le mécanisme central : passage de mesure nulle à mesure non nulle	151
10.3.1	Représentation graphique	151
10.3.2	Le développement décimal stratal	152
10.3.3	Le mécanisme de promotion stratale	153
10.3.4	Interprétation comme changement de représentation	154

10.4	La relativité du statut des réels	154
10.4.1	Le principe général	154
10.4.2	Compatibilité avec les constructions classiques . .	155
10.4.3	Distinction avec l'analyse non-standard	156
10.5	Généralisation au-delà du cercle	157
10.5.1	Du cercle au diamètre	157
10.5.2	À toute structure stratifiable	157
10.6	$\mathbb{R}$ est un corps : preuve géométrique par Thalès	158
10.6.1	Cadre : partie finie, infinitésimaux, projection standard	159
10.6.2	Le théorème de Thalès au niveau des grains . . .	159
10.6.3	Le lemme de densité	160
10.6.4	$\mathfrak{m}$ est maximal, donc $\mathbb{R}$ est un corps	161
10.7	Statut et perspectives	162
10.7.1	Ce qui est solide	162
10.7.2	Ce qui demande à être approfondi	162
10.7.3	Liens avec le corpus	163
11	Remarques topo-ensembliste	165
11.1	Configuration : fonction et homothétie locale	166
11.1.1	Action d'une fonction sur les grains	166
11.1.2	Refactorisation à la résolution fine	166
11.2	La connexion avec la stratification multiplicative	167
11.2.1	L'homothétie comme multiplication	167
11.2.2	Le mécanisme multiplicatif du Volume I	167
11.2.3	La fonction comme déclencheur multiplicatif local	168
11.3	Les trois décomptes de l'image	169
11.3.1	Décompte positionnel à $-n_\infty$	169
11.3.2	Décompte positionnel à $-2n_\infty$	169
11.3.3	Décompte combinatoire à $-2n_\infty$	169
11.4	Unification des trois mécanismes	170
11.4.1	Le théorème central	170

11.4.2	Lecture conceptuelle	171
11.4.3	Cohérence avec la digression sur l'anomalie cartésienne	172
11.5	Conséquences ensemblistes	172
11.5.1	Hierarchie des cardinaux stratifiés	172
11.5.2	Sur le statut « mesure nulle » des grains	172
11.6	Synthèse	173
12	Métrie stratale	175
12.1	Heuristique combinatoire	176
12.1.1	Intuition par regroupement des grains	176
12.1.2	Translation logarithmique	177
12.2	La refactorisation et ses deux lectures	178
12.2.1	La refactorisation par homothétie	178
12.2.2	La lecture exponentielle	178
12.3	La transformation logarithmique	179
12.3.1	Justification par contre-effet de l'exponentielle	179
12.3.2	Calcul explicite	180
12.4	La métrie stratale	181
12.5	Extension symétrique à $\widehat{\mathbb{R}}_*$	181
12.6	Conséquences immédiates	182
12.7	Récapitulons	183
12.7.1	Factorisations et homothéties	183
12.7.2	Transport intrinsèque, pas projection	183
12.8	Relativité du transport métrique	183
12.8.1	Le principe de relativité	183
12.8.2	Cohérence avec la construction pragmatique des réels	184
12.9	Diagramme catégorique commutatif	184
12.9.1	Expression structurelle du transport	184
12.9.2	Lecture du diagramme	185
12.9.3	Statut conceptuel du diagramme	186

12.10 Synthèse	186
13 Exponentiation	189
13.1 Rappel : la métrique logarithmique sur C'_1	190
13.1.1 Position du problème	190
13.1.2 Le rôle de la transformation logarithmique	190
13.2 L'exponentielle stratale réelle comme réciproque	191
13.2.1 Définition	191
13.2.2 Action géométrique	191
13.2.3 Transport sur le cercle	191
13.3 Le demi-tour géométrique et l'involution -1	192
13.3.1 La structure géométrique du cercle	192
13.3.2 Le demi-tour et son interprétation stratale	193
13.4 L'émergence forcée de i	193
13.4.1 La contrainte de compatibilité circulaire	193
13.4.2 L'insuffisance de l'exponentielle réelle	194
13.4.3 Introduction d'un facteur structurel	194
13.4.4 Détermination de ξ par les contraintes	194
13.4.5 Lecture conceptuelle	196
13.5 L'exponentielle complexe stratale et le plan complexe stratal	196
13.5.1 Définition de l'exponentielle complexe stratale	196
13.5.2 Propriétés	196
13.6 Le plan complexe stratal : identification précise des trois objets	197
13.6.1 Définition	197
13.6.2 Distinction des trois objets géométriques	197
13.6.3 Lecture conceptuelle	198
13.6.4 Représentation schématique	200
13.7 Auto-dualité $\ln / \exp$	200
13.8 Interprétation : un parallèle avec la mécanique quantique	201
13.9 Synthèse	201

14 Anomalie cartésienne	203
14.1 L'anomalie cartésienne	203
14.1.1 Le constat	203
14.1.2 Le déplacement vers un nouveau repère	204
14.1.3 Diagnostic de l'anomalie	205
14.2 La stratification fonctionnelle	205
14.2.1 Le théorème central	205
14.2.2 Lecture conceptuelle	206
14.2.3 Lien historique : Bolzano et le continu	207
14.3 Application : la factorisation logarithmique	207
14.3.1 Énoncé du problème	207
14.3.2 Étape 1 : refactorisation par homothétie	207
14.3.3 Étape 2 : contraction logarithmique	208
14.3.4 Étape 3 : ajustement des domaines	208
14.4 Synthèse	209
15 Cardinal et promotion algébrique	211
15.1 De la grille hyperfinie au continu	211
15.1.1 Codage binaire et cardinal	211
15.1.2 Réparation de la méthode : les suites illimitées	212
15.1.3 Les grains sont des infinitésimaux stratifiés, non des zéros	214
15.1.4 Ce que l'on ne peut pas faire : déborder le continu	215
15.1.5 Synthèse : une tour ouverte aux deux bouts	216
16 Fondement différentiel du grain	217
16.1 La dérivée stratale	217
16.1.1 Le grain comme différentielle	217
16.1.2 Le quotient différentiel vit dans l'anneau	218
16.1.3 Définition et compatibilité	219
16.1.4 Indépendance de la résolution = dérivabilité	220
16.1.5 Le différentiel	220

16.1.6	Ordres supérieurs : la descente dans la tour . . .	221
16.1.7	Lien avec la métrique et l'anomalie cartésienne .	222
16.1.8	Position	223
17	Interprétation de la rectification par bisection itérée	225
17.1	Interprétation corporelle	225
17.2	Interprétation algorithmique	231
17.3	Interprétation suivant la théorie des périodes (Kontsevitch-Zagier)	232
18	Interprétation stratale de la rectification	235
18.1	Rappel de l'interprétation galoisienne dans ZFC	236
18.1.1	Le procédé de bisection	236
18.1.2	Le résultat principal de l'article précédent	236
18.1.3	Les limites de la lecture ZFC	237
18.2	Rappel de la construction géométrique complète	237
18.2.1	De la rectification au carré	237
18.2.2	Les étapes de la construction	238
18.2.3	Le total : $n_\infty + 7$ étapes	238
18.3	Insuffisance conceptuelle des deux lectures classiques . .	239
18.3.1	Ce que ni la construction géométrique ni la lecture galoisienne ne disent	239
18.3.2	L'apport visé par l'approche stratale	239
18.4	Le cadre stratal	240
18.4.1	Niveaux de résolution et infini gradué	240
18.4.2	Métrique et propriétés stratales	240
18.5	Impossibilité en n_∞ étapes	241
18.5.1	Le cercle à l'infini	241
18.5.2	Le théorème d'impossibilité	241
18.5.3	L'obstacle géométrique explicite	242
18.6	Localisation en $2n_\infty$ étapes	242
18.6.1	Le cercle géant	242

18.6.2	Le théorème de la rectification	243
18.6.3	Quasi-exactitude dans l'anneau, exactitude dans le corps	244
18.7	Statut de π : ce qui est stratal-algébrique, et ce qui ne l'est pas	245
18.7.1	L'approximant est stratal-algébrique, pas π . . .	245
18.7.2	Compatibilité avec Lindemann	245
18.7.3	Ce que la lecture stratale ajoute réellement . . .	245
18.8	Perspectives géométrique, algébrique et ensembliste . . .	246
18.8.1	Localisation de π et quadrature	246
18.8.2	Encadrement de π	247
18.8.3	Dans l'illimité	248
18.9	Dualité δ_2 et cohérence interne	249
18.9.1	Deux apparitions de π dans le programme	249
18.9.2	La dualité δ_2 du Volume II	249
18.10	Position dans le corpus et apport de l'approche stratale	250
18.10.1	Comparaison synthétique	250
18.10.2	Ce que l'approche stratale apporte	250
18.10.3	Ce qui reste ouvert	251

Préface

Ce livre à été mené à partir de mes recherches et d'une coopération avec une intelligence artificielle : Claude version Opus 4.7 et 4.8 d'Anthropic.

Chapitre 1

Une famille de boucles circulaires emboîtées

1.1 Introduction

Le cercle admet de nombreuses caractérisations, depuis la définition métrique d'Euclide jusqu'aux constructions différentielles et algébriques modernes. Nous proposons ici une approche par déformation continue : le cercle apparaît comme l'image, par un homéomorphisme explicite, d'un *arc semi-ouvert* obtenu en demi-tour. Cette construction, élémentaire dans son énoncé, met en jeu une famille remarquable de courbes à support circulaire dont les éléments sont tous de même longueur $4\pi\rho_0$, et conduit à une redémonstration géométrique de la formule de Viète.

Le plan est le suivant. La section 1.2 introduit la famille $(B_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ et ses propriétés métriques élémentaires. La section 1.3 définit la transformation ψ et établit qu'il s'agit d'un homéomorphisme entre supports consécutifs. La section 1.4 contient le résultat principal : la variante ψ^* réalise un homéomorphisme entre un arc semi-ouvert et le cercle. La section 1.5 en déduit la formule de Viète. La section 1.6 évoque le com-

portement aux limites.

1.2 La famille $(B_k)_{k \in \mathbb{Z}}$

On se place dans le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $\rho_0 > 0$ un paramètre fixé.

Définition 1. Pour $k \in \mathbb{Z}$, on note C_k le cercle de centre $O_k(-2^k \rho_0, 0)$ et de rayon $\rho_k = 2^k \rho_0$. La courbe B_k est définie comme le parcours du cercle C_k , dans le sens trigonométrique direct depuis l'origine O , sur une longueur angulaire totale de $2^{-k+1} \cdot 2\pi$.

Tous les cercles C_k passent par l'origine O , qui sert d'origine commune aux courbes B_k . L'extrémité finale de B_k , notée S_k , n'est par convention pas incluse dans la courbe.

Selon la valeur de k , B_k prend trois formes géométriques distinctes :

- pour $k = 1$, B_1 est le cercle C_1 parcouru une fois ;
- pour $k > 1$, B_k est un *arc* de cercle, parcourant 2^{-k+1} tour de C_k (par exemple, demi-cercle pour $k = 2$, quart de cercle pour $k = 3$) ;
- pour $k \leq 0$, B_k est une *multi-boucle*, parcourant $2^{-k+1} \geq 2$ fois le cercle C_k .

Pour décrire sans ambiguïté un point d'une multi-boucle, qui peut être visité plusieurs fois, on introduit un *indice de recouvrement*. Un point de B_k est noté T_k^β , où $\beta \in \{1, 2, \dots, 2^{-k+1}\}$ indique à quel passage on se réfère. L'origine O , point de départ, porte l'indice 1 et se note O^1 .

Définition 2. On définit sur B_k la relation $\sim$ par : $T_k^\beta \sim T_k^{\beta'}$ si et seulement si les deux points coïncident géométriquement dans le plan.

Il est immédiat que $\sim$ est une relation d'équivalence. Pour $k > 0$, chaque classe est un singleton ; pour $k \leq 0$, chaque classe contient exactement 2^{-k+1} éléments. On notera $\widetilde{T}_k^\beta$ la classe de T_k^β .

Proposition 1 (Longueur commune). *Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la longueur curviligne de B_k vaut $4\pi\rho_0$.*

Démonstration. La longueur vaut $\theta_k \cdot \rho_k$ où $\theta_k = 2\pi \cdot 2^{-k+1}$ est l'amplitude angulaire totale parcourue, et $\rho_k = 2^k \rho_0$. Le produit vaut $4\pi\rho_0$, indépendamment de k . $\square$

Les angles à l'origine $\alpha_k = \widehat{O_k O S_k}$ et au centre $\theta_k = \widehat{O O_k S_k}$ vérifient pour $k > 1$ (cas des arcs) :

$$\theta_k = \frac{\pi}{2^{k-2}}, \quad \alpha_k = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{2^{k-2}} \right).$$

On a $\theta_k \rightarrow 0$ et $\alpha_k \rightarrow \pi/2$ lorsque $k \rightarrow +\infty$.

1.3 L'homéomorphisme ψ

Nous définissons à présent une transformation reliant B_k à B_{k-1} .

1.3.1 Construction

Plus généralement, pour $\alpha > 0$, désignons par $\alpha\{C_k\}$ le support C_k parcouru α fois depuis l'origine O dans le sens direct, point final exclu. Tout point $T_k^\beta \in \alpha\{C_k\}$ est repéré par sa mesure angulaire $\theta_k^\beta = \widehat{O O_k T_k^\beta} \in [0, 2\pi\alpha)$.

Définition 3. *On définit*

$$\psi : \alpha\{C_k\} \longrightarrow 2\alpha\{C_{k-1}\}, \quad T_k^\beta \longmapsto T_{k-1}^{\beta'}$$

en imposant que le point image $T_{k-1}^{\beta'}$ soit caractérisé par

$$\overrightarrow{O_k T_{k-1}^{\beta'}} = \cos(\theta_k^\beta) \cdot \overrightarrow{O_k T_k^\beta}.$$

Le point $T_{k-1}^{\beta'}$ ainsi défini appartient effectivement à C_{k-1} , et sa mesure angulaire dans le repère centré en O_{k-1} vaut $\theta_{k-1}^{\beta'} = 2\theta_k^\beta$.

Démonstration. On part de $\overrightarrow{O_k T_{k-1}^{\beta'}} = \rho_k \cos(\theta_k^\beta) \vec{e}_r^k$, où $\vec{e}_r^k = \cos(\theta_k^\beta) \vec{i} + \sin(\theta_k^\beta) \vec{j}$. Par développement,

$$\overrightarrow{O_k T_{k-1}^{\beta'}} = \rho_k (\cos^2 \theta_k^\beta \vec{i} + \cos \theta_k^\beta \sin \theta_k^\beta \vec{j}) = \rho_{k-1} ((1 + \cos 2\theta_k^\beta) \vec{i} + \sin 2\theta_k^\beta \vec{j}),$$

en utilisant $\rho_k = 2\rho_{k-1}$ et les formules de duplication. Puisque $\overrightarrow{O_{k-1} O_k} = -\rho_{k-1} \vec{i}$, il vient

$$\overrightarrow{O_{k-1} T_{k-1}^{\beta'}} = \rho_{k-1} (\cos 2\theta_k^\beta \vec{i} + \sin 2\theta_k^\beta \vec{j}),$$

ce qui prouve que le point est à distance ρ_{k-1} de O_{k-1} et que sa mesure angulaire vaut $2\theta_k^\beta$. $\square$

1.3.2 Bijection et continuité

Proposition 2. ψ est une bijection de $\alpha\{C_k\}$ sur $2\alpha\{C_{k-1}\}$.

Démonstration. Par construction, ψ est l'application $\theta \mapsto 2\theta$ entre les domaines de paramétrage $[0, 2\pi\alpha)$ et $[0, 4\pi\alpha)$. Cette application est une bijection croissante, donc ψ également. $\square$

Proposition 3. ψ est un homéomorphisme.

Démonstration. Par le lemme 1.3.1, ψ est conjuguée à l'application linéaire $\theta \mapsto 2\theta$ entre les espaces de paramètres. Cette application est continue et de réciproque continue. Comme la paramétrisation par l'angle est un homéomorphisme entre $[0, 2\pi\alpha)$ (resp. $[0, 4\pi\alpha)$) et $\alpha\{C_k\}$ (resp. $2\alpha\{C_{k-1}\}$), le résultat suit. $\square$

[Construction géométrique] Le passage de T_k^β à son image se traduit ainsi : $T_{k-1}^{\beta'}$ est le second point d'intersection de la droite $(O_k T_k^\beta)$ avec C_{k-1} (l'autre étant O_k lui-même).

1.3.3 Action sur la famille (B_k)

Comme $B_k = 2^{-k+1}\{C_k\}$, la définition 3 donne immédiatement :

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\psi(B_k) = B_{k-1}$ et $\psi^{-1}(B_k) = B_{k+1}$. En itérant, pour tous $k, j \in \mathbb{Z}$:

$$\psi^{\circ k}(B_j) = B_{j-k}.$$

1.4 La variante ψ^* et le statut topologique du cercle

Considérons le cas particulier $\alpha = 1/2$. Le domaine de ψ est alors le demi-cercle supérieur $\frac{1}{2}\{C_1\} = (O^1; \bar{S}_k)$ où S_k est diamétralement opposé à O sur C_1 ; ce point étant exclu par convention.

1.4.1 Définition de ψ^*

Définition 4. On définit $\psi^* : (\bar{O}^1; S_k] \rightarrow \{C_0\}$ par

$$\psi^*(T) = \psi(T) \text{ si } T \in (\bar{O}^1; \bar{S}_k), \quad \psi^*(S_k) = O^2,$$

où O^2 désigne l'origine O avec indice de recouvrement 2 (le point de retour sur C_0 après un tour complet).

Ainsi, ψ^* est définie sur l'arc *semi-ouvert* $(\bar{O}^1; S_k]$ — origine exclue, extrémité incluse — et prend ses valeurs sur le cercle $\{C_0\}$ entier, vu comme $(\bar{O}^1; O^2]$ avec extrémité incluse.

$\psi^* : (\bar{O}^1; S_k] \rightarrow \{C_0\}$ est un homéomorphisme.

Démonstration. La bijectivité est claire : ψ est bijective sur l'intérieur, et l'on a ajouté un point isolé de chaque côté en bijection.

La continuité de ψ^* sur l'intérieur $(\bar{O}^1; \bar{S}_k)$ découle de la proposition 3. Il reste à vérifier la continuité en S_k : lorsque $\theta_k \rightarrow \pi^-$, on a $\theta_{k-1} = 2\theta_k \rightarrow 2\pi^-$, donc l'image tend vers O^2 , qui est précisément la valeur en S_k . Le même argument s'applique à $(\psi^*)^{-1}$ en O^2 . $\square$

1.4.2 Conséquence topologique

Le théorème 1.4.1 fournit une description du cercle comme image continue et bijective d'un intervalle semi-ouvert. Plus précisément :

Le cercle $\{C_0\}$, identifié à $(\bar{O}^1; O^2]$, est homéomorphe à l'intervalle semi-ouvert $(0, \pi]$ via la paramétrisation angulaire.

Cette observation, classique en topologie générale lorsqu'on écrit $S^1 \cong [0, 2\pi]/(0 \sim 2\pi)$, prend ici un sens géométrique direct : *en étirant continûment un demi-cercle, on obtient un cercle entier*, à condition d'inclure l'extrémité finale (qui s'identifie alors à l'origine via la relation $\sim$).

[Trois points de vue sur le cercle] Le cercle $\{C_0\}$ peut être présenté comme :

- *semi-ouvert* en tant qu'ensemble paramétré $(\bar{O}^1; O^2]$;
- *ouvert* en excluant également O^2 , ce qui correspond à ψ appliqué à $(\bar{O}^1; \bar{S}_k)$;
- *fermé* (compact) en passant aux classes d'équivalence : $\widetilde{O}^1 = \widetilde{O}^2 = O$ scelle l'orbite.

Ces trois points de vue sont cohérents et coexistent selon que l'on raisonne sur les éléments paramétrés (avec indices de recouvrement) ou sur leurs classes d'équivalence géométrique.

1.5 Une démonstration géométrique de la formule de Viète

L'homéomorphisme ψ permet de retrouver, par calcul direct sur les ordonnées des extrémités S_k , la formule du produit infini de Viète.

[Viète, 1593]

$$\frac{2}{\pi} = \cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{8} \cdot \cos \frac{\pi}{16} \cdots = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdots$$

Démonstration. Pour $k \geq 1$, soit y_k l'ordonnée de l'extrémité S_k de B_k . Un calcul direct par translation du repère en O_k donne

$$y_k = 2^k \rho_0 \sin\left(\frac{\pi}{2^{k-2}}\right).$$

En utilisant $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$, on obtient la récurrence

$$y_{k+1} = y_k \cdot \frac{1}{\cos(\pi/2^{k-1})} \quad (k \geq 3).$$

Par télescopage à partir de $y_3 = 4\rho_0$,

$$y_{p+1} = 4\rho_0 \cdot \prod_{j=3}^p \frac{1}{\cos(\pi/2^{j-1})}.$$

Or $y_k \rightarrow 4\pi\rho_0$ lorsque $k \rightarrow +\infty$ (longueur limite, proposition 1, combinée à $\alpha_k \rightarrow \pi/2$ qui donne un segment vertical limite de longueur $4\pi\rho_0$). On en déduit

$$\prod_{j=3}^{\infty} \frac{1}{\cos(\pi/2^{j-1})} = \pi, \quad \text{soit} \quad \prod_{n=2}^{\infty} \cos \frac{\pi}{2^n} = \frac{2}{\pi}.$$

La seconde expression résulte de la récurrence $u_{n+1} = \sqrt{(1+u_n)/2}$ avec $u_1 = \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$, qui se vérifie par récurrence en utilisant la formule de l'arc moitié : $\cos(\pi/2^{n+2}) = \sqrt{(1+\cos(\pi/2^{n+1}))/2}$. $\square$

1.6 Comportement asymptotique

L'action de ψ sur la famille (B_k) permet de poser naturellement la question des limites.

Limite $k \rightarrow +\infty$. Les boucles B_k deviennent des arcs de plus en plus courts sur des cercles de plus en plus grands. Comme $\theta_k \rightarrow 0$, $\alpha_k \rightarrow \pi/2$ et que la longueur reste constante égale à $4\pi\rho_0$, on conjecture que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} B_k = [O; P), \quad \text{où } P = (0, 2\pi\rho_1).$$

Cette limite est cohérente avec les propriétés de la famille : longueur conservée et nature semi-ouverte de l'ensemble.

Limite $k \rightarrow -\infty$. Cette limite est plus délicate. Les rayons tendent vers 0, les centres tendent vers O , mais le nombre de recouvrements tend vers l'infini :

$$B_k = 2^{-k+1} \{C_k\}, \quad \rho_k \rightarrow 0, \quad 2^{-k+1} \rightarrow +\infty.$$

La limite ponctuelle est O , mais cette description occulte les propriétés invariantes (longueur $4\pi\rho_0$, structure de multi-boucle). Une description satisfaisante demanderait sans doute de quotienter ou d'enrichir le point limite par une mémoire de son indice de recouvrement — question que nous laissons ouverte.

1.7 Conclusion

L'homéomorphisme ψ^* offre une description géométrique transparente du cercle comme image continue et bijective d'un demi-cercle semi-ouvert, et la famille (B_k) fournit le cadre naturel pour itérer cette construction. La formule de Viète apparaît alors comme un corollaire métrique de cette structure. Le comportement asymptotique en $k \rightarrow -\infty$ suggère qu'il existe une notion intéressante d'objet limite à recouvrement infini, sur laquelle nous reviendrons.

Chapitre 2

Axiomatique du grain

Introduction

Ce document propose une axiomatique fondée sur un procédé géométrique : une famille de cercles tangents en un point, parcourus par une trajectoire continue avec doublement d'angle. De ce procédé émergent successivement les multiplicités (finies et transfinies), les entiers $\mathbb{N}$, le continu linéaire, et finalement une structure d'anneau partiel $\widetilde{\mathbb{R}}$ dont la restriction standard donne le corps $\mathbb{R}$.

L'idée directrice est que les nombres ne préexistent pas à la géométrie : ils sont des comptages, et la géométrie circulaire avec doublement d'angle offre le mécanisme générateur naturel.

2.1 Axiomatique du grain

2.1.1 Primitives

(P1) **Plan euclidien.** Le plan $\mathbb{E}^2$ avec sa structure euclidienne ordinaire : distance, angles, droites, cercles. On fixe un point $O \in \mathbb{E}^2$ et une droite verticale Δ passant par O .

- (P2) **Famille des cercles porteurs.** Pour chaque $k \in \mathbb{Z}$, le cercle C_k de centre $O_k = (-2^k \rho_0, 0)$ et de rayon $\rho_k = 2^k \rho_0$, tangent à Δ en O . On fixe $\rho_0 = 1$.
- (P3) **Trajectoire universelle.** Pour chaque $\theta_1 \in [0, 2\pi[$, la trajectoire γ_{θ_1} est la courbe continue qui, sur chaque cercle C_k , passe par le point d'angle $\theta_k = 2^{1-k} \theta_1$ depuis O_k . Le *flot universel* est la famille $\Gamma = \{\gamma_{\theta_1} : \theta_1 \in [0, 2\pi[\}$.
 Sur C_1 , le flot parcourt le cercle une fois. Sur C_0 ($\theta_0 = 2\theta_1$), il le parcourt deux fois. Sur C_{-1} , quatre fois. Etc. À l'inverse, sur C_2 ($\theta_2 = \theta_1/2$), il ne parcourt qu'un demi-cercle. Sur C_3 , un quart. Etc.
- (P4) **Symbole de niveau limite.** Le symbole $-n_\infty$, posé comme niveau idéal au-delà de tous les niveaux entiers négatifs : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-n_\infty < -n$.

Remarque 1. *Les primitives (P1)–(P3) sont entièrement géométriques. (P4) est le seul ingrédient idéal : on adjoint un niveau limite à $\mathbb{Z}$, comme on adjoindrait ∞ à $\mathbb{R}$ pour faire de l'analyse asymptotique. Tout le reste est dérivé.*

2.1.2 Niveaux, grains, résolutions

Définition 5 (Ensemble des niveaux).

$$\mathcal{N} := \mathbb{Z} \cup \{-k \cdot n_\infty : k \in \mathbb{N}^*\},$$

muni de l'ordre étendant celui de $\mathbb{Z}$ par : pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $k \geq 1$, $-kn_\infty < n$, et $-kn_\infty < -jn_\infty$ ssi $k > j$.

Définition 6 (Grain). *Un grain de niveau $\nu \in \mathcal{N}$ est une forme géométrique du plan de la forme :*

- *Si $\nu = k \in \mathbb{Z}$ avec $k \leq 1$: le cercle C_k tout entier, parcouru par le flot 2^{1-k} fois (donc 1 fois pour $k = 1$, 2 fois pour $k = 0$, 4 fois pour $k = -1$, etc.).*

- Si $\nu = k \in \mathbb{Z}$ avec $k \geq 2$: un arc de C_k correspondant à un intervalle $[\theta, \theta'] \subset [0, 2\pi \cdot 2^{k-1}[$ — le flot ne couvre qu'une portion $1/2^{k-1}$ de C_k pour $\theta_1 \in [0, 2\pi[$.
- Si $\nu = -kn_\infty$ avec $k \geq 1$: un point géométrique recouvert, de C_1 atteint à la résolution limite $-kn_\infty$.

On note $\mathcal{G}$ la classe des grains, $\mathcal{G}_\nu$ ceux de niveau ν , et $g_0 := C_1$ le grain initial (niveau 1, multiplicité 1).

Remarque 2 (Interprétation hiérarchique). *Les niveaux croissants ($k \geq 2$) correspondent à des grossissements croissants : on observe une portion de plus en plus restreinte d'un cercle de plus en plus grand. Les niveaux décroissants ($k \leq 0$, puis $-n_\infty, -2n_\infty, \dots$) correspondent à des résolutions de plus en plus fines à l'intérieur de la structure de C_1 .*

Définition 7 (Inclusion et adjacence). $g_1 \subset_g g_2$ ssi le support de g_1 est inclus dans celui de g_2 (via projection par doublement d'angle si les niveaux diffèrent). Deux grains de même niveau sont adjacents s'ils sont distincts et leurs supports tangents.

Définition 8 (Raffinement). Pour $g \in \mathcal{G}_\nu$ avec $\nu \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{F}(g)$ désigne la famille des grains de niveau $\nu - 1$ obtenus par le doublement d'angle, contenus dans g via $\subset_g$.

Définition 9 (Multiplicité totale et position ordinale). Soit g un grain et $r \in \mathcal{N}$ une résolution avec $r \leq \nu(g)$.

- La multiplicité totale de g à la résolution r , notée $\mu(g, r)$, est le nombre de fois que le flot universel Γ recouvre un point générique de g observé à résolution r .
- Une position ordinale dans g à résolution r est l'index $i \in \{1, 2, \dots, \mu(g, r)\}$ d'un passage particulier du flot.

Définition 10 (Factorisation). Considérer différents niveaux d'observation à la résolution limite pour le déploiement du grain.

2.1.3 Stratification de $\tilde{\mathbb{N}}$

Définition 11 (Strates). *Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose*

$$\tilde{\mathbb{N}}_k := \{n : 1 \leq n \leq 2^{kn_\infty}\} \quad (\text{avec } \tilde{\mathbb{N}}_0 = \mathbb{N}).$$

$\tilde{\mathbb{N}}_k$ est l'ensemble des positions ordinales de passage du flot universel sur g_0 à la résolution $-kn_\infty$. L'ensemble total des multiplicités est

$$\tilde{\mathbb{N}} := \bigcup_{k \geq 0} \tilde{\mathbb{N}}_k.$$

Remarque 3 (Filtration). *On a une filtration croissante*

$$\mathbb{N} = \tilde{\mathbb{N}}_0 \subset \tilde{\mathbb{N}}_1 \subset \tilde{\mathbb{N}}_2 \subset \dots \subset \tilde{\mathbb{N}}.$$

Chaque $\tilde{\mathbb{N}}_k$ est totalement ordonné par l'ordre des positions de passage. n_∞ est un élément ordinaire de $\tilde{\mathbb{N}}_1$, situé entre les entiers finis et 2^{n_∞} ; kn_∞ est un élément ordinaire de $\tilde{\mathbb{N}}_k$.

Définition 12 (Construction de $\mathbb{N}$). $\mathbb{N} = \tilde{\mathbb{N}}_0$ est le plus petit sous-ensemble de $\tilde{\mathbb{N}}$ contenant 1 et clos par successeur, où le successeur de n est $n + 1$, défini par juxtaposition de grains adjacents.

Définition 13 (Multiplication sur $\tilde{\mathbb{N}}$). *La multiplication $\cdot : \tilde{\mathbb{N}} \times \tilde{\mathbb{N}} \rightarrow \tilde{\mathbb{N}}$ est définie par :*

- Sur $\mathbb{N}$: multiplication ordinaire.
- $2^a \cdot 2^b = 2^{a+b}$ pour tout $a, b \in \tilde{\mathbb{N}}$ (en particulier $2^{n_\infty} \cdot 2^{n_\infty} = 2^{2n_\infty}$).
- Distributivité par rapport à l'addition (juxtaposition de passages).

Proposition 4 (Compatibilité avec la filtration). *Pour tous $a, b \in \mathbb{N}$, $\tilde{\mathbb{N}}_a \cdot \tilde{\mathbb{N}}_b \subset \tilde{\mathbb{N}}_{a+b}$.*

Démonstration. Soient $m \in \tilde{\mathbb{N}}_a$ et $n \in \tilde{\mathbb{N}}_b$. Par définition, $m \leq 2^{an_\infty}$ et $n \leq 2^{bn_\infty}$. Le produit mn vérifie alors $mn \leq 2^{an_\infty} \cdot 2^{bn_\infty}$. Par la définition 13, $2^{an_\infty} \cdot 2^{bn_\infty} = 2^{(a+b)n_\infty}$, donc $mn \leq 2^{(a+b)n_\infty}$, c'est-à-dire $mn \in \tilde{\mathbb{N}}_{a+b}$. $\square$

2.1.4 Axiomes

Trois axiomes seulement sont irréductibles : tout le reste se déduit du procédé géométrique.

Axiome 1 (Existence des résolutions limites). *Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la résolution $-kn_\infty$ est atteinte par le flot universel : il existe des grains de niveau $-kn_\infty$ (qui sont des points géométriques de C_1), et la multiplicité totale de g_0 à cette résolution vaut $\mu(g_0, -kn_\infty) = 2^{kn_\infty}$.*

Axiome 2 (Stratification stricte). *Pour tous $k \neq j$, $\tilde{\mathbb{N}}_k \neq \tilde{\mathbb{N}}_j$; en particulier $2^{kn_\infty} \neq 2^{jn_\infty}$ (non-idempotence cardinale, type B).*

Axiome 3 (Ordre). *$\tilde{\mathbb{N}}$ est totalement ordonné, étendant l'ordre de $\mathbb{N}$, et tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \geq 1$:*

$$n < n_\infty < 2^{n_\infty} < 2 \cdot 2^{n_\infty} < \dots < 2^{2n_\infty} < \dots$$

2.1.5 Théorèmes fondamentaux

Théorème 1 (Existence du grain initial). *$g_0 = C_1$ est un grain de niveau 1, multiplicité 1 à sa résolution canonique.*

Démonstration. Par la définition 6, un grain de niveau 1 est le cercle C_k avec $k = 1$ tout entier, parcouru $2^{1-1} = 2^0 = 1$ fois par le flot. Donc $g_0 = C_1$ est bien un grain de niveau 1, et sa multiplicité (nombre de passages du flot par un point générique) vaut exactement 1. $\square$

Théorème 2 (Doublement de multiplicité par raffinement). *Pour tout g de niveau $\nu(g) \in \mathbb{Z}$, $\nu(g) \leq 1$, et tout $g' \in \mathcal{F}(g)$ (donc $\nu(g') = \nu(g) - 1$), on a $\mu(g') = 2\mu(g)$.*

Démonstration. Soit g un grain de niveau $k \leq 1$. Par la définition 6, g est un cercle C_k parcouru 2^{1-k} fois par le flot. Considérons $g' \in \mathcal{F}(g)$: c'est un grain de niveau $k - 1$, donc C_{k-1} parcouru $2^{1-(k-1)} = 2^{2-k} = 2 \cdot 2^{1-k}$ fois.

La multiplicité d'un grain est le nombre de passages du flot par un point générique. Sur C_k , le flot effectue 2^{1-k} passages pour $\theta_1 \in [0, 2\pi[$; sur C_{k-1} , $2 \cdot 2^{1-k}$ passages pour le même intervalle de θ_1 . Donc $\mu(g') = 2 \cdot 2^{1-k} = 2\mu(g)$. $\square$

Théorème 3 (Transitivité et compatibilité aux niveaux). *$\subset_g$ est transitif, et $g_1 \subset_g g_2 \implies \nu(g_1) \leq \nu(g_2)$.*

Démonstration. Transitivité. Si $g_1 \subset_g g_2$ et $g_2 \subset_g g_3$, alors par définition le support de g_1 est inclus dans celui de g_2 via projection, et celui de g_2 est inclus dans celui de g_3 via projection. La composition de deux projections par doublement d'angle est encore une projection par doublement d'angle (itéré). Donc le support de g_1 est inclus dans celui de g_3 via projection, c'est-à-dire $g_1 \subset_g g_3$.

Compatibilité. Si $g_1 \subset_g g_2$ avec $\nu(g_1) > \nu(g_2)$, alors le support de g_1 serait sur un cercle $C_{\nu(g_1)}$ plus profondément raffiné que $C_{\nu(g_2)}$, mais devrait être inclus dans celui de g_2 . La projection par doublement d'angle va dans le sens inverse : elle envoie un niveau plus fin vers un niveau plus grossier. L'inclusion $g_1 \subset_g g_2$ exige donc $\nu(g_1) \leq \nu(g_2)$. $\square$

Théorème 4 (Limite des raffinements). *La suite $(\mathcal{F}^n(g_0))_{n \in \mathbb{N}}$ admet pour limite un grain g_∞ de niveau $-n_\infty$ avec $\mu(g_\infty) = 2^{n_\infty}$ et $g_\infty \subset_g \mathcal{F}^n(g_0)$ pour tout n .*

Démonstration. Par le théorème 2, $\mathcal{F}^n(g_0)$ a multiplicité 2^n et niveau $1 - n$. Quand n parcourt $\mathbb{N}$, le niveau $1 - n$ descend vers $-\infty$ dans $\mathbb{Z}$, mais l'axiome 1 garantit l'existence d'un niveau limite $-n_\infty$ strictement plus profond que tous les niveaux entiers négatifs. À ce niveau limite, la multiplicité est 2^{n_∞} (axiome 1). L'inclusion $g_\infty \subset_g \mathcal{F}^n(g_0)$ pour tout n traduit le fait que $-n_\infty < 1 - n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et la compatibilité aux niveaux. $\square$

Théorème 5 (Comparaisons fondamentales). *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \geq 1$: $n < n_\infty$ et $kn_\infty < 2^{kn_\infty}$.*

Démonstration. Première inégalité. Directement de l'axiome 3.

Seconde inégalité. On procède en deux étapes.

Étape 1 : à toute résolution finie $-m$ avec $m \in \mathbb{N}$, on a $m < 2^m$. C'est l'inégalité élémentaire $m < 2^m$ valable pour tout $m \geq 1$ dans $\mathbb{N}$ (preuve par récurrence : vrai pour $m = 1$ car $1 < 2$; et si $m < 2^m$, alors $m + 1 \leq m + m = 2m < 2 \cdot 2^m = 2^{m+1}$).

Étape 2 : passage à la limite. L'axiome 2 garantit que les strates sont strictement distinctes ; en particulier, à la résolution $-n_\infty$, la position ordinale du dernier niveau d'observation (à savoir n_∞ lui-même, par l'axiome 3) reste strictement inférieure à la multiplicité totale 2^{n_∞} . Pour k général, on applique le même argument à la résolution $-kn_\infty$: la position ordinale $kn_\infty \in \tilde{\mathbb{N}}_k$ est strictement inférieure à 2^{kn_∞} , qui borne la strate. $\square$

2.2 Arithmétique des positions

2.2.1 Vue d'ensemble

Cette partie comble une dette technique de la suite : la multiplication sur les positions de $\tilde{\mathbb{R}}$ y est utilisée comme s'il s'agissait de la multiplication réelle ordinaire, sans justification.

L'enjeu est de montrer que la multiplication des positions a un *fondement géométrique* : elle est l'image, via un isomorphisme d'anneaux, de la multiplication binaire des écritures lexicales à n_∞ chiffres après la virgule. La structure d'ordre, d'addition et de multiplication sur C_1 à résolution $-n_\infty$ provient alors entièrement de la combinatoire des mots binaires de longueur n_∞ , elle-même héritée de $\mathbb{N}$.

L'outil central est une *homothétie de normalisation* $h_O^{1/(2\pi)} : C_1 \rightarrow C'_1$ qui envoie le cercle de référence sur un cercle de circonférence unité, où la correspondance entre positions géométriques et écritures binaires est immédiate.

2.2.2 Le cercle normalisé C'_1

Définition 14 (Homothétie de normalisation). Soit $h := h_O^{1/(2\pi)}$ l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{2\pi}$. On pose

$$C'_1 := h(C_1).$$

C'_1 est un cercle de centre $O'_1 = h(O_1)$, tangent à Δ en O (car h fixe O et préserve les tangences), et de circonférence 1 (puisque C_1 a circonférence 2π et h multiplie les longueurs par $\frac{1}{2\pi}$).

Proposition 5 (Préservation de l'ordre). L'homothétie h est une bijection $C_1 \rightarrow C'_1$ qui préserve l'ordre des positions sur le cercle (au sens de l'orientation héritée du flot universel).

Démonstration. Une homothétie de rapport positif est une bijection continue qui préserve l'orientation. Si $\theta \mapsto P_\theta$ est le paramétrage de C_1 par l'angle au centre, alors $\theta \mapsto h(P_\theta)$ paramètre C'_1 par le même angle (au centre O'_1), avec la même orientation. La relation $P_\theta < P_{\theta'}$ (au sens du flot) se traduit en $\theta < \theta'$, donc en $h(P_\theta) < h(P_{\theta'})$ sur C'_1 . $\square$

Remarque 4. Le flot universel sur C'_1 est défini par transport via h : si γ_{θ_1} traverse C_1 au point P_{θ_1} , alors elle traverse C'_1 au point $h(P_{\theta_1})$. La résolution limite reste la même : $-n_\infty$, avec 2^{n_∞} recouvrements de chaque point de C'_1 . On note $\mathcal{G}'_{-n_\infty}$ les grains de C'_1 à cette résolution :

$$\mathcal{G}'_{-n_\infty} = \{g'^k_{-n_\infty} : k \in \tilde{\mathbb{N}}_1\}.$$

2.2.3 Écritures lexicales binaires

Définition 15 (Mots binaires de longueur n_∞). Un mot binaire de longueur n_∞ est une suite $c = (c_1, c_2, \dots, c_{n_\infty})$ avec $c_j \in \{0, 1\}$ pour tout $j \in \tilde{\mathbb{N}}_1$ avec $j \leq n_\infty$. On note $\mathcal{B}_{n_\infty}$ l'ensemble de ces mots.

Proposition 6 (Cardinal). $|\mathcal{B}_{n_\infty}| = 2^{n_\infty}$.

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{N}$ fini, $|\mathcal{B}_n| = 2^n$: à chaque chiffre c_j correspondent deux choix indépendants, et il y a n chiffres, donc 2^n mots par dénombrement standard. Cette identité passe à la limite par définition même de 2^{n_∞} comme multiplicité totale à la résolution $-n_\infty$ (axiome 1) : le nombre de mots binaires de longueur n_∞ est précisément $\mu(g_0, -n_\infty) = 2^{n_\infty}$. $\square$

Définition 16 (Écriture lexicale). À chaque mot $c \in \mathcal{B}_{n_\infty}$ on associe l'écriture lexicale

$$b(c) := 0, c_1 c_2 \dots c_{n_\infty} \quad (\text{en base } 2).$$

Formellement, $b(c)$ est un symbole dans $[0, 1[$ représentant la position ordinale du mot c dans l'ordre lexicographique. On notera b^k le k -ième mot dans cet ordre, $k \in \tilde{\mathbb{N}}_1$.

Définition 17 (Ordre lexicographique). Pour deux mots $c, c' \in \mathcal{B}_{n_\infty}$, on dit que $c <_{\text{lex}} c'$ ssi il existe $j_0 \in \tilde{\mathbb{N}}_1$ avec $j_0 \leq n_\infty$ tel que $c_j = c'_j$ pour tout $j < j_0$ et $c_{j_0} < c'_{j_0}$ (c 'est-à-dire $c_{j_0} = 0$ et $c'_{j_0} = 1$).

Proposition 7 (Ordre total). $(\mathcal{B}_{n_\infty}, <_{\text{lex}})$ est totalement ordonné, et la correspondance $k \leftrightarrow b^k$ est un isomorphisme d'ordre avec $\tilde{\mathbb{N}}_1 = \{1, \dots, 2^{n_\infty}\}$.

Démonstration. Antisymétrie. Si $c <_{\text{lex}} c'$ avec rang j_0 , alors $c_{j_0} = 0 < 1 = c'_{j_0}$, donc on ne peut avoir $c' <_{\text{lex}} c$ (qui exigerait $c'_{j'_0} < c_{j'_0}$ pour un certain j'_0 ; si $j'_0 < j_0$, on aurait $c_j = c'_j$ pour $j < j_0$, donc $c_{j'_0} = c'_{j'_0}$, contradiction ; si $j'_0 = j_0$, on aurait $c'_{j'_0} < c_{j_0}$, contredisant $c_{j_0} < c'_{j_0}$; si $j'_0 > j_0$, on aurait $c_{j_0} = c'_{j_0}$ par hypothèse de $<_{\text{lex}}$ avec rang j'_0 , contredisant $c_{j_0} \neq c'_{j_0}$).

Transitivité. Si $c <_{\text{lex}} c'$ avec rang j_0 et $c' <_{\text{lex}} c''$ avec rang j'_0 , soit $j''_0 = \min(j_0, j'_0)$. Pour $j < j''_0$, $c_j = c'_j = c''_j$. Si $j_0 < j'_0$, alors $c_{j_0} = 0$ et $c'_{j_0} = 1 = c''_{j_0}$ (puisque $j_0 < j'_0$ donc $c'_{j_0} = c''_{j_0}$), donc $c_{j_0} < c''_{j_0}$. Si $j_0 = j'_0$,

alors $c_{j_0} = 0 < 1 = c''_{j_0}$. Si $j_0 > j'_0$, alors $c_{j'_0} = c'_{j'_0} = 0$ et $c''_{j'_0} = 1$, donc $c_{j'_0} < c''_{j'_0}$. Dans tous les cas, $c <_{\text{lex}} c''$.

Totalité. Pour deux mots distincts c, c' , soit j_0 le plus petit indice où ils diffèrent (il existe car les mots sont distincts). Alors $c_{j_0} = 0, c'_{j_0} = 1$ ou inversement. Dans le premier cas $c <_{\text{lex}} c'$, dans le second $c' <_{\text{lex}} c$.

Isomorphisme avec $\tilde{\mathbb{N}}_1$. L'ordre lexicographique sur $\mathcal{B}_{n_\infty}$ est un ordre total sur un ensemble de cardinal 2^{n_∞} (proposition 6). Tout ordre total sur un ensemble de cardinal 2^{n_∞} se met en bijection préservant l'ordre avec $\tilde{\mathbb{N}}_1 = \{1, \dots, 2^{n_\infty}\}$ par énumération : on associe à c son rang dans l'ordre lexicographique. $\square$

2.2.4 Isomorphisme d'ordre lexical $\leftrightarrow$ géométrique

Définition 18 (Correspondance position-mot). *On définit $\varphi : \mathcal{B}_{n_\infty} \rightarrow \mathcal{G}'_{-n_\infty}$ par*

$$\varphi(b^k) := g'^k_{-n_\infty},$$

où b^k est le k -ième mot dans l'ordre lexicographique et $g'^k_{-n_\infty}$ est le k -ième grain dans l'ordre géométrique du flot sur C'_1 .

Théorème 6 (Isomorphisme d'ordre). *φ est une bijection préservant l'ordre :*

$$b^k <_{\text{lex}} b^{k'} \iff g'^k_{-n_\infty} <_{\text{géom}} g'^{k'}_{-n_\infty}.$$

Démonstration. Bijection. L'ensemble $\mathcal{B}_{n_\infty}$ est en bijection avec $\tilde{\mathbb{N}}_1$ par la proposition 7. L'ensemble $\mathcal{G}'_{-n_\infty}$ est aussi en bijection avec $\tilde{\mathbb{N}}_1$ par construction (axiome 1 : $\mu(g'_0, -n_\infty) = 2^{n_\infty}$, donc $\mathcal{G}'_{-n_\infty}$ a 2^{n_∞} éléments). La correspondance φ composée de ces deux bijections (par leur indexation commune k) est elle-même une bijection.

Préservation de l'ordre. Par construction, $b^k <_{\text{lex}} b^{k'}$ ssi $k < k'$ dans $\tilde{\mathbb{N}}_1$; et $g'^k_{-n_\infty} <_{\text{géom}} g'^{k'}_{-n_\infty}$ ssi $k < k'$ dans $\tilde{\mathbb{N}}_1$ également. Les deux conditions sont équivalentes. $\square$

2.2.5 Opérations lexicales

Définition 19 (Addition lexicale). *Pour $b^{k_1}, b^{k_2} \in \mathcal{B}_{n_\infty}$ identifiés à leurs écritures binaires dans $[0, 1[$,*

$$b^{k_1} + b^{k_2} := \text{addition binaire avec retenue, modulo 1.}$$

Plus précisément : si l'addition binaire des écritures donne un résultat ≥ 1 , on retient un tour entier de cercle et on garde la partie fractionnaire ; sinon on garde le résultat tel quel.

Définition 20 (Multiplication lexicale). *Pour $b^{k_1}, b^{k_2} \in \mathcal{B}_{n_\infty}$,*

$$b^{k_1} \times b^{k_2} := \text{multiplication binaire ordinaire.}$$

Le résultat est un mot binaire de longueur $\leq 2n_\infty$ chiffres après la virgule, donc un élément de $\mathcal{B}_{2n_\infty}$, indexé par $\tilde{\mathbb{N}}_2$.

Remarque 5 (Sortie de strate). *La multiplication lexicale fait sortir de $\tilde{\mathbb{N}}_1$ pour entrer dans $\tilde{\mathbb{N}}_2$. C'est la traduction lexicale de la proposition 4 pour $a = b = 1$, et c'est ce qui justifie le besoin d'un déploiement à la résolution $-2n_\infty$ pour représenter le résultat d'un produit de positions. On prend la factorisation ($\ell = 2\pi, |\mathcal{G}_{-2n_\infty}| = 2^{2n_\infty}$).*

Proposition 8 (Propriétés algébriques des opérations lexicales). *($\mathcal{B}_{n_\infty}, +, \times$) vérifie :*

1. *$+$ est commutative, associative, avec neutre $b^0 = 0, 00 \dots 0$;*
2. *chaque élément $b^k \neq 0$ admet un opposé $-b^k$ tel que $b^k + (-b^k) = 0$ (modulo 1) ;*
3. *$\times$ est commutative et associative, avec neutre $b^* = 1, 00 \dots 0$ (qui sort en réalité de $\mathcal{B}_{n_\infty}$ mais agit comme neutre par convention) ;*
4. *$\times$ est distributive sur $+$.*

Démonstration. Ces propriétés sont des conséquences directes de la structure de $\mathbb{N}$ et de la définition des opérations binaires. Plus précisément :

Commutativité de +. L'addition binaire avec retenue est commutative car elle peut être réalisée par n'importe quel ordre des opérandes (la retenue propagée ne dépend que des sommes locales $c_j + c'_j$, qui sont commutatives dans $\mathbb{N}$).

Associativité de +. L'addition binaire est associative dans $\mathbb{N}$; le passage modulo 1 préserve l'associativité car $(a+b) \bmod 1$ et $a+(b \bmod 1)$ donnent le même résultat modulo 1.

Neutre additif. $b^0 + b^k$: aucune retenue, le résultat est b^k .

Opposé. Pour $b^k \neq 0$, $-b^k := b^{2^{n_\infty} - k}$, et on vérifie que $b^k + b^{2^{n_\infty} - k} = b^0$ modulo 1 (la somme fait exactement 1).

Commutativité et associativité de $\times$, distributivité. Héritées de la multiplication des entiers binaires non négatifs : pour b^{k_1}, b^{k_2} vus comme entiers binaires (de $\tilde{\mathbb{N}}_1$), le produit lexical est le produit dans $\tilde{\mathbb{N}}_2$, qui vérifie ces propriétés héritées de $\mathbb{N}$.

Neutre multiplicatif. Le neutre b^* correspond à l'entier 1 de $\tilde{\mathbb{N}}$, qui sort de $\tilde{\mathbb{N}}_1$ vu comme fraction (puisque $b^* = 1 \geq 1$), mais agit bien comme neutre dans le sens où $b^* \times b^k = b^k$ pour tout b^k . $\square$

2.2.6 Transport vers la géométrie

Théorème 7 (Isomorphisme additif). *La correspondance φ transporte l'addition lexicale vers l'addition géométrique sur $\mathcal{G}'_{-n_\infty}$:*

$$\varphi(b^{k_1} + b^{k_2}) = \varphi(b^{k_1}) \oplus \varphi(b^{k_2}),$$

où $\oplus$ est l'addition modulaire sur le cercle C'_1 (de circonférence 1).

Démonstration. Considérons les deux ensembles $\mathcal{B}_{n_\infty}$ et $\mathcal{G}'_{-n_\infty}$, tous deux indexés par $\tilde{\mathbb{N}}_1$ via leur ordre respectif.

Du côté lexical, l'addition $+$ est définie comme addition binaire modulo 1 (définition 19). Vue comme opération sur les indices : $b^{k_1} + b^{k_2} = b^{k_1 + k_2 \bmod 2^{n_\infty}}$.

Du côté géométrique, $\oplus$ est l'addition modulaire sur C'_1 , c'est-à-dire la translation circulaire. Si on indexe les grains $g_{-n_\infty}^k$ par leur position ordinaire $k \in \tilde{\mathbb{N}}_1$, alors la translation de g'^k par $g'^{k'}$ produit $g'^{k+k' \bmod 2^{n_\infty}}$.

Donc $\varphi(b^{k_1} + b^{k_2}) = \varphi(b^{k_1+k_2 \bmod 2^{n_\infty}}) = g_{-n_\infty}^{k_1+k_2 \bmod 2^{n_\infty}}$, et de même $\varphi(b^{k_1}) \oplus \varphi(b^{k_2}) = g_{-n_\infty}^{k_1} \oplus g_{-n_\infty}^{k_2} = g_{-n_\infty}^{k_1+k_2 \bmod 2^{n_\infty}}$. Les deux côtés sont égaux. $\square$

Théorème 8 (Isomorphisme multiplicatif partiel). *La correspondance φ se prolonge en un isomorphisme multiplicatif vers $\mathcal{G}'_{-2n_\infty}$ (grains de C'_1 à résolution $-2n_\infty$). Plus précisément, il existe $\varphi_2 : \mathcal{B}_{2n_\infty} \rightarrow \mathcal{G}'_{-2n_\infty}$ étendant φ , telle que*

$$\varphi_2(b^{k_1} \times b^{k_2}) = \varphi(b^{k_1}) \odot \varphi(b^{k_2}),$$

où $\odot$ désigne la multiplication géométrique des grains, définie par transport.

Démonstration. Existence de φ_2 . On applique la construction du théorème 6 en remplaçant n_∞ par $2n_\infty : \mathcal{B}_{2n_\infty}$ a 2^{2n_∞} éléments (par récurrence du même argument que la proposition 6), de même que $\mathcal{G}'_{-2n_\infty}$ par l'axiome 1. L'indexation commune par $\tilde{\mathbb{N}}_2$ donne la bijection φ_2 .

Extension de φ . Pour $b^k \in \mathcal{B}_{n_\infty}$, on identifie b^k à un élément de $\mathcal{B}_{2n_\infty}$ en complétant son écriture par n_∞ zéros à droite. Alors $\varphi_2(b^k) = \varphi(b^k)$, en convenant que tout grain $g_{-n_\infty}^k$ s'identifie au grain de résolution plus fine qui en occupe la première sous-position.

Transport de la multiplication. La multiplication lexicale $b^{k_1} \times b^{k_2}$ donne par définition un élément de $\mathcal{B}_{2n_\infty}$ (remarque 5). On définit $\odot$ comme image de cette multiplication par φ_2 :

$$\varphi(b^{k_1}) \odot \varphi(b^{k_2}) := \varphi_2(b^{k_1} \times b^{k_2}).$$

L'équation du théorème est alors une définition. Elle est cohérente car φ_2 est une bijection préservant l'ordre, et la multiplication lexicale hérite ses propriétés (commutativité, associativité, distributivité sur l'addition) de la proposition 8. $\square$

2.2.7 Retour à C_1 : épaississement et arithmétique des positions

L'homothétie réciproque $h^{-1} = h_O^{2\pi}$ envoie C'_1 sur C_1 , et *épaissit* chaque grain $g_{-n_\infty}^k$ par un facteur 2π :

$$g_{-n_\infty}^k = 2\pi \cdot g_{-n_\infty}^k.$$

Définition 21 (Position épaissie). À chaque écriture lexicale $b^k \in [0, 1[$ on associe une position sur C_1 :

$$x^k := 2\pi \cdot b^k \in [0, 2\pi[.$$

La correspondance $b^k \leftrightarrow x^k$ est l'homothétie de rapport 2π appliquée aux écritures lexicales.

Remarque 6 (Interpolation interne dans un grain de C_1). Chaque grain $g_{-n_\infty}^k$ de C_1 a une « épaisseur » 2π fois plus grande que son homologue $g_{-n_\infty}^k$ sur C'_1 . À l'intérieur de chaque grain $g_{-n_\infty}^k$, on peut donc intercaler des positions intermédiaires b_k^ℓ d'épaisseur $\frac{1}{2\pi} \cdot g_{-n_\infty}$ — ce qui revient à descendre d'un cran de résolution, vers $-2n_\infty$.

Théorème 9 (Multiplication par un scalaire = homothétie). Soit $\lambda > 0$ un nombre réel standard (au sens de la Définition 34 de la Partie IV). La multiplication d'une position $x \in C_1$ par λ correspond à l'homothétie h_O^λ :

$$\lambda \cdot x = h_O^\lambda(x).$$

Cette opération préserve la structure d'ordre des positions et change uniformément l'épaisseur des grains par un facteur λ .

Démonstration. Cas $\lambda = 2\pi$. Direct par définition de $x^k = 2\pi \cdot b^k$. La position b^k sur C'_1 (de circonférence 1) devient $x^k = 2\pi b^k$ sur C_1 (de circonférence 2π), ce qui est précisément l'effet de l'homothétie $h_O^{2\pi}$.

Cas λ dyadique fini. Soit $\lambda = m/2^n$ avec $m, n \in \mathbb{N}$. La multiplication par λ se décompose en : multiplication par m (juxtaposition de m copies,

ce qui correspond à une dilatation entière), puis division par 2^n (raffinement de n niveaux, ce qui correspond à une homothétie de rapport $1/2^n$). Chaque opération élémentaire correspond à une homothétie ; leur composition est l'homothétie h_O^λ .

Cas λ standard général. Tout λ standard s'approche arbitrairement près par des dyadiques finis dans $\mathbb{R}$. La continuité de l'homothétie (par rapport à son rapport) et la continuité de la multiplication sur $\mathbb{R}$ (qu'on établira en Partie IV) assurent le passage à la limite : pour toute suite (λ_n) dyadique tendant vers λ , on a $\lambda_n \cdot x \rightarrow \lambda \cdot x$ et $h_O^{\lambda_n}(x) \rightarrow h_O^\lambda(x)$, donc $\lambda \cdot x = h_O^\lambda(x)$.

Préservation de l'ordre. L'homothétie de rapport positif préserve l'orientation, donc l'ordre des positions sur le cercle (idem proposition 5).

Changement d'épaisseur. L'homothétie de rapport λ multiplie toutes les longueurs par λ , donc l'épaisseur de chaque grain est multipliée uniformément par λ . $\square$

Corollaire 1 (Invariance de la multiplication modulo épaisseur). *La multiplication des positions est un invariant modulo le changement d'épaisseur du grain : pour toutes positions x, y et tout scalaire $\lambda > 0$ standard,*

$$h_O^\lambda(x \cdot y) = \lambda \cdot (x \cdot y) = (\lambda x) \cdot y = x \cdot (\lambda y).$$

Autrement dit, la structure multiplicative commute avec les homothéties au sens où celles-ci agissent par multiplication scalaire.

Démonstration. La première égalité est le théorème 9 appliqué à $x \cdot y$. La deuxième est l'associativité de la multiplication : $\lambda \cdot (x \cdot y) = (\lambda x) \cdot y$ par associativité, et $= x \cdot (\lambda y)$ par associativité-commutativité. $\square$

2.2.8 Synthèse de l'arithmétique des positions

- **Fondement combinatoire.** La multiplication des positions sur C_1 n'est pas posée *ad hoc* : elle dérive de la multiplication binaire des écritures lexicales de longueur n_∞ , elle-même héritée de $\mathbb{N}$.

- **Rôle de l'homothétie.** L'homothétie $h_O^{1/(2\pi)}$ normalise la circonférence à 1, ce qui rend l'isomorphisme avec les écritures binaires immédiat. L'homothétie réciproque $h_O^{2\pi}$ revient au cercle C_1 et donne le facteur d'échelle 2π entre arithmétique lexicale et arithmétique des positions.
- **Sortie de strate.** La multiplication *sort* nécessairement de $\tilde{\mathbb{N}}_1$ pour atteindre $\tilde{\mathbb{N}}_2$. C'est l'origine combinatoire du besoin du déploiement à résolution $-2n_\infty$ pour la construction de l'anneau partiel.
- **Multiplication scalaire = homothétie.** La multiplication par un scalaire λ correspond à l'homothétie de rapport λ , ce qui donne un sens géométrique précis à la multiplication arbitraire : c'est un changement d'épaisseur uniforme.

2.3 Construction de l'anneau partiel $\tilde{\mathbb{R}}$

2.3.1 Le cercle C_1 à résolution $-n_\infty$

Remarque 7 (Multiplicité sans déploiement intrinsèque). *À la résolution $-n_\infty$, le flot universel sur C_1 effectue 2^{n_∞} passages — mais sur le même cercle C_1 de longueur 2π . Le support géométrique du grain reste un point de C_1 ; ce qui change, c'est le comptage interne des passages. On peut déployer de manière extrinsèque le grain sur C_1 .*

Théorème 10 (Structure additive du cercle C_1 à résolution $-n_\infty$). *L'ensemble des grains $\mathcal{G}_{-n_\infty}$ (points géométriques de C_1), muni de l'addition $\oplus$ héritée de l'addition modulaire sur $[0, 2\pi[$, forme un groupe abélien :*

$$(\mathcal{G}_{-n_\infty}, \oplus) \cong (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, +).$$

Démonstration. Par l'isomorphisme φ du théorème 7, transporté de C'_1 à C_1 via l'homothétie $h^{-1} = h_O^{2\pi}$: la structure additive sur $\mathcal{G}_{-n_\infty}$ est

l'image de la structure additive lexicale $(\mathcal{B}_{n_\infty}, +)$, qui est un groupe abélien (proposition 8). L'isomorphisme avec $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ provient du fait que les écritures lexicales binaires forment une approximation de $[0, 1[$ à résolution $1/2^{n_\infty}$, multipliée par 2π pour obtenir $[0, 2\pi[$. $\square$

2.3.2 Droite réelle déployée positive $\widetilde{\mathbb{R}}^+$

Définition 22 (Déploiement intrinsèque à résolution $-2n_\infty$). *Le déploiement de C_1 à la résolution $-2n_\infty$ consiste à distribuer chaque point de C_1 (parmi les 2^{n_∞} positions ordinales à résolution $-n_\infty$) en 2^{n_∞} sous-positions distinctes à résolution $-2n_\infty$, mises bout à bout sur une droite. La longueur déployée est alors :*

$$\mathcal{L} = 2\pi \cdot 2^{n_\infty}.$$

Définition 23 ($\widetilde{\mathbb{R}}^+$). $\widetilde{\mathbb{R}}^+$ est l'ensemble des positions

$$X = (N - 1) \cdot 2\pi + x$$

avec $x \in [0, 2\pi[$ et $N \in \widetilde{\mathbb{N}}_1 = \{1, \dots, 2^{n_\infty}\}$. C'est le segment $[0, 2\pi \cdot 2^{n_\infty}[$, vu comme déploiement de C_1 à la résolution $-2n_\infty$.

Définition 24 (Addition sur $\widetilde{\mathbb{R}}^+$). Soient $X_1 = (N_1 - 1) \cdot 2\pi + x_1$ et $X_2 = (N_2 - 1) \cdot 2\pi + x_2$ deux éléments de $\widetilde{\mathbb{R}}^+$.

- Si $x_1 + x_2 < 2\pi$: $X_1 + X_2 := (N_1 + N_2 - 2) \cdot 2\pi + (x_1 + x_2)$.
- Si $x_1 + x_2 \geq 2\pi$: $X_1 + X_2 := (N_1 + N_2 - 1) \cdot 2\pi + (x_1 + x_2 - 2\pi)$.

L'addition est définie ssi le résultat reste dans $[0, 2\pi \cdot 2^{n_\infty}[$.

2.3.3 Compatibilité cercle / droite

Définition 25 (Projection). $\pi : \widetilde{\mathbb{R}}^+ \rightarrow \mathcal{G}_{-n_\infty}$, $X = (N - 1) \cdot 2\pi + x \mapsto g$ tel que $\theta_1(g) = x$.

C'est la projection naturelle du déploiement vers le cercle C_1 : on « rembobine » le déploiement modulo 2π .

Théorème 11 (Morphisme partiel). *Pour tous $X_1, X_2 \in \widetilde{\mathbb{R}}^+$ tels que $X_1 + X_2 \in \widetilde{\mathbb{R}}^+$,*

$$\pi(X_1 + X_2) = \pi(X_1) \oplus \pi(X_2),$$

où $\oplus$ est l'addition sur le cercle C_1 .

Démonstration. Écrivons $X_i = (N_i - 1) \cdot 2\pi + x_i$ avec $x_i \in [0, 2\pi[$. Alors $\pi(X_i) = g_{x_i}$ (le grain de C_1 à l'angle x_i).

Cas $x_1 + x_2 < 2\pi$. Par la définition 24, $X_1 + X_2 = (N_1 + N_2 - 2) \cdot 2\pi + (x_1 + x_2)$, donc $\pi(X_1 + X_2) = g_{x_1+x_2}$ (puisque $x_1 + x_2 \in [0, 2\pi[$). Du côté du cercle, $\pi(X_1) \oplus \pi(X_2) = g_{x_1} \oplus g_{x_2} = g_{x_1+x_2 \bmod 2\pi} = g_{x_1+x_2}$ (car $x_1 + x_2 < 2\pi$). Les deux côtés sont égaux.

Cas $x_1 + x_2 \geq 2\pi$. $X_1 + X_2 = (N_1 + N_2 - 1) \cdot 2\pi + (x_1 + x_2 - 2\pi)$, et $x_1 + x_2 - 2\pi \in [0, 2\pi[$, donc $\pi(X_1 + X_2) = g_{x_1+x_2-2\pi}$. Du côté du cercle, $g_{x_1} \oplus g_{x_2} = g_{(x_1+x_2) \bmod 2\pi} = g_{x_1+x_2-2\pi}$. Les deux côtés sont égaux. $\square$

2.3.4 Symétrisation : la droite $\widetilde{\mathbb{R}}$

Définition 26 ($\widetilde{\mathbb{R}}$). $\widetilde{\mathbb{R}}$ est l'ensemble des couples (σ, X) avec $\sigma \in \{+, -\}$ et $X \in [0, 2\pi \cdot 2^{n\infty}[$, modulo $(+, 0) \sim (-, 0)$. On note X pour $(+, X)$ et $-X$ pour $(-, X)$.

Définition 27 (Addition sur $\widetilde{\mathbb{R}}$). Soient $X_1, X_2 \in \widetilde{\mathbb{R}}$.

- Cas $(++)$: $X_1, X_2 \geq 0$. $X_1 + X_2$ est l'addition sur $\widetilde{\mathbb{R}}^+$.
- Cas $(--)$: $X_1, X_2 \leq 0$. Posant $X_i = -Y_i$ avec $Y_i \geq 0$, $X_1 + X_2 := -(Y_1 + Y_2)$.
- Cas mixtes $(+-)$ et $(-+)$: si $|X_1| > |X_2|$, $X_1 + X_2$ a le signe de X_1 et valeur absolue $|X_1| - |X_2|$; symétriquement si $|X_2| > |X_1|$; et $X_1 + X_2 = 0$ si $|X_1| = |X_2|$.

2.3.5 Structure additive : groupe abélien partiel

Proposition 9 (Élément neutre). *Pour tout $X \in \widetilde{\mathbb{R}}$, $X+0 = 0+X = X$.*

Démonstration. Si $X \geq 0$: on est dans le cas $(++)$ avec $X_2 = 0 = (1 - 1) \cdot 2\pi + 0$, donc $N_2 = 1$ et $x_2 = 0$. Alors $x_1 + 0 = x_1 < 2\pi$ (par hypothèse), donc $X + 0 = (N_1 + 1 - 2) \cdot 2\pi + (x_1 + 0) = (N_1 - 1) \cdot 2\pi + x_1 = X$. Si $X < 0$: par symétrie via le cas $(--)$, $X + 0 = -(|X| + 0) = -|X| = X$. La commutativité (établie ci-dessous) donne $0 + X = X + 0 = X$. $\square$

Proposition 10 (Opposé). *Pour tout $X \in \widetilde{\mathbb{R}}$, il existe $-X \in \widetilde{\mathbb{R}}$ tel que $X + (-X) = 0$.*

Démonstration. Si $X = (+, |X|)$, on pose $-X := (-, |X|)$. Si $X = (-, |X|)$, on pose $-X := (+, |X|)$. Dans les deux cas, X et $-X$ ont signes opposés et même valeur absolue. Par la définition 27, cas mixte avec $|X| = |-X|$, on obtient $X + (-X) = 0$. $\square$

Proposition 11 (Commutativité). *Pour tous $X, Y \in \widetilde{\mathbb{R}}$ tels que $X + Y$ et $Y + X$ sont définis, $X + Y = Y + X$.*

Démonstration. Cas $(++)$. Pour $X_1, X_2 \geq 0$, écrivons $X_i = (N_i - 1) \cdot 2\pi + x_i$. La définition 24 est symétrique en (N_1, x_1) et (N_2, x_2) : si $x_1 + x_2 < 2\pi$, $X_1 + X_2 = (N_1 + N_2 - 2) \cdot 2\pi + (x_1 + x_2)$; et $X_2 + X_1 = (N_2 + N_1 - 2) \cdot 2\pi + (x_2 + x_1)$, qui est la même chose par commutativité de l'addition sur $\mathbb{N}$ et sur $[0, 2\pi[$. Le cas $x_1 + x_2 \geq 2\pi$ est traité de manière analogue.

Cas $(--)$. Symétrie via l'opposé : $X + Y = -((-X) + (-Y)) = -((-Y) + (-X)) = Y + X$.

Cas mixtes. La définition est symétrique : on compare $|X_1|$ et $|X_2|$ et on prend le signe du plus grand. L'inversion de l'ordre $(X_1, X_2) \rightarrow (X_2, X_1)$ ne change ni la comparaison ni la valeur absolue du résultat ; quant au signe, il reste celui du plus grand en valeur absolue, qui ne dépend pas de l'ordre. $\square$

Proposition 12 (Associativité). *Pour tous $X, Y, Z \in \widetilde{\mathbb{R}}$ tels que les expressions $(X + Y) + Z$ et $X + (Y + Z)$ sont définies, $(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$.*

Démonstration. Le cœur de l'argument repose sur la correspondance entre l'addition sur $\widetilde{\mathbb{R}}^+$ et la translation : à toute position $X \in \widetilde{\mathbb{R}}^+$ on associe la translation $T_X : Y \mapsto X + Y$; la composition $T_X \circ T_Y = T_{X+Y}$ est associative.

Cas (+ + +). Soient $X = (N_X - 1) \cdot 2\pi + x$, $Y = (N_Y - 1) \cdot 2\pi + y$, $Z = (N_Z - 1) \cdot 2\pi + z$ avec $x, y, z \in [0, 2\pi[$. On veut montrer que $(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$. On distingue les sous-cas selon les retenues.

Sous-cas A : $x + y + z < 2\pi$. Alors $X + Y = (N_X + N_Y - 2) \cdot 2\pi + (x + y)$ (sans retenue), $(X + Y) + Z = (N_X + N_Y + N_Z - 3) \cdot 2\pi + (x + y + z)$ (sans retenue). De même $Y + Z = (N_Y + N_Z - 2) \cdot 2\pi + (y + z)$, $X + (Y + Z) = (N_X + N_Y + N_Z - 3) \cdot 2\pi + (x + y + z)$. Égalité.

Sous-cas B : $x + y + z \in [2\pi, 4\pi[$. Exactement une retenue se produit sur le terme angulaire. Selon l'ordre du calcul, soit $x + y \geq 2\pi$ (retenue dans $X + Y$, puis sans retenue dans $(X + Y) + Z$), soit $x + y < 2\pi$ mais $(x + y) + z \geq 2\pi$ (sans retenue dans $X + Y$, puis retenue dans $(X + Y) + Z$). Dans les deux cas, on totalise une retenue dans le terme N et le terme angulaire résiduel est $x + y + z - 2\pi$. Le résultat est $(N_X + N_Y + N_Z - 2) \cdot 2\pi + (x + y + z - 2\pi)$. La même analyse pour $X + (Y + Z)$ donne le même résultat.

Sous-cas C : $x + y + z \in [4\pi, 6\pi[$. Deux retenues, résultat $(N_X + N_Y + N_Z - 1) \cdot 2\pi + (x + y + z - 4\pi)$. Identique pour les deux parenthésages.

Autres combinaisons de signes. Les cas $(- - -)$ se déduisent par $X + Y + Z = -((-X) + (-Y) + (-Z))$. Pour les cas mixtes, on utilise le fait que l'addition de signes opposés correspond à une soustraction des valeurs absolues, donc se ramène à l'addition positive après simplification. $\square$

Théorème 12 (Groupe abélien partiel). $(\widetilde{\mathbb{R}}, +)$ est un groupe abélien partiel : commutatif, associatif (quand défini), avec neutre 0 et opposé $-X$ pour tout X . L'addition est partielle : non définie si la somme dépasse en valeur absolue $2\pi \cdot 2^{n_\infty}$.

Démonstration. Conséquence des propositions 9, 10, 11, 12. $\square$

2.3.6 Structure multiplicative

Définition 28 (Multiplication sur $\widetilde{\mathbb{R}}$). Soient $X, Y \in \widetilde{\mathbb{R}}$ avec signes σ_X, σ_Y et valeurs absolues $|X|, |Y| \in [0, 2\pi \cdot 2^{n_\infty}]$.

Le produit $X \cdot Y$ est défini ssi $|X| \cdot |Y| < 2\pi \cdot 2^{n_\infty}$, et vaut alors :

$$X \cdot Y := (\sigma_X \cdot \sigma_Y, |X| \cdot |Y|),$$

où $\sigma_X \cdot \sigma_Y$ suit la règle des signes usuelle. Si $X = 0$ ou $Y = 0$, $X \cdot Y = 0$.

Le produit $|X| \cdot |Y|$ des valeurs absolues est entendu au sens de l'arithmétique des positions développée en Partie II : il découle, via l'isomorphisme φ (Théorèmes 7 et 8), de la multiplication binaire lexicale.

Proposition 13 (Commutativité). Pour tous X, Y tels que $X \cdot Y$ est défini, $X \cdot Y = Y \cdot X$.

Démonstration. Le produit des signes est commutatif (règle des signes : $\sigma_X \cdot \sigma_Y = \sigma_Y \cdot \sigma_X$ se vérifie directement pour les quatre combinaisons possibles $(+, +), (+, -), (-, +), (-, -)$). Le produit des valeurs absolues est commutatif par le théorème 8 appliqué à $|X|, |Y|$: ce produit dérive de la multiplication lexicale binaire, qui est commutative (proposition 8). $\square$

Proposition 14 (Associativité). Pour tous X, Y, Z tels que les expressions sont définies, $(X \cdot Y) \cdot Z = X \cdot (Y \cdot Z)$.

Démonstration. *Signes.* Le produit des signes est associatif : $(\sigma_X \cdot \sigma_Y) \cdot \sigma_Z = \sigma_X \cdot (\sigma_Y \cdot \sigma_Z)$ se vérifie par énumération des $2^3 = 8$ combinaisons.

Valeurs absolues. L'associativité du produit des valeurs absolues provient de l'isomorphisme avec la multiplication lexicale, qui est associative (proposition 8, héritée de l'associativité multiplicative de $\mathbb{N}$).

Combinaison. $(X \cdot Y) \cdot Z = ((\sigma_X \sigma_Y) \sigma_Z, (|X| |Y|) |Z|) = (\sigma_X (\sigma_Y \sigma_Z), |X| (|Y| |Z|)) = X \cdot (Y \cdot Z)$. $\square$

Proposition 15 (Élément neutre multiplicatif). $1 \cdot X = X \cdot 1 = X$ pour tout $X \in \widetilde{\mathbb{R}}$.

Démonstration. On suppose $1 = (+, 1)$ avec $|1| = 1$ et $\sigma_1 = +$. Alors $1 \cdot X = (\sigma_1 \cdot \sigma_X, 1 \cdot |X|) = (\sigma_X, |X|) = X$, en utilisant la règle des signes $+\cdot\sigma_X = \sigma_X$ et le fait que 1 est neutre multiplicatif sur les positions (par proposition 8). Commutativité $\Rightarrow X \cdot 1 = X$. $\square$

2.3.7 Inverse multiplicatif partiel

Définition 29 (Inverse). *Pour $X \in \tilde{\mathbb{R}}$ non nul, on dit que X est inversible (une unité) s'il existe $Y \in \tilde{\mathbb{R}}$ tel que $X \cdot Y = 1$. Un tel Y , s'il existe, est unique ; on le note X^{-1} .*

Proposition 16 (Caractérisation des unités). *$X = (\sigma_X, |X|)$ est inversible dans $\tilde{\mathbb{R}}$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont réunies :*

1. (**Arithmétique**) $|X|$ est une puissance de 2, i.e. $|X| = 2^m$ pour un m (positif ou négatif) ; de façon équivalente, $|X| = k \cdot 2^{-n_\infty}$ avec k une puissance de 2.
2. (**Borne**) l'inverse 2^{-m} ne dépasse pas la borne : $\frac{1}{2\pi \cdot 2^{n_\infty}} < |X| < 2\pi \cdot 2^{n_\infty}$.

Dans ce cas $X^{-1} = (\sigma_X, |X|^{-1})$. Le groupe des unités est $\tilde{\mathbb{R}}^\times = \{\pm 2^m\}$ (dans la borne).

Démonstration. Si $|X| = 2^m$ dans la borne, alors 2^{-m} est encore un grain et $|X| \cdot 2^{-m} = 1$, d'où l'inverse (règle des signes : $\sigma_X \cdot \sigma_X = +$).

Réciproquement, supposons $X \cdot Y = 1$ avec $Y = (\sigma_Y, |Y|)$. Alors $|X| \cdot |Y| = 1$ dans l'anneau des positions dyadiques. Écrivons $|X| = a \cdot 2^{-n_\infty}$ et $|Y| = b \cdot 2^{-n_\infty}$ avec a, b entiers. La relation $|X| \cdot |Y| = 1$ impose $a \cdot b = 2^{2n_\infty}$. Comme 2^{2n_∞} n'a pour diviseurs que des puissances de 2, a (et b) est une puissance de 2. Donc $|X|$ est une puissance de 2. $\square$

Remarque 8 (Le seuil de magnitude ne suffit pas). *La seule condition de borne $|X| > \frac{1}{2\pi \cdot 2^{n_\infty}}$ ne caractérise pas l'inversibilité : elle est*

nécessaire mais non suffisante. Contre-exemple : $X = 3 \cdot 2^{-n_\infty}$ est très au-dessus du seuil, mais 3 n'est pas une puissance de 2, donc son inverse $2^{n_\infty}/3$ n'est un grain à aucune résolution (car $3 \nmid 2^k$ pour tout k). Ainsi $3 \cdot 2^{-n_\infty}$ n'est pas inversible dans $\tilde{\mathbb{R}}$. L'inversibilité est de nature arithmétique (être une puissance de 2), pas seulement de magnitude.

Remarque 9 (Statut de $\tilde{\mathbb{R}}$ et passage au corps). $\tilde{\mathbb{R}}$ est donc un anneau (commutatif, unitaire, intègre), et non un corps : ses seules unités sont les puissances de 2. L'inverse d'un élément non-unité comme $3 \cdot 2^{-n_\infty}$ n'existe pas dans $\tilde{\mathbb{R}}$; il n'apparaît qu'après promotion au corps $\mathbb{R} = \tilde{\mathbb{R}}_{\text{fin}}/\mathfrak{m}$ (quotient de la partie finie par l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ des infinitésimaux), où tout élément fini non infinitésimal devient inversible. Les infinitésimaux (valeur absolue $\leq \frac{1}{2\pi \cdot 2^{n_\infty}}$) sont un cas particulier de non-unités : leur inverse déborde la borne.

2.3.8 Distributivité

Théorème 13 (Distributivité). Pour tous $X, Y, Z \in \tilde{\mathbb{R}}$ tels que $X \cdot (Y + Z)$, $X \cdot Y$, $X \cdot Z$ et $X \cdot Y + X \cdot Z$ sont définis,

$$X \cdot (Y + Z) = X \cdot Y + X \cdot Z.$$

Démonstration. On procède par cas selon les signes de Y et Z .

Cas 1 : Y, Z de même signe (tous deux ≥ 0 ou tous deux ≤ 0). Quitte à factoriser le signe commun, on se ramène à $Y, Z \geq 0$. Alors $Y + Z \geq 0$ et $X \cdot (Y + Z)$ a même signe que X . Les valeurs absolues : $|X \cdot (Y + Z)| = |X| \cdot (Y + Z)$ par la définition 28. Par distributivité de la multiplication lexicale sur l'addition (proposition 8, transportée par φ), $|X| \cdot (Y + Z) = |X| \cdot Y + |X| \cdot Z$. Et $|X \cdot Y + X \cdot Z| = |X| \cdot Y + |X| \cdot Z$ car les signes de $X \cdot Y$ et $X \cdot Z$ sont les mêmes (signe de X multiplié par signe commun de Y, Z). Conclusion : $X \cdot (Y + Z)$ et $X \cdot Y + X \cdot Z$ ont même signe et même valeur absolue, donc sont égaux.

Cas 2 : Y, Z de signes opposés. Disons $Y \geq 0$ et $Z = -W$ avec $W > 0$. Alors $Y + Z = Y - W$. Trois sous-cas selon $|Y|$ vs $|W|$:

Sous-cas 2a : $Y > W$. Alors $Y - W > 0$, et $X \cdot (Y - W)$ a signe de X et valeur absolue $|X|(Y - W)$. Par distributivité positive, $|X|(Y - W) = |X|Y - |X|W$. D'autre part, $X \cdot Y$ a signe de X et valeur absolue $|X|Y$; $X \cdot Z = X \cdot (-W)$ a signe opposé à X et valeur absolue $|X|W$. Donc $X \cdot Y + X \cdot Z$ est cas mixte avec $|X \cdot Y| = |X|Y > |X|W = |X \cdot Z|$, donc le résultat a signe de $X \cdot Y$ (= signe de X) et valeur absolue $|X|Y - |X|W = |X|(Y - W)$. Égalité.

Sous-cas 2b : $Y < W$. Alors $Y - W < 0$, et $X \cdot (Y - W)$ a signe opposé à X et valeur absolue $|X|(W - Y)$. D'autre part, $X \cdot Y + X \cdot Z$ est cas mixte avec $|X|Y < |X|W$, résultat de signe opposé à X et valeur absolue $|X|W - |X|Y = |X|(W - Y)$. Égalité.

Sous-cas 2c : $Y = W$. Alors $Y + Z = 0$, et $X \cdot 0 = 0$. D'autre part, $X \cdot Y$ et $X \cdot Z$ ont mêmes valeurs absolues et signes opposés, donc leur somme est 0. Égalité.

Symétrie en Y et Z . Par commutativité de l'addition, les rôles de Y et Z peuvent être échangés; donc le cas $Y \leq 0, Z \geq 0$ se traite de manière analogue. $\square$

2.3.9 Structure d'anneau intègre

Théorème 14 (Structure d'anneau intègre). $(\widetilde{\mathbb{R}}, +, \cdot)$ est un anneau commutatif unitaire, intègre, à opérations partielles (définies hors débordement de la borne $2\pi \cdot 2^{n_\infty}$) :

1. $(\widetilde{\mathbb{R}}, +)$ est un groupe abélien partiel (Théorème 12);
2. $\cdot$ est commutative, associative, distributive sur $+$, de neutre 1 (Propositions 13, 14, 15 et Théorème 13);
3. $\widetilde{\mathbb{R}}$ est intègre : si $X \cdot Y$ est défini et $X \cdot Y = 0$, alors $X = 0$ ou $Y = 0$.

Démonstration. (1) et (2) : déjà établis. (3) : $|X \cdot Y| = |X| \cdot |Y|$, produit de deux positions entières non nulles, donc non nul. $\square$

Remarque 10 (Inversibilité et infinitésimaux). $\widetilde{\mathbb{R}}$ n'est pas un corps. Un élément $X \neq 0$ n'a pas d'inverse dans $\widetilde{\mathbb{R}}$ dès que $1/|X|$ n'est pas une position de grain, ce qui est le cas générique : par exemple $X = 3 \cdot 2^{-n_\infty}$, dont l'inverse $2^{n_\infty}/3$ n'est un grain à aucune résolution, puisque $3 \nmid 2^k$ pour tout k . L'inverse n'apparaît qu'après promotion : dans le corps $\mathbb{R}$ du Chapitre 10, où l'écart infinitésimal $u = 2^{-n_\infty}$ entre $\mu_{\inf}$ et $\mu_{\sup}$ d'un même grain est écrasé, tout $X \neq 0$ non infinitésimal devient inversible. Ainsi $3 \cdot \frac{1}{3} = 1$ est une égalité de $\mathbb{R}$, non de $\widetilde{\mathbb{R}}$.

2.4 Revêtements du cercle par la droite déployée

La construction de $\widetilde{\mathbb{R}}^+$ comme déploiement de C_1 admet deux lectures topologiques naturelles, selon la résolution à laquelle on lit le cercle de base. Ces deux lectures sont reliées par un diagramme commutatif qui en clarifie les rôles respectifs.

2.4.1 Topologies

Définition 30 (Topologies sur les cercles et la droite déployée).

- On munit $\mathcal{G}_{-n_\infty}$ de la topologie héritée de l'identification canonique avec $[0, 2\pi[/(0 \sim 2\pi)$, c'est-à-dire la topologie du cercle S^1 .
- On munit $\mathcal{G}_{-2n_\infty}$ de la topologie héritée du même cercle, lu à résolution plus fine : la résolution $-2n_\infty$ ne change pas le support géométrique, elle raffine seulement le comptage ordinal des positions.
- On munit $\widetilde{\mathbb{R}}^+ = [0, 2\pi \cdot 2^{n_\infty}[$ de la topologie d'ordre dérivée de l'ordre total construit en Partie I.

2.4.2 Première structure : revêtement à un feuillet vers $\mathcal{G}_{-2n_\infty}$

À la résolution $-2n_\infty$, le cercle C_1 est résolu en 2^{2n_∞} positions ordinales distinctes, exactement le nombre de positions du déploiement $\widetilde{\mathbb{R}}^+$. La correspondance est donc une bijection.

Définition 31 (Projection fine π_2).

$$\pi_2 : \widetilde{\mathbb{R}}^+ \longrightarrow \mathcal{G}_{-2n_\infty}, \quad X \longmapsto \text{le grain de résolution } -2n_\infty \text{ correspondant à } X.$$

Théorème 15 (π_2 est un homéomorphisme). π_2 est une bijection continue d'inverse continu : $\widetilde{\mathbb{R}}^+$ et $\mathcal{G}_{-2n_\infty}$ sont homéomorphes. Topologiquement, le déploiement $\widetilde{\mathbb{R}}^+$ « est » le cercle C_1 à la résolution $-2n_\infty$, lu linéairement.

Démonstration. La cardinalité des deux ensembles est 2^{2n_∞} (positions ordinales). La bijection respecte l'ordre par construction : la k -ième position du déploiement correspond au k -ième grain dans l'ordre cyclique fin du flot. La continuité dans les deux sens découle de la compatibilité des topologies d'ordre. $\square$

Remarque 11 (Lecture sans repliement). π_2 exprime l'identité géométrique entre déploiement et cercle fin : il n'y a pas de repliement, pas de fibres multiples. Chaque position du déploiement est un grain unique du cercle à résolution $-2n_\infty$.

2.4.3 Seconde structure : revêtement à 2^{n_∞} feuillets vers $\mathcal{G}_{-n_\infty}$

Si l'on lit le cercle à la résolution *moins fine* $-n_\infty$, alors chaque point de $\mathcal{G}_{-n_\infty}$ regroupe 2^{n_∞} positions ordinales fines (à résolution $-2n_\infty$). On obtient un véritable revêtement à plusieurs feuillets.

Définition 32 (Projection grossière π_1).

$$\pi_1 : \widetilde{\mathbb{R}}^+ \longrightarrow \mathcal{G}_{-n_\infty}, \quad X = (N-1) \cdot 2\pi + x \longmapsto g \text{ tel que } \theta_1(g) = x.$$

Théorème 16 (Revêtement à 2^{n_∞} feuillets). π_1 est un revêtement topologique à 2^{n_∞} feuillets : pour tout $g \in \mathcal{G}_{-n_\infty}$, il existe un voisinage ouvert $U \subset \mathcal{G}_{-n_\infty}$ tel que

$$\pi_1^{-1}(U) = \bigsqcup_{N=1}^{2^{n_\infty}} U_N,$$

chaque U_N étant homéomorphe à U via π_1 .

Démonstration. Pour $g \leftrightarrow x \in [0, 2\pi[$, prendre $U =]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$. Alors

$$\pi_1^{-1}(U) = \bigsqcup_{N=1}^{2^{n_\infty}} ((N-1) \cdot 2\pi + U),$$

union disjointe de 2^{n_∞} copies translatées de U , chacune dans une tranche distincte. La restriction de π_1 à chaque copie est une translation suivie d'une identification modulaire, donc un homéomorphisme. $\square$

2.4.4 Articulation : diagramme commutatif

Les deux structures sont reliées par un troisième morphisme naturel, qui « oublie » la résolution fine.

Définition 33 (Projection d'oubli q).

$$q : \mathcal{G}_{-2n_\infty} \longrightarrow \mathcal{G}_{-n_\infty},$$

qui envoie chaque grain fin sur le grain grossier qui le contient (chaque grain de $\mathcal{G}_{-n_\infty}$ contient exactement 2^{n_∞} grains de $\mathcal{G}_{-2n_\infty}$).

Proposition 17 (q est un revêtement à 2^{n_∞} feuillets). q est un revêtement topologique à 2^{n_∞} feuillets entre les deux résolutions du cercle.

Théorème 17 (Diagramme commutatif des revêtements). *Le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathbb{R}}^+ & \xrightarrow{\pi_2} & \mathcal{G}_{-2n_\infty} \\ & \searrow \pi_1 & \downarrow q \\ & & \mathcal{G}_{-n_\infty} \end{array}$$

c'est-à-dire $\pi_1 = q \circ \pi_2$.

Démonstration. π_2 identifie chaque position du déploiement à un grain fin. q envoie ce grain fin sur le grain grossier qui le contient. La composée envoie une position $X = (N-1) \cdot 2\pi + x$ sur le grain grossier de position angulaire x , ce qui est exactement la définition de π_1 . $\square$

2.4.5 Compatibilité avec la structure d'anneau partiel

Théorème 18 (Revêtements d'anneaux partiels). *Les deux projections π_1 et π_2 sont compatibles avec la structure additive partielle :*

$$\pi_2(X_1 + X_2) = \pi_2(X_1) \oplus_2 \pi_2(X_2), \quad \pi_1(X_1 + X_2) = \pi_1(X_1) \oplus \pi_1(X_2),$$

où $\oplus_2$ et $\oplus$ désignent respectivement les additions modulaires sur $\mathcal{G}_{-2n_\infty}$ et $\mathcal{G}_{-n_\infty}$.

Corollaire 2 (Descente et relèvement). *La structure d'anneau partiel sur $\widetilde{\mathbb{R}}^+$ descend via π_2 en une structure d'anneau partiel sur le cercle fin $\mathcal{G}_{-2n_\infty}$, et via π_1 en une structure de groupe sur le cercle grossier $\mathcal{G}_{-n_\infty}$. Le diagramme commutatif garantit la cohérence de ces deux descentes.*

2.4.6 Extension à $\widetilde{\mathbb{R}}$

Par symétrisation, les deux projections s'étendent à la droite signée :

$$\widetilde{\pi}_2 : \widetilde{\mathbb{R}} \rightarrow \mathcal{G}_{-2n_\infty}, \quad \widetilde{\pi}_1 : \widetilde{\mathbb{R}} \rightarrow \mathcal{G}_{-n_\infty}.$$

Théorème 19 (Revêtements de la droite signée). *$\widetilde{\pi}_2$ est un revêtement à 2 feuillets (les deux orientations de signe). $\widetilde{\pi}_1$ est un revêtement à $2^{n_\infty+1}$ feuillets. Les deux sont compatibles avec la structure additive partielle de $\widetilde{\mathbb{R}}$.*

2.5 Le corps $\mathbb{R}$ comme restriction standard

2.5.1 Éléments standards

L'objectif de cette partie est d'identifier dans $\tilde{\mathbb{R}}$ un sous-ensemble qui soit un *vrai* corps (sans partialité), et qui corresponde au $\mathbb{R}$ classique.

Définition 34 (Éléments standards). *Un élément $X \in \tilde{\mathbb{R}}$ est standard si :*

- (borné) *il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $|X| < 2^m$,*
- (non infinitésimal) *$X \neq 0$, ou il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $|X| > 2^{-m}$.*

On note $\mathbb{R} \subset \tilde{\mathbb{R}}$ l'ensemble des éléments standards.

Remarque 12. *Les bornes en 2^m avec m entier fini garantissent que $|X|$ ne s'approche ni de la borne supérieure $2\pi \cdot 2^{n_\infty}$ ni de la borne inférieure $\frac{1}{2\pi \cdot 2^{n_\infty}}$: X est strictement intérieur à la zone d'inversibilité totale.*

En effet, pour tout $m \in \mathbb{N}$ fini, $2^m < 2^{n_\infty}$ par le théorème 5 (puisque $m < n_\infty$ par axiome 3, et l'exponentiation est croissante). A fortiori, $2^m < 2\pi \cdot 2^{n_\infty}$. De même, $2^{-m} = 1/2^m > 1/(2^{n_\infty}) > 1/(2\pi \cdot 2^{n_\infty})$.

2.5.2 Stabilité de $\mathbb{R}$

Proposition 18 (Stabilité par addition). *Si $X, Y \in \mathbb{R}$, alors $X + Y$ est défini dans $\tilde{\mathbb{R}}$ et $X + Y \in \mathbb{R}$.*

Démonstration. Définition. Si $|X|, |Y| < 2^m$ pour un certain m , alors $|X+Y| \leq |X|+|Y| < 2^{m+1}$ (inégalité triangulaire pour la valeur absolue, vérifiable cas par cas selon les signes : si X, Y même signe, $|X + Y| = |X| + |Y|$; si signes opposés, $|X + Y| = ||X| - |Y|| \leq \max(|X|, |Y|) \leq |X| + |Y|$). Puisque 2^{m+1} est encore fini, donc $< 2\pi \cdot 2^{n_\infty}$, l'addition est bien définie dans $\tilde{\mathbb{R}}$.

Borné. L'inégalité précédente donne $|X + Y| < 2^{m+1}$, donc $X + Y$ est borné (par $2^{m+1} \in \mathbb{N}$).

Non infinitésimal. Cas 1 : $X+Y = 0$, alors $X+Y \in \mathbb{R}$ par convention.

Cas 2 : $X+Y \neq 0$ et X, Y de même signe. Alors $|X+Y| = |X|+|Y| \geq |X| > 2^{-m_X}$ pour un certain $m_X \in \mathbb{N}$ (puisque X non infinitésimal, supposé $X \neq 0$). Donc $|X+Y| > 2^{-m_X}$.

Cas 3 : $X+Y \neq 0$ et X, Y de signes opposés. Alors $|X+Y| = ||X|-|Y||$. Cette quantité peut être très petite si $|X|$ et $|Y|$ sont proches. Toutefois, puisque $X+Y \neq 0$, on a $|X| \neq |Y|$, et la différence est bornée inférieurement par la finesse de la résolution disponible dans $\widetilde{\mathbb{R}}$, soit au minimum $\frac{1}{2\pi \cdot 2^n_\infty}$. *Ce point mérite une discussion* : si l'on prend X et Y standards très proches, $|X|-|Y|$ peut être plus petit que 2^{-m} pour tout m fini, ce qui sortirait de $\mathbb{R}$. Mais alors, soit $|X|-|Y|$ est exactement 0 (cas 1 traité), soit cette différence reste représentable par une position dans $\widetilde{\mathbb{R}}$, ce qui requiert $||X|-|Y|| > \frac{1}{2\pi \cdot 2^n_\infty}$. Pour assurer la stabilité de $\mathbb{R}$, on stipule par définition 34 que toute différence non nulle d'éléments standards est encore standard — ce qui revient à demander que $\mathbb{R}$ soit fermé par sa propre topologie naturelle. Ceci est cohérent avec la construction classique de $\mathbb{R}$ comme complété de $\mathbb{Q}$. $\square$

Remarque 13 (Sur la stabilité par soustraction). *La preuve précédente met au jour une subtilité : la non-infinitésimalité n'est pas automatiquement préservée par soustraction dans $\widetilde{\mathbb{R}}$. La définition d'élément standard doit donc être interprétée de façon que toute différence non nulle d'éléments standards soit elle-même standard. Cela correspond à l'idée que $\mathbb{R}$ est un corps archimédien : la finesse interne de $\mathbb{R}$ est définie par les puissances finies de 2, et toute différence non nulle reste de cet ordre.*

Une formulation plus rigoureuse consisterait à définir $\mathbb{R}$ comme la clôture par limites de Cauchy de $\mathbb{Q}$ dans $\widetilde{\mathbb{R}}$; cela est laissé pour un développement ultérieur.

Proposition 19 (Stabilité par multiplication). *Si $X, Y \in \mathbb{R}$, alors $X \cdot Y$ est défini dans $\widetilde{\mathbb{R}}$ et $X \cdot Y \in \mathbb{R}$.*

Démonstration. Définition. Si $|X|, |Y| < 2^m$, alors $|X \cdot Y| < 2^{2m}$. Comme

2^{2m} est encore fini, donc $< 2\pi \cdot 2^{n_\infty}$ (puisque $2m < n_\infty$ par axiome 3 et croissance de l'exponentielle), la multiplication est définie dans $\widetilde{\mathbb{R}}$.

Borné. $|X \cdot Y| < 2^{2m}$, donc $X \cdot Y$ borné par $2^{2m} \in \mathbb{N}$.

Non infinitésimal. Si $X = 0$ ou $Y = 0$, alors $X \cdot Y = 0 \in \mathbb{R}$. Sinon, $X, Y \neq 0$ et non infinitésimaux : $|X| > 2^{-m_X}$ et $|Y| > 2^{-m_Y}$ pour certains $m_X, m_Y \in \mathbb{N}$. Alors $|X \cdot Y| = |X| \cdot |Y| > 2^{-(m_X+m_Y)}$, donc $X \cdot Y$ non infinitésimal. $\square$

Proposition 20 (Stabilité par opposé). $X \in \mathbb{R} \implies -X \in \mathbb{R}$.

Démonstration. $|-X| = |X|$ donc les conditions de borné et non-infinitésimal sont identiques. $\square$

Proposition 21 (Stabilité par inverse). $X \in \mathbb{R}, X \neq 0 \implies X^{-1} \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Existence de l'inverse. X standard non nul est en particulier non infinitésimal : $|X| > 2^{-m}$ pour un certain $m \in \mathbb{N}$. Donc $|X| > 2^{-m} > 1/(2\pi \cdot 2^{n_\infty})$ (puisque $m < n_\infty$ et exponentiation décroissante pour les exposants négatifs), et l'inverse X^{-1} existe dans $\widetilde{\mathbb{R}}$ par la définition 29.

Borné. $|X| > 2^{-m}$ entraîne $|X^{-1}| = 1/|X| < 2^m$, donc X^{-1} borné.

Non infinitésimal. $|X| < 2^{m'}$ pour un certain m' (puisque X borné), donc $|X^{-1}| = 1/|X| > 2^{-m'}$, donc X^{-1} non infinitésimal. $\square$

2.5.3 Théorème : $\mathbb{R}$ est un corps

Théorème 20 (Structure de corps de $\mathbb{R}$). $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ est un corps commutatif au sens classique :

1. $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe abélien (addition totale).
2. $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ est un groupe abélien (multiplication totale, tout élément non nul est inversible).
3. Distributivité.

Démonstration. (1) *Groupe abélien additif.* Par les propositions 18 et la stabilité par opposé, $+$ et $-$ sont des opérations totales sur $\mathbb{R}$. Les propriétés algébriques (commutativité, associativité, neutre 0, opposé) sont héritées de $\tilde{\mathbb{R}}$ (propositions 9, 10, 11, 12), où elles tiennent dès que les expressions sont définies — ce qui est garanti sur $\mathbb{R}$ par la stabilité.

(2) *Groupe abélien multiplicatif sur $\mathbb{R}^*$.* Par les propositions 19 et 21, $\cdot$ et $^{-1}$ sont des opérations totales sur $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Commutativité, associativité, neutre 1, inverse : héritées de $\tilde{\mathbb{R}}$ (propositions 13, 14, 15, ??).

(3) *Distributivité.* Héritée du théorème 13 : la distributivité tient dans $\tilde{\mathbb{R}}$ dès que toutes les expressions sont définies, ce qui est le cas sur $\mathbb{R}$ par stabilité. $\square$

Corollaire 3 ($\tilde{\mathbb{R}}$ comme extension de $\mathbb{R}$). *Le corps $\mathbb{R}$ ainsi obtenu est un sous-corps de $\tilde{\mathbb{R}}$ au sens partiel. $\tilde{\mathbb{R}}$ peut être vu comme une extension non archimédienne de $\mathbb{R}$: il contient des éléments infiniment grands ($\geq 2^n$ pour tout n fini) et des infinitésimaux non nuls ($\leq 2^{-n}$ pour tout n fini).*

Démonstration. *Sous-corps.* $\mathbb{R} \subset \tilde{\mathbb{R}}$ par définition. Les opérations de $\mathbb{R}$ sont les restrictions de celles de $\tilde{\mathbb{R}}$ (propositions de stabilité).

Éléments infiniment grands. Par exemple, $2^{n_\infty} \in \tilde{\mathbb{R}}$ mais $2^{n_\infty} > 2^m$ pour tout m fini par théorème 5. Donc $2^{n_\infty} \notin \mathbb{R}$.

Infinitésimaux non nuls. $\frac{1}{2^{n_\infty}}$ existe dans $\tilde{\mathbb{R}}$ comme position, mais $\frac{1}{2^{n_\infty}} < 2^{-m}$ pour tout m fini, et $\frac{1}{2^{n_\infty}} \neq 0$. Donc $\frac{1}{2^{n_\infty}} \notin \mathbb{R}$.

(Note : $\frac{1}{2^{n_\infty}}$ n'admet pas d'inverse dans $\tilde{\mathbb{R}}$ si $\frac{1}{2^{n_\infty}} \leq \frac{1}{2\pi \cdot 2^{n_\infty}}$, c'est-à-dire $2\pi \leq 1$, ce qui est faux. Donc $\frac{1}{2^{n_\infty}}$ a un inverse, qui est 2^{n_∞} .) $\square$

Chapitre 3

Symétrie de résolution et dualité

3.1 Le procédé bidirectionnel et la dilatation $\mathcal{F}^{-1}$

Préambule

Ce travail prolonge l'*Axiomatique du grain* en explorant une symétrie structurelle qui y était présente mais non thématifiée : le procédé géométrique n'est pas seulement un mécanisme de raffinement (résolution interne du point O), mais aussi un mécanisme de dilatation (résolution externe de l'infini). Les deux directions sont duales. Cette *dualité de résolution* est portée par la bijection combinatoire δ_k (totale, et indépendante de toute notion d'inversibilité). Sur le *groupe des unités* $\tilde{\mathbb{R}}^\times = \{\pm 2^k\}$ — les échelles de résolution, c'est-à-dire les puissances de 2 dont l'inverse ne déborde pas la borne — elle réalise l'involution arithmétique $X \leftrightarrow 1/X$ (échange $2^{-kn_\infty} \leftrightarrow 2^{+kn_\infty}$). Sur $\tilde{\mathbb{R}}$ tout entier, en revanche, cette inversion n'est que *partielle* : un élément non inversible (générique, tel $3 \cdot 2^{-n_\infty}$) n'a pas d'image par $X \mapsto 1/X$.

L'objectif de cette première partie est de poser formellement le pro-

cédé comme bidirectionnel, de définir l'opération de dilatation $\mathcal{F}^{-1}$ comme réciproque du raffinement $\mathcal{F}$, et de montrer que la *droite à l'infini* apparaît naturellement comme un cercle dont la courbure tombe dans les infinitésimaux non inversibles de $\widetilde{\mathbb{R}}$. Cette droite à l'infini porte une structure stratifiée à deux niveaux, symétrique de celle du déploiement $\widetilde{\mathbb{R}}^+$.

Statut de $\widetilde{\mathbb{R}}$. Conformément à la version mise à jour de l'*Axiomatique du grain*, $\widetilde{\mathbb{R}}$ est un *anneau commutatif unitaire intègre*, à opérations partielles (par débordement de la borne). Il n'est pas un corps : seules les unités $\mathbb{R}^\times = \{\pm 2^k\}$ (puissances de 2 dont l'inverse reste dans la borne) sont inversibles. Le corps des réels est le quotient $\mathbb{R} = \widetilde{\mathbb{R}}/\mathfrak{m}$ par l'idéal $\mathfrak{m}$ des infinitésimaux (Chapitre 10). Toutes les mentions de « corps partiel » de la présente Partie doivent se lire « anneau partiel ».

Référence implicite. On suppose acquis le contenu de l'*Axiomatique du grain* (procédé géométrique, stratification de $\widetilde{\mathbb{N}}$, arithmétique des positions, anneau partiel $\widetilde{\mathbb{R}}$).

3.2 Le procédé bidirectionnel

3.2.1 Rappel : la famille des cercles porteurs

On rappelle (P2) de l'axiomatique : pour chaque $k \in \mathbb{Z}$, le cercle C_k de centre $O_k = (-2^k \rho_0, 0)$ et de rayon $\rho_k = 2^k \rho_0$, avec $\rho_0 = 1$, est tangent à Δ en O . La famille $(C_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ se prolonge naturellement aux niveaux entiers et, par les axiomes 1–3, aux niveaux limites $\pm k \cdot n_\infty$.

Remarque 14 (Niveaux positifs explicités). *Pour $k \geq 2$, C_k a rayon $2^k \rho_0$, donc rayon de plus en plus grand et courbure $1/\rho_k = 2^{-k}$ de plus en plus petite. À la limite $k = n_\infty$, le rayon est 2^{n_∞} et la courbure est 2^{-n_∞} . À $k = 2n_\infty$, le rayon est 2^{2n_∞} et la courbure est 2^{-2n_∞} .*

3.2.2 Bidirectionnalité du procédé

Le procédé géométrique (P3) est intrinsèquement bidirectionnel : le doublement d'angle $\theta_{k-1} = 2\theta_k$ peut être lu dans les deux sens.

- **Sens descendant** (raffinement) : passer de C_k à C_{k-1} double le nombre de passages du flot par chaque point. C'est l'opération $\mathcal{F}$.
- **Sens ascendant** (dilatation) : passer de C_k à C_{k+1} divise par deux le nombre de passages, ou symétriquement, double la portion de cercle ambiant nécessaire pour contenir le flot. C'est l'opération $\mathcal{F}^{-1}$.

Définition 35 (Opération de dilatation). *Pour $g \in \mathcal{G}_\nu$ avec $\nu \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{F}^{-1}(g)$ désigne le grain de niveau $\nu + 1$ dont g est un sous-grain par $\mathcal{F}$. Formellement, c'est l'unique $g' \in \mathcal{G}_{\nu+1}$ tel que $g \in \mathcal{F}(g')$.*

Proposition 22 (Réciprocité). *$\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^{-1}$ sont réciproques au sens où, pour tout grain g de niveau entier,*

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(g)) = g \quad \text{et} \quad \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(g)) \ni g.$$

La première égalité est stricte ; la seconde est une appartenance car $\mathcal{F}^{-1}(g)$ contient g parmi ses raffinements possibles.

Démonstration. Pour la première : si g est de niveau ν et $g' \in \mathcal{F}(g)$ est de niveau $\nu - 1$, alors par la définition 35, $\mathcal{F}^{-1}(g')$ est l'unique grain de niveau ν dont g' est un raffinement, c'est-à-dire g lui-même.

Pour la seconde : si g est de niveau ν , $\mathcal{F}^{-1}(g)$ est de niveau $\nu + 1$. Le raffinement $\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(g))$ est la famille des grains de niveau ν contenus dans $\mathcal{F}^{-1}(g)$, et g en fait partie par construction. $\square$

Théorème 21 (Stratification ascendante). *Pour tout grain g de niveau $\nu(g) \in \mathbb{Z}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{F}^{-n}(g)$ est un grain de niveau $\nu(g) + n$. Sa multiplicité est divisée par 2^n par rapport à celle de g .*

Démonstration. Par récurrence sur n . Cas $n = 0$: trivial. Hérédité : si $\mathcal{F}^{-n}(g)$ est de niveau $\nu + n$ avec multiplicité $\mu(g)/2^n$, alors $\mathcal{F}^{-(n+1)}(g) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}^{-n}(g))$ est de niveau $\nu + n + 1$ par définition. Pour la multiplicité : par le théorème de doublement de l'axiomatique (passage $\mathcal{F}$), μ double quand le niveau descend de 1 ; donc μ se divise par 2 quand le niveau monte de 1. D'où $\mu(\mathcal{F}^{-(n+1)}(g)) = \mu(\mathcal{F}^{-n}(g))/2 = \mu(g)/2^{n+1}$. $\square$

3.2.3 La résolution limite ascendante $+n_\infty$

Axiome 4 (Existence des résolutions ascendantes). *Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, le niveau $+k \cdot n_\infty$ est atteint par le procédé : il existe des grains de niveau $+kn_\infty$, dont le support est un cercle C_{+kn_∞} de rayon 2^{kn_∞} et de circonférence $2\pi \cdot 2^{kn_\infty}$. La courbure de C_{+kn_∞} est $\kappa_{+kn_\infty} = 2^{-kn_\infty}$.*

Remarque 15. *Cet axiome prolonge symétriquement l'axiome 1 de l'axiomatique (existence des résolutions descendantes $-kn_\infty$). Ensemble, ils fixent que le procédé géométrique atteint des niveaux limites dans les deux directions, avec la même structure stratifiée.*

Proposition 23 (Courbure infinitésimale au niveau $+2n_\infty$). *Pour $k = 1$, la courbure $\kappa_{+n_\infty} = 2^{-n_\infty}$ vérifie $\kappa_{+n_\infty} > \frac{1}{2\pi \cdot 2^{n_\infty}}$. C'est une unité de $\widetilde{\mathbb{R}}$: elle admet un inverse, à savoir 2^{n_∞} , qui reste dans la borne.*

Pour $k \geq 2$, $\kappa_{+kn_\infty} = 2^{-kn_\infty}$ vérifie $\kappa_{+kn_\infty} < \frac{1}{2\pi \cdot 2^{n_\infty}}$. Bien que 2^{-kn_∞} soit une puissance de 2, son inverse 2^{kn_∞} déborde la borne $2\pi \cdot 2^{n_\infty}$ des éléments inversibles : κ_{+kn_∞} est donc non inversible dans $\widetilde{\mathbb{R}}$ (par débordement de son inverse), tout en étant un infinitésimal (élément de l'idéal $\mathfrak{m}$).

Démonstration. Cas $k = 1$. On a $\frac{1}{2\pi \cdot 2^{n_\infty}} = \frac{1}{2\pi} \cdot 2^{-n_\infty}$. Comme $\frac{1}{2\pi} < 1$, on en déduit $\frac{1}{2\pi \cdot 2^{n_\infty}} < 2^{-n_\infty}$, soit $\kappa_{+n_\infty} > \frac{1}{2\pi \cdot 2^{n_\infty}}$. Son inverse 2^{n_∞} vérifie $2^{n_\infty} < 2\pi \cdot 2^{n_\infty}$ (car $1 < 2\pi$), donc reste dans la borne : κ_{+n_∞} est une unité.

Cas $k = 2$. $\kappa_{+2n_\infty} = 2^{-2n_\infty} = 2^{-n_\infty} \cdot 2^{-n_\infty}$. Comparons à $\frac{1}{2\pi \cdot 2^{n_\infty}} = \frac{1}{2\pi} \cdot 2^{-n_\infty}$: $\kappa_{+2n_\infty} < \frac{1}{2\pi \cdot 2^{n_\infty}}$ ssi $2^{-n_\infty} < \frac{1}{2\pi}$, ce qui est vrai puisque 2^{-n_∞}

est infinitésimal et $\frac{1}{2\pi}$ standard. Son inverse serait $2^{2n_\infty} > 2\pi \cdot 2^{n_\infty}$: il dépasse la borne, donc κ_{+2n_∞} n'est pas inversible dans $\tilde{\mathbb{R}}$.

Cas $k \geq 2$ général. $\kappa_{+kn_\infty} = 2^{-kn_\infty} \leq 2^{-2n_\infty} < \frac{1}{2\pi \cdot 2^{n_\infty}}$, et son inverse $2^{kn_\infty} \geq 2^{2n_\infty}$ dépasse la borne : non inversible. $\square$

Remarque 16 (Le critère de magnitude ne vaut que pour les unités). Dans l'anneau $\tilde{\mathbb{R}}$, la caractérisation « inversible ssi la magnitude dépasse le seuil $\frac{1}{2\pi \cdot 2^{n_\infty}}$ » n'est valable que pour les unités, c'est-à-dire les puissances de 2 : pour une telle puissance 2^{-m} , être inversible équivaut à ce que son inverse 2^m reste dans la borne. Pour un élément non dyadique, le critère de magnitude est faux : $3 \cdot 2^{-n_\infty}$, par exemple, est largement au-dessus du seuil, mais son inverse $2^{n_\infty}/3$ n'est un grain à aucune résolution (car $3 \nmid 2^k$), donc $3 \cdot 2^{-n_\infty}$ n'est pas inversible dans $\tilde{\mathbb{R}}$. Comme les courbures considérées ici sont toutes des puissances de 2, l'analyse par magnitude leur reste licite.

Remarque 17 (Seuil de la droite à l'infini). La proposition précédente montre que la condition « courbure non inversible (inverse débordant la borne) » n'est satisfaite qu'à partir du niveau $+2n_\infty$, pas dès $+n_\infty$. C'est à ce niveau $+2n_\infty$ qu'apparaît la droite à l'infini Δ_∞ : le cercle porteur C_{+2n_∞} n'est plus distinguable d'une droite par l'anneau $\tilde{\mathbb{R}}$.

Au niveau intermédiaire $+n_\infty$, le cercle C_{+n_∞} est très grand mais sa courbure 2^{-n_∞} est une unité (inverse 2^{n_∞} dans la borne), donc inversible : il a encore une géométrie circulaire effective.

3.2.4 La droite à l'infini

Définition 36 (Droite à l'infini). La droite à l'infini Δ_∞ est définie comme le cercle C_{+2n_∞} identifié à sa tangente en O , identification possible puisque sa courbure 2^{-2n_∞} est un infinitésimal non inversible de $\tilde{\mathbb{R}}$ (élément de l'idéal $\mathfrak{m}$, écrasé sur 0 lors de la promotion $\tilde{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R} = \tilde{\mathbb{R}}/\mathfrak{m}$), donc indistinguable de 0 après passage au corps.

Au niveau de résolution $2n_\infty$, nous allons déployer $\mathcal{F}^{-2n_\infty}(C_1)$ où ($C_1 = g_0$) de multiplicité $\frac{1}{2^{2n_\infty}}$, d'épaisseur 2π sur $2\pi \cdot 2^{2n_\infty}$. Nous pouvons factoriser de plusieurs façons ce développement et stratifier la droite Δ_∞ . Ce déploiement est extrinsèque et se trouve le symétrique d'un déploiement intrinsèque au niveau de résolution à $-n_\infty$.

Théorème 22 (Structure stratifiée de Δ_∞). *Δ_∞ est de longueur totale $2\pi \cdot 2^{2n_\infty}$. Elle porte une double mosaïque :*

- **niveau grossier** ($+n_\infty$) : 2^{n_∞} copies dilatées de C_1 , chacune de longueur $2\pi \cdot 2^{n_\infty}$;
- **niveau fin** ($+2n_\infty$) : 2^{2n_∞} zéros dilatés (les grains-points g_{-n_∞} originaux de C_1 , vus à l'extérieur après double dilatation), chacun de longueur 2π .

Les deux niveaux sont reliés par dilatation : chaque copie grossière de C_1 contient 2^{n_∞} zéros dilatés fins.

Démonstration. Longueur totale. Par l'axiome 4, C_{+2n_∞} a circonférence $2\pi \cdot 2^{2n_\infty}$. L'identification à sa tangente préserve cette longueur (puisque la courbure est infinitésimale non inversible).

Niveau grossier. Au niveau $+n_\infty$, on a C_{+n_∞} de circonférence $2\pi \cdot 2^{n_\infty}$, qui contient C_1 comme arc rectifié de longueur 2π . En faisant un cran de dilatation supplémentaire ($+n_\infty \rightarrow +2n_\infty$), le cercle ambiant devient C_{+2n_∞} de circonférence $2\pi \cdot 2^{2n_\infty}$, mais la structure de C_{+n_∞} se conserve par mosaïquage : on peut paver C_{+2n_∞} avec $\frac{2\pi \cdot 2^{2n_\infty}}{2\pi \cdot 2^{n_\infty}} = 2^{n_\infty}$ copies de C_{+n_∞} . Comme chaque C_{+n_∞} contenait une copie dilatée de C_1 (de longueur $2\pi \cdot 2^{n_\infty}$), on obtient 2^{n_∞} copies dilatées de C_1 sur Δ_∞ , chacune de longueur $2\pi \cdot 2^{n_\infty}$. Vérification : $2^{n_\infty} \cdot 2\pi \cdot 2^{n_\infty} = 2\pi \cdot 2^{2n_\infty}$. ✓

Niveau fin. La dilatation de C_1 n'est plus possible directement au-delà de $+n_\infty$: C_1 a déjà atteint sa rectification. Pour aller plus loin, ce sont les grains-points internes g_{-n_∞} qui composaient C_1 à sa résolution interne qui se dilatent à leur tour. Chacun de ces 2^{n_∞} grains-points internes, par dilatation, devient un arc rectifié de longueur 2π sur Δ_∞ .

Comme il y a 2^{n_∞} copies dilatées de C_1 , et chacune contient 2^{n_∞} grains-points internes, on obtient $2^{n_\infty} \cdot 2^{n_\infty} = 2^{2n_\infty}$ zéros dilatés au total. Vérification : $2^{2n_\infty} \cdot 2\pi = 2\pi \cdot 2^{2n_\infty}$. ✓

Relation entre les deux niveaux. Chaque copie grossière de C_1 (longueur $2\pi \cdot 2^{n_\infty}$) contient $\frac{2\pi \cdot 2^{n_\infty}}{2\pi} = 2^{n_\infty}$ zéros dilatés fins (longueur 2π chacun). C'est l'expression géométrique du fait que chaque C_1 porte 2^{n_∞} grains-points internes à sa résolution $-n_\infty$. □

Corollaire 4 (Symétrie d'architecture). *Le côté descendant ($-2n_\infty$, déploiement $\mathbb{R}^+$) et le côté ascendant ($+2n_\infty$, droite à l'infini Δ_∞) ont la même architecture stratifiée à deux niveaux :*

	Côté descendant ($-2n_\infty$)	Côté ascendant ($+2n_\infty$)
Niveau grossier	2^{n_∞} grains-points dans C_1	2^{n_∞} copies dilatées de C_1
Niveau fin	2^{2n_∞} sous-positions du déploiement	2^{2n_∞} zéros dilatés
Longueur élémentaire fine	$\frac{2\pi}{2^{n_\infty}}$	2π
Longueur totale	$2\pi \cdot 2^{n_\infty}$	$2\pi \cdot 2^{2n_\infty}$

Remarque 18 (La vraie symétrie : produit des finesses). *Les deux longueurs totales ne sont pas égales (elles diffèrent d'un facteur 2^{n_∞}). Ce n'est pas la longueur totale qui est l'invariant de la dualité de résolution, mais le produit des finesses élémentaires :*

$$(\text{finesse fine descendante}) \times (\text{finesse fine ascendante}) = \frac{2\pi}{2^{n_\infty}} \times 2\pi = \frac{(2\pi)^2}{2^{n_\infty}}.$$

Ce produit est constant, indépendant de la direction (résolution ou dilatation), et c'est lui qui exprime la dualité $\mu \leftrightarrow 1/\mu$ sur les finesses : très fine d'un côté ($\frac{1}{2^{n_\infty}}$), très grossière de l'autre (2π), produit invariant. (Cette dualité $\mu \leftrightarrow 1/\mu$ porte sur des finesses, qui sont des échelles — donc des unités de $\mathbb{R}$; elle est en ce sens l'expression géométrique de ι restreint aux unités.)

On a une version géométrique élémentaire de cette invariance, intrinsèque à la dualité de résolution.

3.2.5 Stratification ascendante $\tilde{\mathbb{N}}_k^{\text{ext}}$

Définition 37 (Strates ascendantes). *Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose*

$$\tilde{\mathbb{N}}_k^{\text{ext}} := \{n : 1 \leq n \leq 2^{kn_\infty}\} \quad (\text{avec } \tilde{\mathbb{N}}_0^{\text{ext}} = \mathbb{N}).$$

Sémantiquement, $\tilde{\mathbb{N}}_k^{\text{ext}}$ indexe les positions ordinales externes à profondeur de dilatation k :

- *pour $k = 1$: copies dilatées de C_1 au niveau $+n_\infty$, ou de manière équivalente, copies grossières sur Δ_∞ ;*
- *pour $k = 2$: zéros dilatés au niveau $+2n_\infty$, copies fines sur Δ_∞ ;*
- *pour $k \geq 3$: niveaux plus profonds (au-delà de Δ_∞ , dans des extensions ultérieures).*

Remarque 19. *Comme ensembles ordonnés, $\tilde{\mathbb{N}}_k^{\text{ext}}$ et $\tilde{\mathbb{N}}_k$ sont isomorphes : ils ont même cardinal 2^{kn_∞} et même structure d'ordre totale. Leur différence est sémantique : le premier compte des copies externes (résolution ascendante), le second des positions internes (résolution descendante).*

Proposition 24 (Bijection canonique). *Il existe une bijection canonique*

$$\delta_k : \tilde{\mathbb{N}}_k \longrightarrow \tilde{\mathbb{N}}_k^{\text{ext}}$$

qui envoie la i -ième position ordinale interne à C_1 (au niveau $-kn_\infty$) sur la i -ième copie ordinale externe à la profondeur de dilatation $+kn_\infty$.

Démonstration. Les deux ensembles sont en bijection avec $\{1, \dots, 2^{kn_\infty}\}$ via leur indexation ordinale (axiome 1 et axiome 4 respectivement). La composition de ces deux bijections donne δ_k , qui préserve l'ordre par construction (les deux ordres sont hérités de $\{1, \dots, 2^{kn_\infty}\}$). $\square$

Remarque 20. La bijection δ_k est l'ossature de la dualité de résolution ; étant une bijection ordinale, elle est totale et ne requiert aucun inverse arithmétique. Elle sera étendue dans la Partie suivante en une bijection géométrique $\delta_k : \mathcal{G}_{-kn_\infty} \rightarrow \mathcal{M}_{+kn_\infty}$ compatible avec les structures additives et multiplicatives. Sur les échelles (les puissances de 2, c'est-à-dire le groupe des unités $\widetilde{\mathbb{R}}^\times$), δ_k réalise l'involution $X \leftrightarrow 1/X$: elle échange le niveau interne 2^{-kn_∞} et le niveau externe 2^{+kn_∞} . Sur les éléments non inversibles de $\widetilde{\mathbb{R}}$, cette involution arithmétique n'a pas lieu (voir le préambule de la Partie II).

3.3 Arithmétique duale et dualité géométrique

δ_k

Préambule

La Partie I a établi le procédé géométrique comme bidirectionnel : à chaque résolution descendante $-kn_\infty$ correspond une résolution ascendante $+kn_\infty$, et une bijection canonique $\delta_k : \widetilde{\mathbb{N}}_k \rightarrow \widetilde{\mathbb{N}}_k^{\text{ext}}$ préserve l'ordre.

Elle a aussi montré que la droite à l'infini Δ_∞ porte une *double mosaïque* : 2^{n_∞} copies grossières de C_1 et 2^{2n_∞} zéros dilatés fins, en parfaite symétrie d'architecture avec le déploiement $\widetilde{\mathbb{R}}^+$. La quantité invariante sous la dualité n'est pas la longueur totale, mais le *produit des finesses élémentaires* : $\frac{(2\pi)^2}{2^{n_\infty}}$.

Cette Partie II développe l'arithmétique sur les multiplicités externes en miroir de l'arithmétique des positions, et étend δ_k en un *isomorphisme stratifié* : il préserve l'addition, et entrelace la multiplication interne (qui descend en stratification) avec la multiplication externe (qui monte).

Dualité arithmétique ι et son domaine. $\widetilde{\mathbb{R}}$ étant un anneau (et non un corps), l'inversion $\iota : X \mapsto 1/X$ n'est *pas* une involution de $\widetilde{\mathbb{R}}$ tout entier : c'est une involution du *groupe des unités* $\widetilde{\mathbb{R}}^\times = \{\pm 2^k\}$, c'est-

à-dire des échelles de résolution (les puissances de 2 dont l'inverse ne déborde pas la borne). Sur $\widetilde{\mathbb{R}}$, ι est partielle : un élément non inversible générique, tel $3 \cdot 2^{-n_\infty}$, n'a pas d'image. La dualité de résolution δ_k , elle, est *totale* : bijection ordinale des positions, elle n'exige aucun inverse. Sur les unités, δ_k et ι *coïncident* (δ_k échange 2^{-kn_∞} et 2^{+kn_∞} , ce que réalise aussi ι) : la dualité arithmétique est la restriction de la dualité combinatoire aux échelles. L'extension d'une involution arithmétique au-delà des unités est impossible dans $\widetilde{\mathbb{R}}$; elle n'est recouverte que dans le corps quotient $\mathbb{R} = \widetilde{\mathbb{R}}/\mathfrak{m}$ (Chapitre 10), où tout élément non infinitésimal devient inversible. Ce qui était naguère signalé comme « question ouverte » se précise ainsi : δ_k inverse les échelles ; sur le reste de $\widetilde{\mathbb{R}}$, il n'y a pas d'involution arithmétique à approfondir, mais une *promotion* à effectuer.

Référence implicite. On suppose acquis les contenus de l'*Axiomatique du grain* et de la Partie I de ce travail (procédé bidirectionnel, $\mathcal{F}^{-1}$, axiome ascendant, droite à l'infini Δ_∞ , double mosaïque, bijection canonique δ_k).

3.4 Arithmétique externe sur les copies

3.4.1 Mosaïques et grains externes

Définition 38 (Mosaïque externe). *Pour $k \geq 1$, la mosaïque externe à profondeur k , notée $\mathcal{M}_{+kn_\infty}$, est l'ensemble des 2^{kn_∞} copies ordinales de C_1 rectifié sur le cercle géant C_{+kn_∞} (identifié à Δ_∞ pour $k \geq 2$, voir Partie I).*

On note $m_j^{(k)}$ la j -ième copie dans l'ordre canonique, avec $j \in \widetilde{\mathbb{N}}_k^{\text{ext}} = \{1, \dots, 2^{kn_\infty}\}$.

Remarque 21 (Lien avec la Partie I). $\mathcal{M}_{+kn_\infty}$ est l'ensemble des grains-copies introduit dans le théorème 1 de la Partie I pour $k = 2$. La généralisation à k quelconque suit la stratification ascendante.

Définition 39 (Position dans la mosaïque). *La position de la j -ième copie $m_j^{(k)}$ sur le cercle géant C_{+kn_∞} est*

$$X_j^{ext} := (j - 1) \cdot 2\pi \in [0, 2\pi \cdot 2^{kn_\infty}].$$

C'est l'angle au centre O_{+kn_∞} correspondant au début de la j -ième copie.

Proposition 25 (Structure cyclique). *$(\mathcal{M}_{+kn_\infty}, \oplus^{ext})$ est un groupe abélien fini cyclique d'ordre 2^{kn_∞} , où $\oplus^{ext}$ est l'addition modulaire sur le cercle géant : $m_{j_1}^{(k)} \oplus^{ext} m_{j_2}^{(k)} = m_{(j_1+j_2-1)}^{(k)} \pmod{2^{kn_\infty}}$.*

Démonstration. Les copies $m_j^{(k)}$ sont indexées par $\tilde{\mathbb{N}}_k^{ext}$ de cardinal 2^{kn_∞} . L'addition $\oplus^{ext}$ correspond à la translation circulaire sur C_{+kn_∞} par incréments de 2π . L'élément neutre est $m_1^{(k)}$ (la copie d'origine, à la position 0), l'opposé de $m_j^{(k)}$ est $m_{2^{kn_\infty}-j+2}^{(k)}$ (la copie diamétralement opposée modulo l'indexation). Commutativité et associativité héritées de l'addition modulaire sur $\mathbb{Z}/2^{kn_\infty}\mathbb{Z}$. $\square$

3.4.2 Multiplication externe par juxtaposition d'échelles

Définition 40 (Multiplication externe). *Pour $m_{j_1}^{(k_1)} \in \mathcal{M}_{+k_1n_\infty}$ et $m_{j_2}^{(k_2)} \in \mathcal{M}_{+k_2n_\infty}$, le produit externe est :*

$$m_{j_1}^{(k_1)} \odot^{ext} m_{j_2}^{(k_2)} := m_{j_1 \cdot j_2}^{(k_1+k_2)} \in \mathcal{M}_{+(k_1+k_2)n_\infty}.$$

Remarque 22 (Montée en strate). *Comme pour la multiplication interne (lexicale), la multiplication externe monte dans la stratification : $\mathcal{M}_{+k_1n_\infty} \odot^{ext} \mathcal{M}_{+k_2n_\infty} \subset \mathcal{M}_{+(k_1+k_2)n_\infty}$. Cette montée est duale de la descente de la multiplication interne (produit à $-(k_1+k_2)n_\infty$), et c'est cette montée qui assure la clôture multiplicative dans la tour $\mathbb{R} = \bigcup_k \mathcal{B}_{-kn_\infty}$ (resp. $\bigcup_k \mathcal{M}_{+kn_\infty}$) : le produit sort de l'étage, jamais de la tour.*

Géométriquement, multiplier deux copies de C_1 revient à composer leurs échelles : si $m_{j_1}^{(1)}$ est la j_1 -ième copie dans la mosaïque de profondeur 1 et $m_{j_2}^{(1)}$ la j_2 -ième, leur produit $m_{j_1 j_2}^{(2)}$ est la position dans la mosaïque plus fine de profondeur 2, obtenue en composant les deux indexations.

Proposition 26 (Propriétés de la multiplication externe). 1. $\odot^{ext}$ est commutative : $m_{j_1}^{(k_1)} \odot^{ext} m_{j_2}^{(k_2)} = m_{j_2}^{(k_2)} \odot^{ext} m_{j_1}^{(k_1)}$.
 2. $\odot^{ext}$ est associative.
 3. Élément neutre : $m_1^{(0)} = 1 \in \mathbb{N}$ agit comme neutre.
 4. Distributivité sur $\oplus^{ext}$.

En particulier, $(\bigcup_k \mathcal{M}_{+kn_\infty}, \oplus^{ext}, \odot^{ext})$ est un monoïde commutatif pour $\odot^{ext}$ (pas un groupe : seules les échelles sont inversibles), en miroir du statut d'anneau de $\widetilde{\mathbb{R}}$.

Démonstration. Les quatre propriétés se déduisent directement de celles de la multiplication des indices dans $\mathbb{N}$, puisque la multiplication externe est définie par produit des indices :

- (1) $j_1 \cdot j_2 = j_2 \cdot j_1$ dans $\mathbb{N}$, et l'index détermine entièrement la copie.
- (2) $(j_1 \cdot j_2) \cdot j_3 = j_1 \cdot (j_2 \cdot j_3)$ dans $\mathbb{N}$.
- (3) $j \cdot 1 = j$ dans $\mathbb{N}$.
- (4) Pour $j_1 \cdot (j_2 + j_3) = j_1 j_2 + j_1 j_3$, on a la distributivité de $\mathbb{N}$, qui se transporte aux mosaïques.

L'absence d'inverses multiplicatifs généraux reflète que $\mathbb{N}$ n'est pas un groupe multiplicatif : seuls les indices puissances de 2 (échelles) possèdent un inverse dans la borne. $\square$

3.4.3 Le théorème de dualité géométrique

On en arrive au cœur de la Partie II : l'extension de la bijection canonique δ_k en un *isomorphisme stratifié* qui entrelace les deux directions du procédé (descente interne et montée externe).

Théorème 23 (Dualité de résolution, version géométrique). *Pour tout $k \geq 1$, la bijection canonique $\delta_k : \mathcal{G}_{-kn_\infty} \rightarrow \mathcal{M}_{+kn_\infty}$ (qui envoie le i -ième grain-point sur la i -ième copie externe) vérifie :*

1. *Préservation de l'addition. Pour tous $g_{i_1}, g_{i_2} \in \mathcal{G}_{-kn_\infty}$ tels que $g_{i_1} \oplus g_{i_2}$ est défini sur C_1 ,*

$$\delta_k(g_{i_1} \oplus g_{i_2}) = \delta_k(g_{i_1}) \oplus^{\text{ext}} \delta_k(g_{i_2}).$$

2. *Compatibilité avec la multiplication stratifiante. Pour tous $g_{i_1} \in \mathcal{G}_{-k_1n_\infty}$, $g_{i_2} \in \mathcal{G}_{-k_2n_\infty}$,*

$$\delta_{k_1+k_2}(g_{i_1} \odot g_{i_2}) = \delta_{k_1}(g_{i_1}) \odot^{\text{ext}} \delta_{k_2}(g_{i_2}).$$

La multiplication interne $\odot$ contracte des positions fines en descendant dans la stratification ; la multiplication externe $\odot^{\text{ext}}$ dilate des copies grossières en montant dans la stratification. δ_k entrelace les deux mouvements.

Cet énoncé est purement combinatoire (arithmétique des indices dans $\mathbb{N}$) : il ne requiert aucune inversibilité et reste donc valable dans le cadre d'anneau.

Démonstration. (1) *Préservation de l'addition.* Par la proposition 1 de la Partie I, δ_k envoie la position ordinale $i \in \tilde{\mathbb{N}}_k$ vers la copie ordinale $i \in \tilde{\mathbb{N}}_k^{\text{ext}}$. Du côté descendant, $g_{i_1} \oplus g_{i_2}$ est la translation circulaire sur C_1 indexée par $(i_1 + i_2) \bmod 2^{kn_\infty}$. Du côté ascendant, $\delta_k(g_{i_1}) \oplus^{\text{ext}} \delta_k(g_{i_2})$ est la translation sur C_{+kn_∞} indexée par le même $(i_1 + i_2) \bmod 2^{kn_\infty}$ (par la proposition 25). Les deux indices étant égaux, et δ_k étant la bijection canonique sur les indices, l'égalité tient.

(2) *Compatibilité avec la multiplication stratifiante.* Du côté descendant, $g_{i_1} \odot g_{i_2}$ est défini dans $\mathcal{G}_{-(k_1+k_2)n_\infty}$ par la multiplication des positions internes (Axiomatique du grain, Partie II) : $g_{i_1} \odot g_{i_2} = g_{i_1 \cdot i_2}$ où $i_1 \cdot i_2 \in \tilde{\mathbb{N}}_{k_1+k_2}$.

Du côté ascendant, $\delta_{k_1}(g_{i_1}) \odot^{\text{ext}} \delta_{k_2}(g_{i_2}) = m_{i_1}^{(k_1)} \odot^{\text{ext}} m_{i_2}^{(k_2)} = m_{i_1 \cdot i_2}^{(k_1+k_2)}$, qui est précisément $\delta_{k_1+k_2}(g_{i_1 \cdot i_2})$.

D'où l'égalité annoncée. $\square$

Remarque 23. *La résolution limite négative est équivalente à prendre un niveau d'observation plus fin. La résolution limite positive est équivalente à prendre un niveau d'observation dilaté. Si bien que C_1 devient très grand. D'où l'on obtient une dualité de la représentation de C_1 due à la symétrie des résolutions.*

3.4.4 Le théorème de factorisation

Théorème 24 (Factorisation). *Tout grain g , déployé à une résolution $\nu \in \{-2n_\infty, -n_\infty, +n_\infty, +2n_\infty\}$, est caractérisé par un triplet $(\mathcal{L}, |\mathcal{L}|, \epsilon)$ où :*

- $\mathcal{L}$ est la longueur totale du déploiement ;
- $|\mathcal{L}|$ est le cardinal des éléments élémentaires ;
- ϵ est la longueur d'un élément élémentaire (l'« épaisseur du zéro »).

Ces trois grandeurs sont contraintes par la relation fondamentale

$$\boxed{\mathcal{L} = |\mathcal{L}| \cdot \epsilon.}$$

Le triplet de référence, à la résolution $-n_\infty$ de C_1 , est

$$(\mathcal{L}, |\mathcal{L}|, \epsilon) = \left(2\pi, 2^{n_\infty}, \frac{2\pi}{2^{n_\infty}} \right).$$

Corollaire 5 (Relativité des grandeurs). *Le déploiement de C_1 admet quatre factorisations canoniques, une par résolution limite. Toutes vérifient la relation fondamentale $\mathcal{L} = |\mathcal{L}| \cdot \epsilon$.*

<i>Résolution</i>	$\mathcal{L}$	$ \mathcal{L} $	ϵ	<i>Objet géométrique</i>
$-n_\infty$	2π	2^{n_∞}	$\frac{2\pi}{2^{n_\infty}}$	C_1 , résolution de base
$-2n_\infty$	$2\pi \cdot 2^{n_\infty}$	2^{2n_∞}	$\frac{2\pi}{2^{n_\infty}}$	Droite déployée $\widetilde{\mathbb{R}}^+$
$+n_\infty$	$2\pi \cdot 2^{n_\infty}$	2^{n_∞}	2π	C_∞ , copies grossières de C_1
$+2n_\infty$	$2\pi \cdot 2^{2n_\infty}$	2^{2n_∞}	2π	Δ_∞ , zéros dilatés

Lecture.

- Le déploiement de C_1 à $-2n_\infty$ et la mosaïque grossière de Δ_∞ à $+n_\infty$ ont même cardinal (2^{n_∞} ou 2^{2n_∞} selon le niveau), mais des épaisseurs duales ($\frac{2\pi}{2^{n_\infty}}$ vs $2\pi \cdot 2^{n_\infty}$).
- De manière symétrique, C_1 à $-n_\infty$ et Δ_∞ à $+2n_\infty$ (zéros dilatés) ont aussi des épaisseurs duales : $\frac{2\pi}{2^{n_\infty}}$ et 2π . Leur produit vaut $\frac{(2\pi)^2}{2^{n_\infty}}$, soit l'aire élémentaire de la cellule minimale.

Conséquence principale. *L'infini et le fini sont relatifs à la factorisation choisie : ce qui est élémentaire à une résolution devient total à une autre, et inversement. Toute factorisation doit conduire à un équilibre des grandeurs en jeu par la relation $\mathcal{L} = |\mathcal{L}| \cdot \epsilon$, ce qui donne une équivalence des formes selon le niveau de résolution. L'infini se ramène à du fini, et vice versa.*

Chapitre 4

Intégrales divergentes et régularisation

Introduction

Ce volet exploite la structure de *l’Axiomatique du grain* et de *Symétrie de résolution* pour traiter les *intégrales divergentes*. L’idée directrice : une somme de Riemann calculée sur la double mosaïque de $\widetilde{\mathbb{R}}^+$ est toujours *finie* comme élément de la hiérarchie auto-engendrée. Ce qui apparaît en analyse classique comme une divergence à l’infini devient ici une simple valeur dans une strate $\widetilde{\mathbb{R}}|_k$. La projection finale $\widetilde{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ joue alors le rôle d’une *régularisation intrinsèque*.

Le document est organisé en quatre parties :

- **Partie I** : définition rigoureuse de l’intégrale stratifiée et compatibilité avec l’intégrale classique.
- **Partie II** : hiérarchie des divergences (polynomial, logarithmique, exponentiel, double-exponentiel).
- **Partie III** : régularisation par projection, analogies avec les méthodes classiques.

- **Partie IV** : raffinement par la borne critique et convergence stratifiée.

Référence implicite. Axiomatique du grain et Symétrie de résolution.

Notations communes. $L_\infty := 2\pi \cdot 2^{n_\infty}$, $\Delta x := \frac{2\pi}{2^{n_\infty}}$, st pour la projection standard, ι pour l'involution $X \mapsto 1/X$ (définie sur le groupe des unités $\tilde{\mathbb{R}}^\times = \{\pm 2^k\}$). On appelle $\tilde{\mathbb{R}}|_k$ la restriction ou le prolongement de $\tilde{\mathbb{R}}^+$ à $[0; 2^{+kn_\infty}]$.

Statut de $\tilde{\mathbb{R}}$. Conformément aux volets précédents, $\tilde{\mathbb{R}}$ est un *anneau commutatif unitaire intègre* (à opérations partielles), et non un corps. Ses seules unités sont les puissances de 2, $\tilde{\mathbb{R}}^\times = \{\pm 2^k\}$; le corps des réels est le quotient $\mathbb{R} = \tilde{\mathbb{R}}/\mathfrak{m}$ par l'idéal $\mathfrak{m}$ des infinitésimaux. *Conséquence pour ce volet* : la projection standard st est la promotion $\tilde{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$, et toute *division* par un contre-termes non-unité (contenant des facteurs 2π , $1/(p+1)$, $\zeta(q)$, etc.) s'entend dans $\mathbb{R}$ (ou dans le corps des fractions de $\tilde{\mathbb{R}}$), où ces éléments sont inversibles. En revanche, la division par une puissance de 2 (par exemple le contre-termes universel 2^{kn_∞} de la Partie IV) est licite *directement dans $\tilde{\mathbb{R}}$* , car 2^{kn_∞} est une unité.

Convention sur la stratification. On utilise la définition stricte $\tilde{\mathbb{R}}|_k$. En conséquence, un élément $c \cdot 2^{kn_\infty}$ avec c standard > 1 n'est *pas* dans $\tilde{\mathbb{R}}|_k$, mais bien dans $\tilde{\mathbb{R}}|_{k+1}$ (puisque $c \cdot 2^{kn_\infty} \leq 2^{n_\infty} \cdot 2^{kn_\infty} = 2^{(k+1)n_\infty}$). Cette précision est centrale pour les calculs de strate qui suivent.

4.1 Définition de l'intégrale stratifiée

4.1.1 Rappel : la double mosaïque de $\tilde{\mathbb{R}}^+$

$\tilde{\mathbb{R}}^+$ est le déploiement de C_1 à la résolution $-2n_\infty$, segment $[0, L_\infty[$ avec $L_\infty = 2\pi \cdot 2^{n_\infty}$, doté de la double stratification :

- **Niveau grossier** $(-n_\infty)$: 2^{n_∞} positions ordinales, chacune occupant une longueur 2π .

- **Niveau fin** $(-2n_\infty)$: 2^{2n_∞} sous-positions, chacune de finesse $\Delta x = \frac{2\pi}{2^{2n_\infty}}$.

On note $x_{N,j} := (N-1) \cdot 2\pi + j \cdot \Delta x$ et $\mathcal{X} := \{x_{N,j}\}$ l'ensemble des 2^{2n_∞} sous-positions de la mosaïque fine.

4.1.2 La fonction discrétisée

Définition 41 (Fonction admissible). *Une fonction $f : \tilde{\mathbb{R}} \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$ est admissible si elle est définie sur l'intervalle d'intégration considéré et si, pour toute sous-position $x_{N,j} \in \mathcal{X}$, $f(x_{N,j})$ est un élément bien défini de $\tilde{\mathbb{R}}$ (ou d'une extension finie de la hiérarchie auto-engendrée).*

4.1.3 L'intégrale stratifiée

Définition 42 (Intégrale stratifiée). *Soit f admissible et $[a, b]$ inclus dans $\tilde{\mathbb{R}}$ avec a, b aux positions de la mosaïque. L'intégrale stratifiée de f sur $[a, b]$ est*

$$\int_a^{\tilde{b}} f(x) dx := \sum_{x_{N,j} \in [a, b[} f(x_{N,j}) \cdot \Delta x.$$

Proposition 27 (Bonne définition). *Pour f admissible et $[a, b]$ borné dans $\tilde{\mathbb{R}}$, la somme est finie (au plus 2^{2n_∞} termes), donc bien définie comme élément d'une strate suffisamment haute de la hiérarchie auto-engendrée.*

4.1.4 Compatibilité avec l'intégrale classique

Théorème 25 (Compatibilité standard). *Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue Riemann-intégrable sur un intervalle standard $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Alors*

$$\int_a^{\tilde{b}} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \varepsilon$$

où ε est un infinitésimal. En particulier $\text{st}(\tilde{\int}_a^b f) = \int_a^b f$.

Démonstration. La somme de Riemann classique à pas Δx converge vers $\int_a^b f$ avec vitesse contrôlée : $|S_{\Delta x}(f) - \int_a^b f| \leq C\Delta x(b-a)$ pour une constante $C > 0$ liée au module de continuité de f sur le compact $[a, b]$.

Dans $\tilde{\mathbb{R}}$, $\Delta x = \frac{2\pi}{2^{n_\infty}}$ est un infinitésimal : $\text{st}(\Delta x) = 0$. C'est la seule propriété requise : $C\Delta x(b-a)$ est alors le produit d'un standard par un infinitésimal, donc infinitésimal. La somme de Riemann coïncide avec $\tilde{\int}$ sur les sous-positions de $[a, b]$, d'où le résultat. $\square$

Remarque 24 (Δx n'a pas à être inversible). On prendra garde à ne pas invoquer ici l'inversibilité de Δx . Sous la convention des volets précédents (unité multiplicative 1, unités = $\{\pm 2^k\}$), $\Delta x = 2\pi \cdot 2^{-n_\infty}$ n'est pas une unité de $\mathbb{R}$: son inverse $\frac{2^{n_\infty}}{2\pi}$ exigerait de diviser par 2π , qui n'est pas une puissance de 2 (c'est le même obstacle arithmétique que pour $3 \cdot 2^{-n_\infty}$). La preuve n'en a nul besoin : seule l'infinitésimalité de Δx intervient. La notion de « seuil d'inversibilité » ne concerne que les unités (puissances de 2) et n'a pas sa place dans cet argument.

4.1.5 Premiers exemples

Proposition 28 ($\tilde{\int} 1$ sur tout $\tilde{\mathbb{R}}^+$). $\tilde{\int}_0^{L_\infty} 1 dx = L_\infty = 2\pi \cdot 2^{n_\infty}$.

Démonstration. 2^{2n_∞} termes valant Δx chacun, soit $2^{2n_\infty} \cdot \frac{2\pi}{2^{n_\infty}} = 2\pi \cdot 2^{n_\infty} = L_\infty$. $\square$

Remarque 25 (Strate). $L_\infty = 2\pi \cdot 2^{n_\infty}$ a un préfacteur $2\pi > 1$ standard. Par la convention sur la stratification (introduction), $L_\infty \notin \tilde{\mathbb{R}}|_1$, mais $L_\infty \in \tilde{\mathbb{R}}|_2$ (puisque $2\pi < 2^{n_\infty}$, donc $L_\infty < 2^{2n_\infty}$).

L'intégrale de la fonction 1 sur tout $\tilde{\mathbb{R}}^+$ est donc dans $\tilde{\mathbb{R}}|_2$.

Proposition 29 ($\tilde{\int} x$ sur tout $\tilde{\mathbb{R}}^+$).

$$\tilde{\int}_0^{L_\infty} x dx = \frac{L_\infty^2}{2} + O(L_\infty \cdot \Delta x) \sim 2\pi^2 \cdot 2^{2n_\infty}.$$

Démonstration. Somme de Riemann pour $x \mapsto x : \sum_{i=0}^{N-1} i \Delta x \cdot \Delta x = \frac{N(N-1)}{2} \Delta x^2$ avec $N = 2^{2n_\infty}$. On obtient $\frac{(2^{2n_\infty})(2^{2n_\infty}-1)}{2} \cdot \frac{(2\pi)^2}{2^{2n_\infty}} = \frac{(2^{2n_\infty}-1)(2\pi)^2}{2} \sim 2\pi^2 \cdot 2^{2n_\infty}$. $\square$

Remarque 26 (Strate). $2\pi^2 \cdot 2^{2n_\infty}$ a un préfacteur $2\pi^2 \approx 19,74$ standard. Donc, par la convention, c'est dans $\mathbb{R}|_3$, pas $\mathbb{R}|_2$ (le préfacteur fait basculer d'une strate).

4.2 Hiérarchie des divergences

4.2.1 Strate de régularisation

Définition 43 (Strate de régularisation). Soit f admissible positive. La strate de régularisation de $\int f$, notée $\sigma(f)$, est le plus petit $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$\tilde{\int}_0^{L_\infty} f(x) dx \in \tilde{\mathbb{R}}|_k.$$

Remarque 27 (Choix de la dénomination). Le terme strate de régularisation reflète l'usage : $\sigma(f)$ est la profondeur stratale du contre-terme à utiliser pour ramener la valeur dans $\mathbb{R}$ (voir Partie III). Plutôt que de caractériser la fonction par un défaut, $\sigma(f)$ caractérise la ressource stratale nécessaire.

4.2.2 Divergences polynomiales

Proposition 30 (Polynômes de degré p). Soit $p \in \mathbb{N}^*$ standard. Alors

$$\tilde{\int}_0^{L_\infty} x^p dx = \frac{L_\infty^{p+1}}{p+1} + \varepsilon_p = \frac{(2\pi)^{p+1}}{p+1} \cdot 2^{(p+1)n_\infty} + \varepsilon_p,$$

avec ε_p d'ordre $L_\infty^p \cdot \Delta x$, donc strate strictement inférieure.

Strate stricte : le préfacteur $\frac{(2\pi)^{p+1}}{p+1}$ est standard > 1 pour $p \geq 1$, donc

$$\int_0^{L_\infty} x^p dx \in \widetilde{\mathbb{R}}|_{p+2}, \quad \sigma(x^p) = p + 2.$$

Démonstration. Calcul. Pour $x_i = i\Delta x$, la somme de Riemann vaut $\sum_{i=0}^{N-1} (i\Delta x)^p \Delta x = (\Delta x)^{p+1} \sum_{i=0}^{N-1} i^p$ avec $N = 2^{2n_\infty}$. La formule de Faulhaber donne $\sum i^p = \frac{N^{p+1}}{p+1} + \frac{N^p}{2} + O(N^{p-1})$. Donc

$$\int_0^{L_\infty} x^p dx = \frac{(N\Delta x)^{p+1}}{p+1} + \frac{N^p(\Delta x)^{p+1}}{2} + \dots$$

avec $N\Delta x = L_\infty$. Le terme dominant est $\frac{L_\infty^{p+1}}{p+1} = \frac{(2\pi)^{p+1}}{p+1} \cdot 2^{(p+1)n_\infty}$.

Strate. Le préfacteur $c_p := \frac{(2\pi)^{p+1}}{p+1}$ est standard. Pour $p = 1$, $c_1 = 2\pi^2 \approx 19,74 > 1$. Plus généralement, $c_p > 1$ pour tout $p \geq 0$. Donc $c_p \cdot 2^{(p+1)n_\infty} > 2^{(p+1)n_\infty}$, ce qui sort de $\widetilde{\mathbb{R}}|_{p+1}$. En revanche, $c_p \cdot 2^{(p+1)n_\infty} < 2^{n_\infty} \cdot 2^{(p+1)n_\infty} = 2^{(p+2)n_\infty}$ (puisque c_p est standard et 2^{n_∞} transfini), donc le résultat est dans $\widetilde{\mathbb{R}}|_{p+2}$.

Donc $\sigma(x^p) = p + 2$. □

Remarque 28 (Conséquence du décalage). *La convention stricte donne $\sigma(x) = 3$, $\sigma(x^2) = 4$, etc. Ce décalage par rapport à une lecture intuitive « par ordre de grandeur » (qui donnerait $\sigma = p + 1$) reflète le fait que les préfacteurs analytiques standards consomment une strate supplémentaire.*

4.2.3 Divergences inverses (UV)

Proposition 31 (Fonctions inverses). *Soit $q \in \mathbb{N}^*$ standard, $q \geq 1$. Alors*

$$\int_{\Delta x}^1 \frac{dx}{x^q} \sim \begin{cases} \zeta(q) \cdot 2^{(q-1)n_\infty} / (2\pi)^{q-1} & \text{si } q \geq 2, \\ n_\infty \cdot \ln 2 + O(1) & \text{si } q = 1. \end{cases}$$

Strates strictes :

- $q \geq 2$: le préfacteur $\zeta(q)/(2\pi)^{q-1}$ peut être > 1 ou < 1 selon q . Pour $q = 2$, $\zeta(2)/(2\pi) = \pi^2/6/(2\pi) = \pi/12 \approx 0,26 < 1$: le résultat est dans $\widetilde{\mathbb{R}}|_{q-1}$. Pour q grand, $\zeta(q) \rightarrow 1$ et $(2\pi)^{q-1} \rightarrow \infty$, donc toujours < 1 : reste dans $\widetilde{\mathbb{R}}|_{q-1}$.
- $q = 1$: préfacteur $\ln 2 \approx 0,69 < 1$ multipliant n_∞ , donc dans $\widetilde{\mathbb{R}}|_1$.

Démonstration. Cas $q \geq 2$. $\int_{\Delta x}^1 x^{-q} dx = \sum_{i=1}^{N_1} (i\Delta x)^{-q} \Delta x = (\Delta x)^{1-q} \sum_i i^{-q} \sim \zeta(q) \cdot (\Delta x)^{1-q}$ avec $N_1 = 1/\Delta x = 2^{n_\infty}/(2\pi)$. Donc $\sim \zeta(q) \cdot \frac{2^{(q-1)n_\infty}}{(2\pi)^{q-1}}$.

Cas $q = 1$. $\int_{\Delta x}^1 \frac{dx}{x} = \sum_{i=1}^{N_1} \frac{1}{i} \sim \ln N_1 = n_\infty \ln 2 - \ln(2\pi)$.

Strate dans le cas $q = 1$. Le résultat est $\sim \ln 2 \cdot n_\infty$ avec $\ln 2 < 1$ standard. Vérifions : $\ln 2 \cdot n_\infty < n_\infty$ mais > 0 , donc reste dans $\widetilde{\mathbb{R}}|_1$ (qui contient tout ce qui est $\leq 2^{n_\infty}$, et $n_\infty \ll 2^{n_\infty}$).

Strate dans le cas $q \geq 2$. Le préfacteur $\zeta(q)/(2\pi)^{q-1}$ est standard, calculons-le pour $q = 2, 3, 4$: $\pi^2/(12\pi) = \pi/12 \approx 0,26$ pour $q = 2$; $\zeta(3)/(4\pi^2) \approx 1,20/39,48 \approx 0,030$ pour $q = 3$. Tous < 1 . Donc le résultat reste $\leq 2^{(q-1)n_\infty}$, dans $\widetilde{\mathbb{R}}|_{q-1}$. $\square$

4.2.4 Divergences logarithmiques

Proposition 32 (Puissances du logarithme). *Soit $k \in \mathbb{N}$ standard. Alors*

$$\int_1^{\sim L_\infty} (\ln x)^k dx \sim L_\infty \cdot (\ln L_\infty)^k = (2\pi)(n_\infty \ln 2)^k \cdot 2^{n_\infty} + O(L_\infty (\ln L_\infty)^{k-1}).$$

Strate stricte : préfacteur global $2\pi \cdot (\ln 2)^k$ standard multipliant $n_\infty^k \cdot 2^{n_\infty}$. Pour $k = 0$ on a $2\pi > 1$, donc dans $\widetilde{\mathbb{R}}|_2$; pour $k \geq 1$ le facteur n_∞^k reste sous-stratal (élément de $\widetilde{\mathbb{R}}|_1$ pour k standard), donc l'ensemble reste dans $\widetilde{\mathbb{R}}|_2$.

Démonstration. $\int_1^L (\ln x)^k dx$ a pour terme dominant $L(\ln L)^k$ par intégration par parties. Pour $L = L_\infty$, $\ln L_\infty = \ln(2\pi) + n_\infty \ln 2 \sim n_\infty \ln 2$ (terme dominant). Donc $L_\infty (\ln L_\infty)^k \sim L_\infty (n_\infty \ln 2)^k = 2\pi \cdot (\ln 2)^k \cdot n_\infty^k \cdot 2^{n_\infty}$.

Strate. Pour k standard, $n_\infty^k \leq 2^{n_\infty}$ par les comparaisons fondamentales (*Axiomatique du grain*). Donc $n_\infty^k \cdot 2^{n_\infty} \leq 2^{2n_\infty}$, dans $\widetilde{\mathbb{R}}|_2$. Le préfacteur $2\pi(\ln 2)^k$ est standard et ne fait pas basculer si la borne 2^{2n_∞} n'est pas atteinte; pour k standard fixé, $n_\infty^k \ll 2^{n_\infty}$ donc le résultat reste effectivement $< 2^{2n_\infty}$, dans $\widetilde{\mathbb{R}}|_2$. $\square$

4.2.5 Divergences exponentielles

Proposition 33 (Exponentielle pure). *Soit $c > 0$ standard. Alors*

$$\int_0^{L_\infty} e^{cx} dx \sim \frac{e^{cL_\infty}}{c} = \frac{2^{\alpha \cdot 2^{n_\infty}}}{c}$$

avec $\alpha = c \cdot 2\pi / \ln 2$ standard.

Strate : l'exposant $\alpha \cdot 2^{n_\infty}$ dépasse kn_∞ pour tout k standard, donc $2^{\alpha \cdot 2^{n_\infty}}$ dépasse toutes les strates $\widetilde{\mathbb{R}}|_k$ de $\widetilde{\mathbb{R}}$. Le résultat est dans $\widetilde{\mathbb{R}}$ et au-delà.

Démonstration. $\int_0^L e^{cx} dx = (e^{cL} - 1)/c$. Pour $L = L_\infty = 2\pi \cdot 2^{n_\infty}$: $e^{cL_\infty} = e^{2\pi c \cdot 2^{n_\infty}} = 2^{(2\pi c / \ln 2) \cdot 2^{n_\infty}}$. L'exposant $\alpha \cdot 2^{n_\infty}$ avec α standard est dans $\widetilde{\mathbb{R}}|_1$. Donc $2^{\widetilde{\mathbb{R}}|_1}$ donne un objet hors de toutes les strates finies de $\widetilde{\mathbb{R}}$, dans $\widetilde{\mathbb{R}}$. $\square$

Corollaire 6 (L'exponentielle bascule au-delà de $\widetilde{\mathbb{R}}$). $\sigma(e^{cx}) = \infty$ (au sens : dépasse toute strate $\widetilde{\mathbb{R}}|_k$ de $\widetilde{\mathbb{R}}$).

4.3 Régularisation par projection

4.3.1 La projection standard comme régularisation

Définition 44 (Régularisation par projection). *Pour f admissible et $\tilde{f}f \in \tilde{\mathbb{R}}|_k$ avec $k \geq 1$,*

$$\text{Reg}_\sigma \left(\int f \right) := \text{st} \left(\frac{\tilde{\int}_0^{L_\infty} f(x) dx}{\lambda} \right),$$

où $\lambda \in \tilde{\mathbb{R}}|_k$ est un contre-terme choisi pour que le rapport tombe dans $\mathbb{R}$.

Remarque 29 (Où vit la division). *Le contre-terme λ (par exemple $\lambda_p = L_\infty^{p+1}/(p+1)$) porte en général des facteurs 2π et $1/(p+1)$: ce n'est pas une unité de l'anneau $\tilde{\mathbb{R}}$. Le quotient $\tilde{f}f/\lambda$ s'entend donc dans le corps $\mathbb{R} = \tilde{\mathbb{R}}/\mathfrak{m}$ (ou dans le corps des fractions de $\tilde{\mathbb{R}}$), où λ est inversible — ce que signale précisément l'opérateur st . La Partie IV lèvera cette réserve en remplaçant λ par le contre-terme universel 2^{kn_∞} , qui est une unité, rendant la division licite directement dans $\tilde{\mathbb{R}}$.*

4.3.2 Régularisation des divergences polynomiales

Théorème 26 (Régularisation polynomiale). *Soit $p \in \mathbb{N}^*$ standard et $\lambda_p := \frac{L_\infty^{p+1}}{p+1}$. Alors*

$$\text{Reg}_\sigma \left(\int_0^\infty x^p dx \right) = 1.$$

Démonstration. $\tilde{\int}_0^{L_\infty} x^p = \lambda_p + \varepsilon_p$ avec ε_p/λ_p infinitésimal. Donc $\tilde{f}/\lambda_p = 1 + \varepsilon_p/\lambda_p$, partie standard = 1. (Le rapport est pris dans $\mathbb{R}$, où λ_p est inversible ; voir la remarque ci-dessus.)

Note : λ_p comme $\tilde{\int}_0^{L_\infty} x^p$ sont tous deux dans $\tilde{\mathbb{R}}|_{p+2}$ (même strate), donc leur quotient a une partie standard dans $\tilde{\mathbb{R}}|_0 = \mathbb{R}$. $\square$

4.3.3 Régularisation des divergences logarithmiques

Théorème 27 (Régularisation logarithmique). $\text{Reg}_\sigma(\int_0^1 dx/x) = 1$ avec contre-terme $\lambda = n_\infty \ln 2$.

Démonstration. $\int_{\Delta x}^1 dx/x = n_\infty \ln 2 + O(1)$, donc divisé par $n_\infty \ln 2$ (dans $\mathbb{R}$) : $1 + O(1)/(n_\infty \ln 2)$. Le rapport $O(1)/n_\infty$ est infinitésimal, partie standard = 1. $\square$

4.4 Borne critique et convergence stratifiée

4.4.1 σ comme fonction de la borne

Définition 45 (Strate à borne B). $\sigma(f, B) :=$ plus petit k tel que $\tilde{\int}_0^B f \in \tilde{\mathbb{R}}|_k$.

La strate canonique $\sigma(f) := \sigma(f, L_\infty)$ de la Partie II est le cas particulier de borne maximale.

Proposition 34 (Croissance). Pour $f \geq 0$ et $B_1 \leq B_2$, $\sigma(f, B_1) \leq \sigma(f, B_2)$.

4.4.2 La borne critique

Définition 46 (Borne critique). Pour $f \geq 0$ admissible et $k \in \mathbb{N}$,

$$B_k(f) := \sup\{B : \sigma(f, B) \leq k\}.$$

4.4.3 Bornes critiques pour les classes principales

Théorème 28 (Bornes exponentielles). Pour $f(x) = e^x$,

$$B_k(e^x) = k \cdot n_\infty \ln 2 \quad \text{pour tout } k \geq 1.$$

Démonstration. $\int_0^B e^x dx = e^B - 1$. À $B = c \cdot n_\infty \ln 2$ avec c standard positif, $e^B = 2^{cn_\infty}$. Strate stricte : 2^{cn_∞} est dans $\widetilde{\mathbb{R}}|_k$ ssi $c \leq k$ (puisque $\widetilde{\mathbb{R}}|_k$ contient tout $\leq 2^{kn_\infty}$ et $2^{cn_\infty} \leq 2^{kn_\infty}$ ssi $c \leq k$). Donc $B_k(e^x) = kn_\infty \ln 2$. $\square$

Corollaire 7 (Convergence exponentielle dans $\widetilde{\mathbb{R}}$). $\int_0^B e^x dx \in \widetilde{\mathbb{R}}$ (strate finie de $\widetilde{\mathbb{R}}$) ssi $B \leq n_\infty \ln 2$. À $B = n_\infty \ln 2$ exactement, $\widetilde{\int} = 2^{n_\infty} - 1$, à la borne supérieure de $\widetilde{\mathbb{R}}|_1$.

Remarque 30 (Le gain conceptuel). *L'analyse classique dit : $\int_0^\infty e^x = \infty$. Notre cadre nuance : pour toute borne $B \leq n_\infty \ln 2$, l'intégrale est finie dans $\widetilde{\mathbb{R}}$. Au-delà, elle bascule dans des extensions successives selon $B/n_\infty \ln 2$.*

4.4.4 Hiérarchie de croissance par bornes critiques

Théorème 29 (Classification fine). 1. *Polynomial, logarithmique :*

B_k sature à L_∞ dès une strate finie (dépend du préfacteur standard, voir Partie II).

2. *Exponentiel :* $B_k(e^{cx}) = kn_\infty \ln 2/c$, linéaire en k .

3. *Double-exponentiel :* $B_k(e^{e^x}) \sim \ln(kn_\infty)$, logarithmique en k .

Démonstration. (2) Direct par théorème 28 avec cB remplaçant B .

(3) Pour $f = e^{e^x}$, on veut $e^{e^B} \leq 2^{kn_\infty}$, soit $e^B \leq kn_\infty \ln 2$, soit $B \leq \ln(kn_\infty \ln 2)$. Le terme dominant pour n_∞ grand est $\ln n_\infty$, qui reste sous n_∞ mais croît bien plus lentement. $\square$

4.4.5 Régularisation à la borne critique

La régularisation Reg_σ introduite plus haut requiert le choix d'un contre-terme λ de strate adéquate, qui peut ne pas être défini canoniquement (notamment pour les divergences exponentielles qui dépassent toutes les strates de $\widetilde{\mathbb{R}}$), et qui n'est en général pas une unité de l'anneau.

La notion de borne critique $B_k(f)$ (Partie IV) permet une régularisation alternative, plus uniforme, qui exploite directement la structure stratifiée — et dont le contre-terme 2^{kn_∞} est, lui, une *unité* de $\mathbb{R}$.

Définition 47 (Régularisation à la borne critique). *Pour f admissible positive et $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $B_k(f) > 0$,*

$$\text{Reg}_k(f) := \text{st} \left(\frac{1}{2^{kn_\infty}} \int_0^{\widetilde{\sim}^{B_k(f)}} f(x) dx \right).$$

Remarque 31 (Choix universel du contre-terme, et sa nature d'unité). *Le contre-terme est ici 2^{kn_∞} , la borne supérieure exacte de $\widetilde{\mathbb{R}}|_k$. C'est un choix universel, indépendant de f , ce qui distingue cette régularisation de Reg_σ où le contre-terme était adapté à chaque fonction. L'adaptation à f se fait ici via la borne critique $B_k(f)$ elle-même.*

De plus 2^{kn_∞} est une puissance de 2, donc une unité de $\widetilde{\mathbb{R}}$: la multiplication par $\frac{1}{2^{kn_\infty}} = 2^{-kn_\infty}$ est licite directement dans l'anneau (nul besoin de passer au corps des fractions). C'est un avantage structurel décisif de Reg_k sur Reg_σ : là où le contre-terme adapté λ (facteurs 2π , $1/(p+1)$) n'était inversible qu'après promotion à $\mathbb{R}$, le contre-terme universel 2^{kn_∞} est inversible dans $\widetilde{\mathbb{R}}$ même.

Théorème 30 (Théorème de régularisation universelle). *Pour toute fonction f admissible positive et tout $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $B_k(f)$ est non triviale, et telle que f est suffisamment régulière pour que $\int_0^{\widetilde{\sim}^{B_k(f)}} f$ atteigne la borne stratale au point critique, on a $\text{Reg}_k(f) = 1$.*

Démonstration. Par définition de la borne critique, $\int_0^{\widetilde{\sim}^{B_k(f)}} f \leq 2^{kn_\infty}$ avec égalité (ou quasi-égalité, à un infinitésimal près) à la borne. Sous l'hypothèse de régularité, on peut écrire

$$\int_0^{\widetilde{\sim}^{B_k(f)}} f(x) dx = 2^{kn_\infty} - \varepsilon_k$$

où ε_k est un élément dans une strate strictement inférieure à $\widetilde{\mathbb{R}}|_k$ (terme sous-dominant de l'intégrale ou correction à la borne).

Donc, en multipliant par l'unité 2^{-kn_∞} (licite dans l'anneau),

$$\frac{\int_0^{B_k(f)} f}{2^{kn_\infty}} = 1 - \frac{\varepsilon_k}{2^{kn_\infty}}.$$

Le rapport $\varepsilon_k/2^{kn_\infty}$ est infinitésimal (numérateur de strate inférieure, dénominateur à la borne de $\widetilde{\mathbb{R}}|_k$). Sa partie standard est 0, et $\text{Reg}_k(f) = \text{st}(1 - \text{inf}) = 1$. $\square$

Remarque 32 (Universalité et information dans les sous-dominants). *Le théorème 30 dit que Reg_k est trivialement universelle : elle vaut 1 pour toutes les fonctions admissibles. L'information spécifique à chaque fonction n'est pas dans $\text{Reg}_k(f)$ lui-même, mais dans les corrections sous-dominantes au 1, c'est-à-dire dans $\frac{\varepsilon_k}{2^{kn_\infty}}$ vu comme infinitésimal de $\widetilde{\mathbb{R}}$.*

Par analogie avec la régularisation dimensionnelle, où $1/\epsilon$ est trivialement universel mais les coefficients en facteur portent l'information physique, ce sont ici les sous-dominants qui distinguent les fonctions. Le développement systématique de ces sous-dominants serait l'analogue stratifié des développements en ϵ .

Corollaire 8 (Version standard, $k \in \mathbb{N}$).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^{B_k(f)} f(x) dx}{2^{kn}} = 1,$$

valable en particulier pour $k = 1$.

Corollaire 9 (Régularisation exponentielle). *Pour $f(x) = e^x$ avec $B_1(e^x) = n_\infty \ln 2$:*

$$\int_0^{n_\infty \ln 2} \frac{e^x}{2^{n_\infty}} dx = \frac{2^{n_\infty} - 1}{2^{n_\infty}} = 1 - \frac{1}{2^{n_\infty}},$$

donc $\text{Reg}_1(e^x) = 1$, avec sous-dominant $-1/2^{n_\infty}$. (Ici le contre-terme 2^{n_∞} est une unité : la division est exacte dans $\widetilde{\mathbb{R}}$, sans recours au corps des fractions.)

Chapitre 5

Principe de transfert

Avant-propos

Cette section formalise le pont entre $\widetilde{\mathbb{R}}$ (infini actuel, où n_∞ et 2^{n_∞} existent comme éléments) et $\mathbb{R}$ (infini potentiel, restriction standard de $\widetilde{\mathbb{R}}$). L'idée directrice : une certaine classe de propriétés se transfère *automatiquement* d'un cadre à l'autre.

Toutefois, cette transférabilité ne s'applique pas à toutes les formules. Les formules qui distinguent $\mathbb{R}$ de $\widetilde{\mathbb{R}}$ (comme « x est fini », « x est infinitésimal ») ne se transfèrent pas et produisent des paradoxes apparents. La section identifie précisément la classe transférable et démontre le théorème principal pour cette classe.

5.1 Langage formel et formules

Définition 48 (Langage des corps ordonnés). *Le langage formel $\mathcal{L}$ comprend :*

- *Des variables : $x, y, z, \dots$ représentant des éléments du corps étudié.*

- Des constantes : $0, 1$, et toute constante fixée par le contexte (par exemple 2π).
- Des symboles de fonction : $+, -, \cdot, ^{-1}$.
- Des symboles de relation : $=, <, \leq$.
- Des connecteurs : $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$.
- Des quantificateurs : $\forall x, \exists x$, où x parcourt l'univers entier du corps considéré.

Définition 49 (Formule). Une formule Fr est une expression syntaxiquement correcte construite à partir des éléments de $\mathcal{L}$, dont la valeur de vérité (VRAI ou FAUX) est déterminée par l'interprétation des symboles dans un corps donné.

Définition 50 (Formule transférable). Une formule Fr est dite transférable si elle est exprimable dans $\mathcal{L}$ sans constante ni prédicat qui distingue les éléments finis des éléments transfinis. Sont en particulier exclus :

- Les prédicats « x est fini », « x est infinitésimal », « x est standard ».
- Les quantifications restreintes aux entiers finis.
- Les références explicites à n_∞ ou 2^{n_∞} comme constantes nommées.

Une formule transférable peut faire intervenir des constantes générales du corps, des fonctions polynomiales et rationnelles, et des quantifications portant sur l'univers entier.

Remarque 33. La classe des formules transférables correspond aux formules du premier ordre dans le langage des corps ordonnés. C'est la classe pour laquelle un principe de transfert à la Łoś s'applique aux extensions non standard de $\mathbb{R}$.

5.2 Interprétations duales

Définition 51 (Interprétation dans $\tilde{\mathbb{R}}$ et $\mathbb{R}$). *Soit Fr une formule de $\mathcal{L}$.*

- $Fr^{\tilde{\mathbb{R}}}$ désigne l'interprétation de Fr dans $\tilde{\mathbb{R}}$: les variables parcourent $\tilde{\mathbb{R}}$, les opérations sont celles de $\tilde{\mathbb{R}}$ (avec leur caractère éventuellement partiel), les quantificateurs portent sur $\tilde{\mathbb{R}}$ entier.
- $Fr^{\mathbb{R}}$ désigne l'interprétation de Fr dans $\mathbb{R}$: les variables parcourent $\mathbb{R}$, les opérations sont totales, les quantificateurs portent sur $\mathbb{R}$ entier.

Fr est vraie dans $\tilde{\mathbb{R}}$ (resp. $\mathbb{R}$) si $Fr^{\tilde{\mathbb{R}}} = \text{VRAI}$ (resp. $Fr^{\mathbb{R}} = \text{VRAI}$) pour toutes affectations des variables libres.

Remarque 34 (Partialité). *Lorsque Fr contient une division et qu'on l'interprète dans $\tilde{\mathbb{R}}$, certaines évaluations peuvent être indéfinies. On convient que dans ce cas la formule est non évaluable (ni VRAI ni FAUX). Le théorème de transfert ci-dessous ne s'applique qu'aux formules dont toutes les évaluations sont définies dans les deux corps.*

5.3 Théorème de transfert

Théorème 31 (Transfert). *Soit Fr une formule transférable de $\mathcal{L}$ sans variable libre. Alors :*

$$Fr^{\tilde{\mathbb{R}}} = \text{VRAI} \iff Fr^{\mathbb{R}} = \text{VRAI}.$$

Équivalemment, par contraposition :

$$Fr^{\tilde{\mathbb{R}}} = \text{FAUX} \iff Fr^{\mathbb{R}} = \text{FAUX}.$$

Démonstration. La preuve procède par induction sur la complexité syntaxique de Fr .

Cas de base : formule atomique. Une formule atomique transférable est de la forme $t_1 = t_2$, $t_1 < t_2$ ou $t_1 \leq t_2$, où t_1, t_2 sont des termes polynomiaux ou rationnels en les variables, avec coefficients dans les constantes admises (donc dans $\mathbb{R}$, puisque n_∞ et 2^{n_∞} sont exclus comme constantes).

Pour de telles formules, l'interprétation dans $\mathbb{R}$ et dans $\tilde{\mathbb{R}}$ coïncide sur les valuations dans $\mathbb{R}$ (stabilité de $\mathbb{R}$ par les opérations polynomiales et l'ordre, établie en Partie IV de l'axiomatique). Si la formule est universellement vraie dans $\tilde{\mathbb{R}}$, elle l'est en particulier sur les valeurs de $\mathbb{R}$. Réciproquement, si elle est vraie pour toutes valeurs dans $\mathbb{R}$, l'extension aux valeurs de $\tilde{\mathbb{R}}$ se fait par densité de $\mathbb{R}$ dans $\tilde{\mathbb{R}}$ et continuité des opérations polynomiales.

Étape inductive : connecteurs. Si $Fr = Fr_1 \wedge Fr_2$, alors $Fr^{\tilde{\mathbb{R}}} = Fr_1^{\tilde{\mathbb{R}}} \wedge Fr_2^{\tilde{\mathbb{R}}}$, et par hypothèse d'induction sur Fr_1 et Fr_2 , cela équivaut à $Fr_1^{\mathbb{R}} \wedge Fr_2^{\mathbb{R}} = Fr^{\mathbb{R}}$. Idem pour $\vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$.

Étape inductive : quantificateurs. Si $Fr = \forall x Fr_1(x)$:

($\Rightarrow$) Si $Fr^{\tilde{\mathbb{R}}} = \text{VRAI}$, alors $Fr_1(x)$ vraie pour tout $x \in \tilde{\mathbb{R}}$; en particulier pour tout $x \in \mathbb{R} \subset \tilde{\mathbb{R}}$, donc $Fr^{\mathbb{R}} = \text{VRAI}$.

($\Leftarrow$) Si $Fr^{\mathbb{R}} = \text{VRAI}$, alors $Fr_1(x)$ vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit $a \in \tilde{\mathbb{R}}$. Si $a \in \mathbb{R}$, $Fr_1(a)$ vraie directement. Si $a \in \tilde{\mathbb{R}} \setminus \mathbb{R}$, on utilise le fait que pour toute formule transférable Fr_1 , l'ensemble $\{x \in \tilde{\mathbb{R}} : Fr_1(x)\}$ est défini par une combinaison booléenne d'inégalités polynomiales. Cet ensemble est définissable au premier ordre, et sa caractérisation par $\mathbb{R}$ détermine entièrement sa structure dans $\tilde{\mathbb{R}}$ par densité de $\mathbb{R}$ et continuité polynomiale.

Pour $\exists x Fr_1(x)$, on procède par contraposition à partir de $\forall x \neg Fr_1(x)$.

Conclusion. L'équivalence se propage par induction structurelle à toute formule transférable sans variable libre. $\square$

Remarque 35 (Densité). *La preuve repose sur le fait que $\mathbb{R}$ est dense dans $\tilde{\mathbb{R}}$ vis-à-vis des formules transférables. Une démonstration formelle nécessite la notion de partie standard : tout $a \in \tilde{\mathbb{R}}$ borné et non infini-*

tésimal admet une unique partie standard $\text{st}(a) \in \mathbb{R}$ telle que $a - \text{st}(a)$ soit infinitésimal. Cette construction est analogue à celle des hyperréels.

5.4 Exemples et contre-exemples

5.4.1 Exemples : formules transférables

Exemple 1 (Commutativité de l'addition). $Fr := \forall x \forall y (x + y = y + x)$.

Formule transférable. Vraie dans $\widetilde{\mathbb{R}}$ (Partie III de l'axiomatique) et dans $\mathbb{R}$ (Partie IV). Le théorème 31 garantit qu'il suffit de la démontrer dans l'un des cadres.

Exemple 2 (Inégalité polynomiale). $Fr := \forall x (x \cdot x \geq 0)$.

Formule transférable. Vraie dans $\mathbb{R}$, donc vraie dans $\widetilde{\mathbb{R}}$ par le théorème de transfert.

Exemple 3 (Existence d'une solution polynomiale). $Fr(a, b, c) := (a \neq 0 \wedge b \cdot b - 4 \cdot a \cdot c \geq 0) \rightarrow \exists x (a \cdot x \cdot x + b \cdot x + c = 0)$.

Transférable (l'existence d'une racine pour un trinôme à discriminant positif). Passe librement entre $\mathbb{R}$ et $\widetilde{\mathbb{R}}$.

5.4.2 Contre-exemples : formules non transférables

Contre-exemple 1 (Finitude). $Fr(x) := \ll x \text{ est fini} \gg$, formellement $\ll \exists n \in \mathbb{N} \text{ fini}, |x| < n \gg$.

Quantification restreinte aux entiers finis, donc non transférable.

— Dans $\mathbb{R}$: $Fr(x)$ vraie pour tout x .

— Dans $\widetilde{\mathbb{R}}$: $Fr(2^{n\infty}) = \text{FAUX}$.

Le transfert échoue.

Contre-exemple 2 (Propriété archimédienne). $Fr := \forall x (\exists n \in \mathbb{N} \text{ fini}, x < n)$.

Vraie dans $\mathbb{R}$, fausse dans $\widetilde{\mathbb{R}}$ (non archimédien : aucun entier fini ne majore $2^{n\infty}$).

Contre-exemple 3 (Non-existence d'infinitésimal). $Fr := \forall x (x > 0 \rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \text{ fini}, x > 1/n)$.

Vraie dans $\mathbb{R}$, fausse dans $\tilde{\mathbb{R}}$: les infinitésimaux non nuls positifs sont plus petits que tout $1/n$ avec n fini.

Remarque 36 (Diagnostic général). *Les contre-exemples partagent une structure commune : une quantification explicite ou implicite sur les entiers finis apparaît dans la formule. C'est précisément ce que la définition 50 exclut. Une fois ces formules écartées, le théorème 31 s'applique sans paradoxe.*

5.5 Corollaires applicatifs

Corollaire 10 (Identités algébriques). *Toute identité polynomiale, ou tout énoncé universel à coefficients standards sur les corps ordonnés, vrai dans $\mathbb{R}$ est vrai dans $\tilde{\mathbb{R}}$, et inversement. En particulier, identités remarquables, factorisations, et règles de calcul algébriques sont valides indifféremment dans les deux corps.*

Corollaire 11 (Compatibilité des solutions polynomiales). *Pour toute équation polynomiale $P(x_1, \dots, x_n) = 0$ ou inéquation $P(x_1, \dots, x_n) < 0$ à coefficients standards, l'ensemble des solutions dans $\tilde{\mathbb{R}}$ est l'extension naturelle de l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$: à infinitésimaux près, les solutions se correspondent.*

Corollaire 12 (Transfert des théorèmes algébriques). *Tout théorème énonçable comme une formule du premier ordre transférable, démontré dans $\mathbb{R}$, est automatiquement valable dans $\tilde{\mathbb{R}}$ (et inversement). On peut donc importer librement les résultats classiques de l'algèbre des corps ordonnés.*

5.6 Application aux suites et limites

L'application qui motivait votre intuition initiale concerne le passage de propriétés vraies « le long d'une suite » à des propriétés vraies « à la limite ». Voici comment la formuler proprement, dans le cadre du théorème de transfert.

Définition 52 (Suite et limite). *Une suite classique dans $\mathbb{R}$ est une fonction $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \mapsto u_n$. Une suite étendue dans $\tilde{\mathbb{R}}$ est une fonction $u^* : \tilde{\mathbb{N}}_1 \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$.*

Une suite classique (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Proposition 35 (Caractérisation non standard de la limite). *Soit (u_n) une suite classique dans $\mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R}$, et (u_n^*) un prolongement à $\tilde{\mathbb{N}}_1$ (i.e. $u_n^* = u_n$ pour $n \in \mathbb{N}$). Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. (u_n) converge vers ℓ au sens classique.
2. $u_n^* - \ell$ est infinitésimal pour tout $n \in \tilde{\mathbb{N}}_1 \setminus \mathbb{N}$.

Démonstration. (1) $\Rightarrow$ (2) : Soit $\varepsilon > 0$ infinitésimal positif. Par hypothèse (1), pour tout $\varepsilon' > 0$ standard, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - \ell| < \varepsilon'$ pour tout $n \geq n_0$ standard. Pour $n \in \tilde{\mathbb{N}}_1 \setminus \mathbb{N}$, n est plus grand que tout entier standard, donc $|u_n^* - \ell| < \varepsilon'$ pour tout $\varepsilon' > 0$ standard, ce qui signifie $u_n^* - \ell$ infinitésimal.

(2) $\Rightarrow$ (1) : Par contraposition. Si (u_n) ne converge pas vers ℓ , il existe $\varepsilon_0 > 0$ standard et une sous-suite (u_{n_k}) telle que $|u_{n_k} - \ell| \geq \varepsilon_0$ pour tout k . On prolonge cette sous-suite à un indice transfini $n^* \in \tilde{\mathbb{N}}_1 \setminus \mathbb{N}$, et $|u_{n^*}^* - \ell| \geq \varepsilon_0$ n'est pas infinitésimal. Contradiction avec (2). $\square$

Corollaire 13 (Limite et propriétés transférables). *Soit (u_n) une suite classique convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$. Soit $Fr(x)$ une formule transférable à une variable libre. Si $Fr(u_n) = \text{VRAI}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et si Fr est*

continue en ℓ (au sens où l'ensemble $\{x : Fr(x)\}$ est fermé contenant les u_n), alors $Fr(\ell) = \text{VRAI}$.

Démonstration. Par le théorème 31 appliqué à Fr : si $Fr(u_n) = \text{VRAI}$ pour tout $u_n \in \mathbb{R}$, alors pour tout prolongement u_n^* avec $u_n^* \in \tilde{\mathbb{R}}$, $Fr(u_n^*) = \text{VRAI}$. Par la proposition 35, $u_n^* \approx \ell$ pour $n \in \tilde{\mathbb{N}}_1 \setminus \mathbb{N}$ (infinitésimalement proche). Par continuité de Fr en ℓ (l'ensemble $\{x : Fr(x)\}$ étant fermé contenant u_n^* infinitésimalement proche de ℓ), on a $Fr(\ell) = \text{VRAI}$. $\square$

Remarque 37 (Distinction avec votre énoncé initial). *Votre intuition initiale — « si $Fr(u_n \rightarrow \ell) = \text{VRAI}$ alors $Fr(\ell) = \text{VRAI}$ » — correspond précisément au corollaire 13, à condition d'ajouter deux hypothèses manquantes : (i) Fr doit être transférable (exclure « être fini », « être infinitésimal », etc.), et (ii) Fr doit être continue en ℓ (sinon la limite peut ne pas hériter de la propriété, comme « être rationnel » qui n'est pas continue).*

5.7 Synthèse

- Le principe de transfert n'est valable que pour les formules du premier ordre dans le langage des corps ordonnés *sans référence à la finitude*.
- Quand il est valable, il fournit une équivalence parfaite entre les deux directions : vrai dans $\tilde{\mathbb{R}}$ équivaut à vrai dans $\mathbb{R}$. Les énoncés T1 et T2 de votre brouillon sont logiquement équivalents par contraposition et forment un seul théorème.
- L'application aux suites et limites se fait via la proposition 35 (caractérisation non standard) et le corollaire 13 (passage de propriétés transférables et continues à la limite). Ces résultats récupèrent l'intuition initiale dans un cadre rigoureux.

- Le pont entre $\mathbb{R}$ et $\widetilde{\mathbb{R}}$ établi ici prépare l'analyse à venir : continuité, dérivation, intégration peuvent être abordées indifféremment dans l'un des deux corps, à condition de rester dans la classe transférable.

5.8 Points laissés ouverts

1. **Densité de $\mathbb{R}$ dans $\widetilde{\mathbb{R}}$.** La preuve du théorème de transfert repose sur la densité ; une démonstration formelle de cette densité, via la construction de la partie standard, reste à rédiger en détail.
2. **Extension à d'autres structures.** Le théorème ne traite que des corps ordonnés. Une version pour les structures plus riches (anneaux topologiques, espaces métriques) demanderait à enrichir le langage $\mathcal{L}$.
3. **Comparaison avec les hyperréels et les surréels.** Le principe ici est analogue au principe de transfert de Łoś pour les hyperréels (Robinson) ; une comparaison formelle aiderait à situer $\mathbb{R}$ dans le paysage des extensions non archimédiennes.

Chapitre 6

Partie standard et analyse dans $\widetilde{\mathbb{R}}$

Introduction

Le théorème de transfert établit une correspondance logique entre $\widetilde{\mathbb{R}}$ et $\mathbb{R}$ pour les formules transférables. Pour calculer effectivement avec les limites, il faut un *pont opérationnel* : un outil qui, à un objet de $\widetilde{\mathbb{R}}$, associe un objet de $\mathbb{R}$ représentant sa « valeur limite ». C'est le rôle de la *partie standard*.

Ce chapitre construit la partie standard, démontre ses propriétés algébriques fondamentales, puis l'applique à trois objets centraux de l'analyse : la dérivée, l'intégrale, et les séries numériques. Le formalisme ε - δ est remplacé par un calcul direct sur des infinitésimaux concrets.

6.1 Halo et monade

Définition 53 (Relation d'infinitésimale proximité). *Pour $a, b \in \widetilde{\mathbb{R}}$, on dit que a est infinitésimalement proche de b , noté $a \approx b$, si $a - b$ est*

infinitésimal au sens de la définition d'élément standard (Partie IV de l'axiomatique) : soit $a = b$, soit il n'existe aucun $m \in \mathbb{N}$ fini tel que $|a - b| > 2^{-m}$.

Proposition 36 (Relation d'équivalence). *$\approx$ est une relation d'équivalence sur $\widetilde{\mathbb{R}}$.*

Démonstration. Réflexivité. $a - a = 0$, infinitésimal (par convention 0 est infinitésimal au sens large).

Symétrie. Si $a - b$ infinitésimal, alors $b - a = -(a - b)$ aussi, puisque $|(a - b)| = |b - a|$.

Transitivité. Si $a - b$ et $b - c$ infinitésimaux, alors $|a - c| \leq |a - b| + |b - c|$. Si $|a - c| > 2^{-m}$ pour un m fini, alors $|a - b| + |b - c| > 2^{-m}$, donc l'un au moins des deux dépasse 2^{-m-1} , contredisant l'infinitésimalité. Donc $|a - c| \leq 2^{-m}$ pour tout m fini, et $a - c$ est infinitésimal. $\square$

Définition 54 (Halo, monade). *Pour $a \in \widetilde{\mathbb{R}}$, le halo (ou monade) de a est*

$$\mu(a) := \{x \in \widetilde{\mathbb{R}} : x \approx a\}.$$

Remarque 38. *Le halo d'un élément standard $r \in \mathbb{R}$ contient r et tous les éléments $r + \varepsilon$ avec ε infinitésimal. Le halo d'un élément infiniment grand contient ce dernier et tous les éléments qui en diffèrent par un infinitésimal — mais reste tout entier dans la zone non standard.*

Définition 55 (Élément limité). *Un élément $a \in \widetilde{\mathbb{R}}$ est dit limité s'il existe $m \in \mathbb{N}$ fini tel que $|a| < 2^m$. Sinon a est dit illimité.*

Remarque 39. — *Tout élément standard est limité (par définition).*

- *Tout élément limité a un halo qui rencontre $\mathbb{R}$ (théorème suivant).*
- *Les illimités forment une zone disjointe de $\mathbb{R}$; leurs halos ne rencontrent jamais $\mathbb{R}$.*

6.2 Théorème de la partie standard

Théorème 32 (Existence et unicité de la partie standard). *Pour tout $a \in \widetilde{\mathbb{R}}$ limité, il existe un unique $r \in \mathbb{R}$ tel que $a \approx r$. On note $\text{st}(a) := r$ et on l'appelle la partie standard de a .*

Démonstration. Unicité. Si $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ vérifient $a \approx r_1$ et $a \approx r_2$, alors par transitivité $r_1 \approx r_2$, donc $r_1 - r_2$ est infinitésimal. Mais $r_1 - r_2 \in \mathbb{R}$ (stabilité par soustraction); et un élément de $\mathbb{R}$ infinitésimal est nécessairement 0 (sinon, par définition d'élément standard, $r_1 - r_2$ serait non infinitésimal, contradiction). Donc $r_1 = r_2$.

Existence. Soit $a \in \widetilde{\mathbb{R}}$ limité, $|a| < 2^m$ pour un $m \in \mathbb{N}$. Considérons l'ensemble

$$L := \{q \in \mathbb{Q} : q \leq a\}.$$

L est une partie de $\mathbb{Q}$, non vide (contient -2^m), majorée (par 2^m). Par construction classique de $\mathbb{R}$ (coupures, ou borne supérieure), L détermine un unique réel $r := \sup L \in \mathbb{R}$.

Montrons $a \approx r$. Supposons $a - r$ non infinitésimal : $|a - r| > 2^{-m'}$ pour un $m' \in \mathbb{N}$ fini.

Cas 1 : $a > r + 2^{-m'}$. Alors il existe $q \in \mathbb{Q}$ avec $r < q < r + 2^{-m'} < a$. Par définition de L , $q \in L$, mais $q > r = \sup L$, contradiction.

Cas 2 : $a < r - 2^{-m'}$. Alors pour tout $q \in L$, $q \leq a < r - 2^{-m'}$, donc $r - 2^{-m'}$ est un majorant de L , plus petit que $r = \sup L$, contradiction.

Donc $|a - r| \leq 2^{-m'}$ pour tout $m' \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire $a \approx r$. $\square$

Remarque 40 (Cas illimité). *Si $a \in \widetilde{\mathbb{R}}$ est illimité (par exemple $a = 2^{n\infty}$), $\text{st}(a)$ n'est pas défini dans $\mathbb{R}$. On peut convenir $\text{st}(a) = +\infty$ ou $-\infty$ selon le signe, mais ce n'est plus un élément de $\mathbb{R}$: c'est une notation analogue à celle des limites infinies en analyse classique.*

6.3 Propriétés algébriques

Proposition 37 (Compatibilité avec les opérations). *Soient $a, b \in \widetilde{\mathbb{R}}$ limités. Alors :*

1. $\text{st}(a + b) = \text{st}(a) + \text{st}(b)$.
2. $\text{st}(a - b) = \text{st}(a) - \text{st}(b)$.
3. $\text{st}(a \cdot b) = \text{st}(a) \cdot \text{st}(b)$.
4. Si $\text{st}(b) \neq 0$, alors b n'est pas infinitésimal et $\text{st}(a/b) = \text{st}(a)/\text{st}(b)$.

Démonstration. Posons $r = \text{st}(a)$, $s = \text{st}(b)$, donc $a = r + \alpha$ et $b = s + \beta$ avec α, β infinitésimaux.

(1) $a + b = (r + s) + (\alpha + \beta)$. La somme de deux infinitésimaux est infinitésimale (preuve : si $\alpha + \beta$ non infinitésimal, $|\alpha + \beta| > 2^{-m}$ pour un m fini, donc $|\alpha| + |\beta| > 2^{-m}$, donc l'un des deux $> 2^{-m-1}$, contradiction). Donc $a + b \approx r + s$, et par unicité $\text{st}(a + b) = r + s$.

(2) Idem en posant $-b$ à la place de b et utilisant la symétrie.

(3) $a \cdot b = (r + \alpha)(s + \beta) = rs + r\beta + s\alpha + \alpha\beta$. Reste à montrer que $r\beta + s\alpha + \alpha\beta$ est infinitésimal. $r\beta$ est infinitésimal (un standard fois un infinitésimal reste infinitésimal : si $|r\beta| > 2^{-m}$ alors $|\beta| > 2^{-m}/|r| \geq 2^{-m-m'}$ avec $|r| < 2^{m'}$, contradiction). De même $s\alpha$ infinitésimal. $\alpha\beta$: $|\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta| \leq |\alpha|$ si $|\beta| \leq 1$ (ce qui est le cas pour un infinitésimal), donc infinitésimal. Somme de trois infinitésimaux donc infinitésimale.

(4) Si $\text{st}(b) = s \neq 0$, alors $|s| > 2^{-m}$ pour un m fini, donc $|b| = |s + \beta| \geq |s| - |\beta| > 2^{-m} - 2^{-m-1} = 2^{-m-1}$ pour β assez petit, donc b non infinitésimal et b^{-1} existe dans $\widetilde{\mathbb{R}}$. Il reste à montrer $\text{st}(a/b) = r/s$.

$\frac{a}{b} - \frac{r}{s} = \frac{as - br}{bs} = \frac{(r+\alpha)s - (s+\beta)r}{bs} = \frac{s\alpha - r\beta}{bs}$. Le numérateur est infinitésimal (combinaison linéaire d'infinitésimaux avec coefficients limités), et bs est limité non infinitésimal, donc le quotient est infinitésimal. Donc $a/b \approx r/s$. $\square$

Proposition 38 (Compatibilité avec l'ordre, version faible). *Soient $a, b \in \widetilde{\mathbb{R}}$ limités. Si $a \leq b$, alors $\text{st}(a) \leq \text{st}(b)$.*

Démonstration. Soient $r = \text{st}(a)$, $s = \text{st}(b)$, $a = r + \alpha$, $b = s + \beta$ avec α, β infinitésimaux. $a \leq b$ entraîne $r - s \leq \beta - \alpha$. Si $r > s$ (donc $r - s > 0$ standard), $r - s > 2^{-m}$ pour un m fini, mais $\beta - \alpha$ infinitésimal donc $|\beta - \alpha| < 2^{-m}$; contradiction. Donc $r \leq s$. $\square$

Remarque 41 (Inégalité stricte non préservée). *L'inégalité stricte $a < b$ ne donne pas $\text{st}(a) < \text{st}(b)$ en général. Par exemple, $0 < 1/n_\infty$ dans $\tilde{\mathbb{R}}$, mais $\text{st}(0) = 0 = \text{st}(1/n_\infty)$.*

6.4 La partie standard comme morphisme d'anneau

Définition 56 (Sous-anneau des limités). $\tilde{\mathbb{R}}_\ell := \{a \in \tilde{\mathbb{R}} : a \text{ limité}\}$ est l'ensemble des éléments limités.

Proposition 39 (Structure). $\tilde{\mathbb{R}}_\ell$ est un sous-anneau de $\tilde{\mathbb{R}}$ contenant $\mathbb{R}$.

Démonstration. $0, 1 \in \tilde{\mathbb{R}}_\ell$. Si a, b limités avec $|a|, |b| < 2^m$, alors $|a+b| < 2^{m+1}$ et $|a \cdot b| < 2^{2m}$, donc $a + b$ et $a \cdot b$ sont limités. L'inclusion $\mathbb{R} \subset \tilde{\mathbb{R}}_\ell$ est par définition. $\square$

Théorème 33 (Partie standard comme morphisme). *L'application $\text{st} : \tilde{\mathbb{R}}_\ell \rightarrow \mathbb{R}$ est un morphisme d'anneaux surjectif. Son noyau est l'idéal des infinitésimaux :*

$$\ker(\text{st}) = \{a \in \tilde{\mathbb{R}}_\ell : a \text{ infinitésimal}\}.$$

Démonstration. Morphisme. Conséquence de la proposition 37.

Surjectivité. Pour tout $r \in \mathbb{R}$, r lui-même est dans $\tilde{\mathbb{R}}_\ell$ (puisque $\mathbb{R} \subset \tilde{\mathbb{R}}_\ell$) et $\text{st}(r) = r$.

Noyau. $\text{st}(a) = 0$ ssi $a \approx 0$ ssi a infinitésimal. L'ensemble des infinitésimaux est un idéal : stable par addition (preuve dans 37), et si a infinitésimal et $b \in \tilde{\mathbb{R}}_\ell$, ab infinitésimal (idem). $\square$

Corollaire 14 (Décomposition canonique). *Tout $a \in \widetilde{\mathbb{R}}_\ell$ s'écrit de manière unique*

$$a = \text{st}(a) + \varepsilon$$

avec $\text{st}(a) \in \mathbb{R}$ et ε infinitésimal. La partie $\text{st}(a)$ est la valeur classique, et ε la fluctuation non standard.

6.5 Application aux limites de suites

Théorème 34 (Critère non standard de convergence). *Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite classique dans $\mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Soit $(u_n^*)_{n \in \widetilde{\mathbb{N}}_1}$ un prolongement à $\widetilde{\mathbb{N}}_1$ (avec $u_n^* = u_n$ pour $n \in \mathbb{N}$, et pour n transfini, u_n^* est l'évaluation naturelle de la formule définissant u_n). Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. $u_n \rightarrow \ell$ au sens classique.
2. Pour tout $n \in \widetilde{\mathbb{N}}_1 \setminus \mathbb{N}$, u_n^* est limité et $\text{st}(u_n^*) = \ell$.

Démonstration. (1) $\Rightarrow$ (2) : Si $u_n \rightarrow \ell$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ standard, $|u_n - \ell| < \varepsilon$ à partir d'un rang n_0 standard. Pour $n \in \widetilde{\mathbb{N}}_1 \setminus \mathbb{N}$, $n > n_0$, donc $|u_n^* - \ell| < \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$ standard. Cela signifie $u_n^* \approx \ell$, c'est-à-dire u_n^* limité (puisque proche de $\ell \in \mathbb{R}$) et $\text{st}(u_n^*) = \ell$.

(2) $\Rightarrow$ (1) : Contraposition. Si $u_n \not\rightarrow \ell$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ standard et une sous-suite (u_{n_k}) avec $|u_{n_k} - \ell| \geq \varepsilon_0$ pour tout k . Pour un indice transfini n^* , on a $|u_{n^*}^* - \ell| \geq \varepsilon_0$, donc $u_{n^*}^* - \ell$ n'est pas infinitésimal, et $\text{st}(u_{n^*}^*) \neq \ell$. □

Exemple 4 (Suite géométrique). $u_n = 1/2^n$, $\ell = 0$. Pour n transfini, $u_n^* = 1/2^n$ est infinitésimal non nul, donc limité avec $\text{st}(1/2^n) = 0 = \ell$. Le critère est vérifié, on retrouve $u_n \rightarrow 0$.

Exemple 5 (Suite divergente vers $+\infty$). $u_n = n$. Pour $n = n_\infty$, $u_n^* = n_\infty$ illimité. st non défini : la suite ne converge pas dans $\mathbb{R}$. On retrouve la divergence vers $+\infty$.

Exemple 6 (Forme indéterminée résolue). $u_n = n + 1/n$, $v_n = n$. Classiquement $u_n - v_n \rightarrow 0$ (forme $\infty - \infty$ résolue par calcul). En non standard, pour $n = n_\infty$:

$$u_{n_\infty}^* - v_{n_\infty}^* = (n_\infty + 1/n_\infty) - n_\infty = 1/n_\infty,$$

infinitésimal explicite. $\text{st}(1/n_\infty) = 0$. La forme indéterminée est résolue par calcul direct, sans recours à un théorème de formes indéterminées.

6.6 Application à la dérivée

Définition 57 (Dérivée non standard). Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction classique, prolongée naturellement à $\widetilde{\mathbb{R}}$ par les mêmes formules (si f est polynomiale, rationnelle, ou définie par une formule transférable). Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. La dérivée non standard de f en x_0 est

$$f'(x_0) := \text{st} \left(\frac{f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)}{\varepsilon} \right)$$

pour tout infinitésimal non nul ε , à condition que cette partie standard existe et soit indépendante du choix de ε .

Exemple 7 (Dérivée de x^2). $f(x) = x^2$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, ε infinitésimal non nul.

$$\frac{(x_0 + \varepsilon)^2 - x_0^2}{\varepsilon} = \frac{2x_0\varepsilon + \varepsilon^2}{\varepsilon} = 2x_0 + \varepsilon.$$

$\text{st}(2x_0 + \varepsilon) = 2x_0$ (proposition 37). Donc $f'(x_0) = 2x_0$ pour tout x_0 .

Exemple 8 (Dérivée d'une fonction rationnelle). $f(x) = 1/x$ pour $x \neq 0$. Soit $x_0 \neq 0$ standard, ε infinitésimal non nul.

$$\frac{1/(x_0 + \varepsilon) - 1/x_0}{\varepsilon} = \frac{x_0 - (x_0 + \varepsilon)}{\varepsilon \cdot x_0 \cdot (x_0 + \varepsilon)} = \frac{-1}{x_0(x_0 + \varepsilon)}.$$

$\text{st} \left(\frac{-1}{x_0(x_0 + \varepsilon)} \right) = \frac{-1}{x_0 \cdot x_0} = -1/x_0^2$ (par proposition 37, le quotient est limité car $x_0 \neq 0$). Donc $f'(x_0) = -1/x_0^2$.

Théorème 35 (Équivalence avec la dérivée classique). *Soit f une fonction définie par une formule transférable au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$. f est dérivable en x_0 au sens classique avec dérivée $f'(x_0) = L$ si et seulement si pour tout infinitésimal non nul ε ,*

$$\frac{f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)}{\varepsilon} \approx L.$$

Démonstration. f dérivable au sens classique signifie $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = L$. En appliquant le théorème 34 à la fonction $h \mapsto \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ avec $h \rightarrow 0$ (en prenant h infinitésimal non nul), on obtient l'équivalence. $\square$

6.7 Application à l'intégrale

Définition 58 (Intégrale non standard). *Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, $a, b \in \mathbb{R}$ standards, $a < b$. Soit $N \in \widetilde{\mathbb{N}}_1 \setminus \mathbb{N}$ (entier transfini) et $h := (b - a)/N$ (infinitésimal positif). On définit la somme de Riemann non standard :*

$$S_N := \sum_{k=1}^N f(a + kh) \cdot h.$$

L'intégrale non standard de f sur $[a, b]$ est :

$$\int_a^b f := \text{st}(S_N),$$

pourvu que cette partie standard existe et soit indépendante du choix de N .

Remarque 42 (Sommatation transfinie). *La somme $\sum_{k=1}^N$ avec N transfini est bien définie : c'est une juxtaposition de N termes, chaque terme étant un élément de $\widetilde{\mathbb{R}}$. Le résultat est dans $\widetilde{\mathbb{R}}$ par clôture additive (à condition de rester dans la borne $2\pi \cdot 2^{n_\infty}$, ce qui est assuré ici car $S_N \approx \int_a^b f$ est limité dès que f est bornée).*

Exemple 9 (Intégrale de x sur $[0, 1]$). $f(x) = x$, $[a, b] = [0, 1]$, N transfini, $h = 1/N$.

$$S_N = \sum_{k=1}^N (kh) \cdot h = h^2 \sum_{k=1}^N k = h^2 \cdot \frac{N(N+1)}{2} = \frac{N+1}{2N} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2N}.$$

$\text{st}(1/2 + 1/(2N)) = 1/2$ (puisque $1/(2N)$ est infinitésimal). Donc $\int_0^1 x \, dx = 1/2$, comme prévu.

Exemple 10 (Intégrale de x^2 sur $[0, 1]$). $f(x) = x^2$, $h = 1/N$.

$$S_N = \sum_{k=1}^N (kh)^2 \cdot h = h^3 \sum_{k=1}^N k^2 = h^3 \cdot \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}.$$

Avec $h = 1/N$, $h^3 \cdot N(N+1)(2N+1)/6 = \frac{(N+1)(2N+1)}{6N^2}$.

$$= \frac{2N^2 + 3N + 1}{6N^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2N} + \frac{1}{6N^2}.$$

st de cette expression $= 1/3$. Donc $\int_0^1 x^2 \, dx = 1/3$.

Théorème 36 (Équivalence avec l'intégrale de Riemann). Si f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$, l'intégrale non standard de 58 coïncide avec l'intégrale de Riemann classique.

Démonstration. Pour f Riemann-intégrable, les sommes de Riemann à pas standard convergent vers l'intégrale classique. Par le théorème 34, les sommes à pas infinitésimal $h = (b-a)/N$ vérifient $S_N \approx \int_a^b f$ au sens classique. Donc $\text{st}(S_N) = \int_a^b f$. $\square$

6.8 Application aux séries numériques

Définition 59 (Série non standard). Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite classique dans $\mathbb{R}$. La somme partielle non standard d'ordre $N \in \widetilde{\mathbb{N}}_1$ est

$$S_N := \sum_{n=1}^N a_n.$$

La série $\sum a_n$ est dite convergente de somme $S \in \mathbb{R}$ si pour tout $N \in \widetilde{\mathbb{N}}_1 \setminus \mathbb{N}$, S_N est limité et $\text{st}(S_N) = S$.

Théorème 37 (Équivalence avec la convergence classique). Cette définition coïncide avec la convergence classique des séries.

Démonstration. Application directe du théorème 34 à la suite des sommes partielles. $\square$

Exemple 11 (Série géométrique). Soit $|r| < 1$ standard. $\sum_{n=0}^N r^n = \frac{1-r^{N+1}}{1-r}$. Pour N transfini et $|r| < 1$, r^{N+1} est infinitésimal (puisque $|r|^{N+1} \rightarrow 0$ classiquement, ce qui se traduit par $r^{N+1} \approx 0$ pour N transfini par le critère). Donc $S_N \approx \frac{1-0}{1-r} = \frac{1}{1-r}$. La somme est $\frac{1}{1-r}$.

Exemple 12 (Série harmonique). $a_n = 1/n$, $S_N = \sum_{n=1}^N 1/n$. Pour N transfini, $S_N \approx \ln(N) + \gamma$ (où γ est la constante d'Euler-Mascheroni), qui est illimité car $\ln(N)$ illimité. Donc $\text{st}(S_N)$ non défini : la série diverge.

6.9 Continuité non standard

Définition 60 (Continuité non standard). Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par une formule transférable. f est dite continue en $x_0 \in \mathbb{R}$ si pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec $x \approx x_0$, on a $f(x) \approx f(x_0)$.

Théorème 38 (Équivalence avec la continuité classique). *Cette définition coïncide avec la continuité classique ε - δ .*

Démonstration. ($\Leftarrow$, classique vers non standard). Soit f continue en x_0 au sens classique et $x \approx x_0$. Pour tout $\varepsilon > 0$ standard, il existe $\delta > 0$ standard tel que $|y - x_0| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x_0)| < \varepsilon$. En particulier pour $y = x$ (avec $|x - x_0|$ infinitésimal donc $< \delta$), $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Comme cela vaut pour tout $\varepsilon > 0$ standard, $f(x) \approx f(x_0)$.

($\Rightarrow$, non standard vers classique). Par contraposition. Si f non continue au sens classique, il existe $\varepsilon_0 > 0$ standard tel que pour tout $\delta > 0$ standard, il existe y_δ avec $|y_\delta - x_0| < \delta$ mais $|f(y_\delta) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$. On choisit $\delta = 1/n$ pour chaque n , on prolonge à n transfini : y_n vérifie $|y_n - x_0| < 1/n$ infinitésimal donc $y_n \approx x_0$, mais $|f(y_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$ non infinitésimal donc $f(y_n) \not\approx f(x_0)$. $\square$

Remarque 43 (Simplicité du formalisme). *La définition non standard de la continuité est plus simple que la formulation ε - δ : un seul niveau de quantification (« pour tout $x \approx x_0$ »), au lieu de trois imbriqués (« pour tout ε , il existe δ , pour tout x »). Cette simplicité s'étend à la dérivée, à l'intégrale, et aux théorèmes fondamentaux.*

6.10 Synthèse et vue d'ensemble

Ce qui est établi

1. La relation $\approx$ d'infinitésimale proximité et la structure de halo sur $\widetilde{\mathbb{R}}$.
2. Le théorème de la partie standard : tout limité a une unique partie standard dans $\mathbb{R}$.
3. $\text{st} : \widetilde{\mathbb{R}}_\ell \rightarrow \mathbb{R}$ est un morphisme d'anneaux surjectif, de noyau l'idéal des infinitésimaux.
4. Décomposition canonique : tout limité $a = \text{st}(a) + \varepsilon$ avec ε infinitésimal.

5. Critère non standard de convergence de suites.
6. Définitions non standard de la dérivée, de l'intégrale, des séries, de la continuité — toutes équivalentes aux définitions classiques.

Pont entre les deux mondes

Le schéma général du calcul non standard se résume ainsi :

Programme de calcul.

1. Formuler le problème dans $\mathbb{R}$ (limite, dérivée, intégrale).
2. Le traduire dans $\widetilde{\mathbb{R}}$ en remplaçant les “ $\rightarrow \infty$ ” par des évaluations en n_∞ , les “ $h \rightarrow 0$ ” par des infinitésimaux concrets ε , etc.
3. Effectuer les calculs algébriques dans $\widetilde{\mathbb{R}}$ (opérations totales tant qu'on reste dans l'anneau partiel).
4. Appliquer st au résultat pour récupérer la valeur dans $\mathbb{R}$.

Avantages

- **Simplicité du formalisme.** Les définitions non standard (continuité, dérivée, intégrale) ne contiennent qu'un niveau de quantification, là où les versions ε - δ en contiennent deux ou trois.
- **Calculs explicites.** Les formes indéterminées classiques ($\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $0/0$) deviennent des calculs algébriques sur des infinitésimaux et illimités concrets.
- **Fondement géométrique.** Là où l'analyse non standard de Robinson repose sur les ultrafiltres (objet non constructif), $\widetilde{\mathbb{R}}$ est construit géométriquement par le procédé du grain.

Limites du cadre actuel

- Le corps $\widetilde{\mathbb{R}}$ étant *partiel*, certains calculs sortent du cadre (produits dépassant $2\pi \cdot 2^{n_\infty}$, inverses d'infinitésimaux trop petits). L'extension $\widetilde{\widetilde{\mathbb{R}}}$ par déploiement à $-3n_\infty$ traitera ce cas.
- Les fonctions doivent être définies par des formules transférables pour que leur prolongement à $\widetilde{\mathbb{R}}$ soit canonique. Les fonctions définies abstraitement (sans formule) nécessitent un cadre supplémentaire (extension par continuité, définition par valeurs sur $\mathbb{Q}$).

Pistes pour la suite

1. **Théorème fondamental du calcul intégral.** Démontrer dans le cadre non standard que $\frac{d}{dx} \int_a^x f = f$ et que les primitives s'obtiennent par intégration de Riemann non standard.
2. **Convergence uniforme.** Caractériser la convergence uniforme des suites de fonctions par une condition non standard du type “ $f_n(x) \approx f(x)$ pour tous n transfini et x standard”.
3. **Compacité.** Reformuler la compacité (et les théorèmes associés : Bolzano-Weierstrass, valeurs intermédiaires, théorème de Heine) en termes de halos et de parties standards.
4. **Construction de la partie standard pour des structures plus riches.** Anneaux topologiques, espaces métriques, espaces de Banach, en utilisant la stratification de $\widetilde{\mathbb{N}}$ pour graduer les ordres d'infinitésimalité.

Chapitre 7

Compacité dans $\mathbb{R}$

Introduction

Ce chapitre développe la notion de compacité dans $\mathbb{R}$ en utilisant le cadre $\widetilde{\mathbb{R}}$ et la fonction partie standard.

L'idée centrale est que la compacité, classiquement définie par les recouvrements ouverts ou les sous-suites convergentes, admet dans le cadre non standard une caractérisation directe d'une grande simplicité : un fermé borné de $\mathbb{R}$ est exactement un ensemble dont tout point de l'extension non standard admet une partie standard dans l'ensemble.

Cette caractérisation rend les démonstrations des grands théorèmes (Bolzano-Weierstrass, Heine, valeur extrême) extraordinairement courtes, parfois deux lignes là où l'analyse classique demande plusieurs pages.

7.1 Rappels et notations

Définition 61 (Extension non standard d'un ensemble). *Soit $A \subseteq \mathbb{R}$. L'extension non standard de A est*

$$A^* := \{x \in \widetilde{\mathbb{R}} : \chi_A(x) = 1\},$$

où χ_A^* est l'extension par transfert de la fonction caractéristique $\chi_A : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$ (formule transférable si A est définissable au premier ordre).

Pour les ensembles définis par des inégalités polynomiales, comme les intervalles fermés $[a, b]$, l'extension est immédiate : $[a, b]^* = \{x \in \widetilde{\mathbb{R}} : a \leq x \leq b\}$.

Remarque 44 (Ensembles considérés). Dans toute cette section, on travaille avec des ensembles $A \subseteq \mathbb{R}$ standard, c'est-à-dire définissables sans référence à n_∞ ni 2^{n_∞} . Les ensembles définis avec ces constantes (par exemple $\{x : x \leq 1/n_\infty\}$) ne se transfèrent pas correctement et ne sont pas considérés ici.

Définition 62 (Halo d'un ensemble). Pour $A \subseteq \mathbb{R}$, le halo de A est

$$\text{hal}(A) := \bigcup_{a \in A} \text{hal}(a) = \{x \in \widetilde{\mathbb{R}} : \exists a \in A, x - a \in \mathcal{I}\}.$$

7.2 Caractérisation non standard de la compacité

Théorème 39 (Caractérisation de Robinson). Soit $K \subseteq \mathbb{R}$ un sous-ensemble standard. K est compact (au sens classique : fermé et borné) si et seulement si

$$\forall a \in K^*, \quad a \in \widetilde{\mathbb{R}}_b \text{ et } \text{st}(a) \in K.$$

Autrement dit : tout point de l'extension non standard de K est borné et admet une partie standard dans K .

Démonstration. ($\Rightarrow$) Supposons K compact dans $\mathbb{R}$. Alors K est borné : il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que $|x| \leq M$ pour tout $x \in K$. Par transfert (la formule $\forall x \in K, |x| \leq M$ est transférable et vraie dans $\mathbb{R}$), $|a| \leq M$ pour tout $a \in K^*$. Donc $a \in \widetilde{\mathbb{R}}_b$.

Soit $s := \text{st}(a) \in \mathbb{R}$. Il reste à montrer $s \in K$. Supposons par l'absurde $s \notin K$. Comme K est fermé, son complémentaire est ouvert, donc il existe $\varepsilon > 0$ standard tel que $]s - \varepsilon, s + \varepsilon[\cap K = \emptyset$. Or $a - s$ est infinitésimal, donc $|a - s| < \varepsilon$, soit $a \in]s - \varepsilon, s + \varepsilon[$. Comme $a \in K^*$, on a (par transfert) $a \in]s - \varepsilon, s + \varepsilon[\cap K^*$.

Mais par transfert appliqué à $]s - \varepsilon, s + \varepsilon[\cap K = \emptyset$, on doit avoir $]s - \varepsilon, s + \varepsilon[\cap K^* = \emptyset$. Contradiction.

Donc $s \in K$.

($\Leftarrow$) Supposons que tout $a \in K^*$ soit borné et de partie standard dans K .

K est borné. Si K n'était pas borné, il existerait dans $\mathbb{R}$ une suite (x_n) avec $x_n \in K$ et $|x_n| \rightarrow \infty$. Par transfert, la formule « $\forall n \in \tilde{\mathbb{N}}, \exists x \in K^*, |x| \geq n$ » est vraie. En prenant $n = n_\infty$, on obtient $a \in K^*$ avec $|a| \geq n_\infty$, donc a infiniment grand. Mais alors $a \notin \tilde{\mathbb{R}}_b$, contredisant l'hypothèse.

K est fermé. Soit $s \in \mathbb{R}$ un point d'accumulation de K . Il existe une suite $(x_n) \in K^\mathbb{N}$ avec $x_n \rightarrow s$. Par transfert, l'extension (x_n^*) est telle que $x_n^* \in K^*$ pour tout $n \in \tilde{\mathbb{N}}_1$. En prenant $n = n_\infty$, $x_{n_\infty}^* \in K^*$ et $\text{st}(x_{n_\infty}^*) = s$ (par caractérisation non standard de la limite). Par hypothèse, $\text{st}(x_{n_\infty}^*) \in K$, donc $s \in K$. Donc K contient tous ses points d'accumulation, donc K est fermé. $\square$

Remarque 45 (Élégance de la caractérisation). *Cette caractérisation absorbe en une seule condition les deux propriétés classiques :*

- Borné : tout point de K^* est dans $\tilde{\mathbb{R}}_b$, ce qui garantit l'existence de la partie standard.
- Fermé : la partie standard reste dans K .

Le point standard est ainsi un témoin direct du fait que la « limite » d'un point de K^ revient dans K .*

7.3 Conséquence 1 : théorème de Bolzano-Weierstrass

Théorème 40 (Bolzano-Weierstrass). *Toute suite bornée dans $\mathbb{R}$ admet une sous-suite convergente.*

Démonstration. Soit (u_n) une suite bornée dans $\mathbb{R}$: il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n| \leq M$ pour tout n . Posons $K := [-M, M]$, qui est compact (fermé borné). Tous les u_n sont dans K .

Soit u^* l'extension de (u_n) à $\tilde{\mathbb{N}}_1$ par transfert. Considérons $u_{n_\infty}^*$. Par transfert, $u_{n_\infty}^* \in K^*$. Par le théorème 39, $u_{n_\infty}^* \in \tilde{\mathbb{R}}_b$ et $\ell := \text{st}(u_{n_\infty}^*) \in K$.

Construction de la sous-suite convergente. On va montrer que ℓ est valeur d'adhérence de (u_n) , c'est-à-dire qu'il existe une sous-suite de (u_n) convergeant vers ℓ .

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, considérons la formule transférable :

$$\forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0, |u_n - \ell| < 2^{-k}.$$

Vérifions qu'elle est vraie dans $\tilde{\mathbb{R}}$. Pour n_0 donné, on prend $n = n_\infty$: $n_\infty \geq n_0$ (vrai dans $\tilde{\mathbb{N}}_1$), et $|u_{n_\infty}^* - \ell| < 2^{-k}$ car $u_{n_\infty}^* - \ell$ est infinitésimal. Donc la formule est vraie dans $\tilde{\mathbb{R}}$, et par transfert vraie dans $\mathbb{R}$.

On construit la sous-suite par récurrence : $\varphi(0) := 0$, et $\varphi(k+1) :=$ le plus petit $n > \varphi(k)$ tel que $|u_n - \ell| < 2^{-(k+1)}$ (existe par la formule précédente avec $n_0 = \varphi(k) + 1$).

Alors $|u_{\varphi(k)} - \ell| < 2^{-k}$ pour tout k , donc $u_{\varphi(k)} \rightarrow \ell$ quand $k \rightarrow \infty$. □

Remarque 46. *Le cœur de la preuve — $u_{n_\infty}^*$ a une partie standard dans K — tient en deux lignes. La construction explicite de la sous-suite extraite, qui occupe le reste de la démonstration, est en réalité un théorème séparé sur les valeurs d'adhérence : « ℓ valeur d'adhérence de (u_n) ssi $\ell = \text{st}(u_n^*)$ pour un certain $n \in \tilde{\mathbb{N}}_1 \setminus \mathbb{N}$ ».*

7.4 Conséquence 2 : théorème de Heine (continuité uniforme)

Définition 63 (Continuité uniforme). $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ est uniformément continue si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in A, |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Proposition 40 (Caractérisation non standard de la continuité uniforme). $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ uniformément continue ssi pour tous $x, y \in A^*$,

$$x - y \in \mathcal{I} \Rightarrow f^*(x) - f^*(y) \in \mathcal{I}.$$

Démonstration. Analogue à la caractérisation non standard de la continuité simple, en remplaçant le point fixé x_0 par une variable. Démonstration laissée en exercice (passage par transfert classique sur la formule de continuité uniforme). $\square$

Théorème 41 (Heine). Soit $K \subseteq \mathbb{R}$ compact et $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors f est uniformément continue sur K .

Démonstration. Soient $x, y \in K^*$ avec $x - y \in \mathcal{I}$. On veut montrer $f^*(x) - f^*(y) \in \mathcal{I}$.

Par le théorème 39, K compact entraîne $x \in \widetilde{\mathbb{R}}_b$ et $x_0 := \text{st}(x) \in K$. De plus, $y - x_0 = (y - x) + (x - x_0)$, somme de deux infinitésimaux donc infinitésimale, donc $y \in \widetilde{\mathbb{R}}_b$ et $\text{st}(y) = x_0$.

Par continuité de f en $x_0 \in K$ (caractérisation non standard) : $f^*(x) - f(x_0) \in \mathcal{I}$ et $f^*(y) - f(x_0) \in \mathcal{I}$.

Donc $f^*(x) - f^*(y) = (f^*(x) - f(x_0)) - (f^*(y) - f(x_0)) \in \mathcal{I}$ (différence de deux infinitésimaux). $\square$

Remarque 47. La démonstration tient en trois lignes : pas de raisonnement par ε - δ , pas de construction de recouvrement, pas d'extraction de sous-suite. La compacité produit directement la « partie standard commune » x_0 qui relie x et y , et la continuité de f en ce point fait le reste.

7.5 Conséquence 3 : théorème des valeurs extrêmes

Théorème 42 (Valeurs extrêmes). *Soit $K \subseteq \mathbb{R}$ compact non vide et $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors f atteint son maximum et son minimum sur K : il existe $x_{\max}, x_{\min} \in K$ tels que $f(x_{\min}) \leq f(x) \leq f(x_{\max})$ pour tout $x \in K$.*

Démonstration. On traite le cas du maximum (le minimum est analogue, ou s'obtient en appliquant le théorème à $-f$).

Étape 1 : $f(K)$ est borné supérieurement. K compact, donc tout $a \in K^*$ a $\text{st}(a) \in K$. Soit $a \in K^*$, $x_0 := \text{st}(a) \in K$. Par continuité de f en x_0 , $f^*(a) - f(x_0) \in \mathcal{I}$, donc $f^*(a) \in \widetilde{\mathbb{R}}_b$. Ainsi $f^*(K^*) \subseteq \widetilde{\mathbb{R}}_b$. Par transfert, $f(K)$ est borné dans $\mathbb{R}$.

Soit $M := \sup_{x \in K} f(x) \in \mathbb{R}$ (existe car $f(K)$ borné non vide).

Étape 2 : M est atteint. Par caractérisation du sup, pour tout $\varepsilon > 0$ standard il existe $\tilde{x}_\varepsilon \in K$ avec $f(\tilde{x}_\varepsilon) > M - \varepsilon$. Cette formule est transférable. Dans $\widetilde{\mathbb{R}}$, on prend $\varepsilon = 1/2^{n_\infty}$ (infinitésimal positif) : il existe $a \in K^*$ avec $f^*(a) > M - 1/2^{n_\infty}$, c'est-à-dire $M - f^*(a) < 1/2^{n_\infty}$ (infinitésimal), et aussi $f^*(a) \leq M$ par transfert de la propriété du sup. Donc $M - f^*(a) \in \mathcal{I}$, soit $\text{st}(f^*(a)) = M$.

Posons $x_{\max} := \text{st}(a) \in K$ (existe par compacité). Par continuité de f en $x_{\max}$, $f^*(a) - f(x_{\max}) \in \mathcal{I}$, donc $\text{st}(f^*(a)) = f(x_{\max})$, donc $f(x_{\max}) = M$.

Donc $M = f(x_{\max})$ est atteint en $x_{\max} \in K$. □

Remarque 48. *Le point clé est : la valeur du sup, infinitésimalement approchée par $f^*(a)$, est exactement la valeur de f en la partie standard $\text{st}(a) \in K$. La compacité fournit le point standard, la continuité transmet la valeur.*

7.6 Conséquence 4 : théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 43 (Valeurs intermédiaires). *Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue avec $f(a) < f(b)$. Pour tout $y \in]f(a), f(b)[$, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = y$.*

Démonstration. Découpons $[a, b]$ en 2^{n_∞} sous-intervalles de longueur infinitésimale $\delta := (b-a)/2^{n_\infty}$. Posons $x_k := a + k\delta$ pour $k \in \{0, 1, \dots, 2^{n_\infty}\} \subseteq \tilde{\mathbb{N}}_1$.

Par transfert, la formule « $f(x_0) < y$ et $f(x_{2^{n_\infty}}) > y$ » est vraie dans $\tilde{\mathbb{R}}$ (puisque $x_0 = a$, $x_{2^{n_\infty}} = b$, et $f(a) < y < f(b)$).

Soit $K := \{k \in \tilde{\mathbb{N}}_1 : 0 \leq k \leq 2^{n_\infty}, f^*(x_k) \leq y\}$. Cet ensemble est non vide ($0 \in K$ car $f^*(x_0) = f(a) < y$) et borné par 2^{n_∞} . Par bon ordre de $\tilde{\mathbb{N}}_1$, K admet un plus grand élément $k_0 : f^*(x_{k_0}) \leq y$ et $f^*(x_{k_0+1}) > y$.

Posons $c := \text{st}(x_{k_0})$. Comme $a \leq x_{k_0} \leq b$ et $[a, b]$ compact, $c \in [a, b]$ (théorème 39).

Par continuité de f en c , $f^*(x_{k_0}) - f(c) \in \mathcal{I}$. De plus, $x_{k_0+1} - x_{k_0} = \delta \in \mathcal{I}$, donc $\text{st}(x_{k_0+1}) = c$ aussi, et $f^*(x_{k_0+1}) - f(c) \in \mathcal{I}$.

On a donc $f^*(x_{k_0}) \leq y \leq f^*(x_{k_0+1})$ avec les deux extrêmes infinitésimalement proches de $f(c)$. Par stabilité de l'inégalité par partie standard, $f(c) \leq y \leq f(c)$, donc $f(c) = y$.

Enfin $c \neq a$ car $f(a) < y = f(c)$, et $c \neq b$ car $f(b) > y = f(c)$. Donc $c \in]a, b[$. $\square$

Remarque 49 (Interprétation géométrique). *La démonstration revient à parcourir le segment $[a, b]$ avec un pas infinitésimal $\delta = (b-a)/2^{n_\infty}$ et à repérer le moment où f franchit la valeur y . C'est l'argument intuitif du « tableau de variations », rendu rigoureux par le fait que $\tilde{\mathbb{R}}$ contient effectivement des pas infinitésimaux comme nombres manipulables.*

7.7 Synthèse

- **Caractérisation centrale.** $K \subset \mathbb{R}$ compact ssi tout point de K^* est borné et a sa partie standard dans K .
- **Démonstrations courtes.** Bolzano-Weierstrass, Heine, valeurs extrêmes, valeurs intermédiaires : chaque théorème classique reçoit une démonstration de quelques lignes, le travail conceptuel étant absorbé par la machinerie non standard.
- **Géométrie sous-jacente.** La caractérisation rend visible le contenu géométrique de la compacité : c'est la propriété qu'un ensemble est « complet » au sens où les points infiniment grands ou infinitésimalement proches de la frontière reviennent toujours dans l'ensemble.

7.8 Points laissés ouverts

1. **Extension à $\mathbb{R}^n$.** Les démonstrations s'adaptent directement à $\mathbb{R}^n$ en remplaçant la valeur absolue par la norme euclidienne. À rédiger explicitement.
2. **Compacité dans les espaces métriques.** La caractérisation de Robinson se généralise aux espaces métriques abstraits, à condition de disposer d'une extension non standard de la métrique. Cela nécessite d'étendre la construction de $\widetilde{\mathbb{R}}$ à un cadre plus général.
3. **Lien avec la complétude de $\mathbb{R}$.** La démonstration de Bolzano-Weierstrass utilise implicitement la complétude de $\mathbb{R}$ (via la propriété du sup utilisée pour la partie standard). La complétude elle-même reste à fonder rigoureusement dans le cadre de l'axiomatique du grain.

Chapitre 8

Des espaces métriques aux espaces de Hilbert

Introduction

Ce chapitre parcourt en quatre étapes le chemin des espaces métriques aux espaces de Hilbert, en s'appuyant systématiquement sur le cadre non standard construit dans les sections précédentes (partie standard, théorème de transfert).

L'idée directrice : la plupart des notions analytiques (convergence, complétude, projection) se caractérisent par des conditions *ponctuelles* sur la partie standard, ce qui rend les démonstrations à la fois courtes et géométriques.

Cadre. On travaille avec des espaces X construits à partir de $\mathbb{R}$ (et donc dotés d'une extension X^* construite à partir de $\widetilde{\mathbb{R}}$ par les mêmes opérations). Exemples principaux : $\mathbb{R}^n$, $\ell^2(\mathbb{R})$, $L^2(\mathbb{R})$.

8.1 Espaces métriques

8.1.1 Définitions et extension

Définition 64 (Espace métrique). *Un espace métrique est un couple (X, d) où X est un ensemble et $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifie, pour tous $x, y, z \in X$:*

$$d(x, y) = 0 \iff x = y, \quad d(x, y) = d(y, x), \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

Définition 65 (Extension non standard). *X^* et $d^* : X^* \times X^* \rightarrow \widetilde{\mathbb{R}}_+$ sont les extensions de X et d par transfert. Les trois axiomes ci-dessus se transfèrent à d^* .*

Définition 66 (Halo et proximité). *Pour $a \in X^*$, le halo de a est*

$$\text{hal}(a) := \{x \in X^* : d^*(x, a) \in \mathcal{I}\}.$$

On dit que x et y sont infiniment proches, noté $x \approx y$, si $d^(x, y) \in \mathcal{I}$. La relation $\approx$ est une équivalence (réflexivité et symétrie directes ; transitivité par inégalité triangulaire et stabilité de $\mathcal{I}$ par addition).*

8.1.2 Caractérisations non standard

Proposition 41 (Convergence d'une suite). *Soit (u_n) une suite dans X et $\ell \in X$.*

$$u_n \rightarrow \ell \iff u_n^* \approx \ell \text{ pour tout } n \in \widetilde{\mathbb{N}}_1 \setminus \mathbb{N}.$$

Démonstration. Analogie à la caractérisation non standard de la limite dans $\mathbb{R}$, en remplaçant $|u_n - \ell|$ par $d(u_n, \ell)$. □

Proposition 42 (Continuité d'une fonction). *Soit $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$. f continue en $x_0 \in X$ ssi pour tout $x \in X^*$ avec $x \approx x_0$, $f^*(x) \approx f(x_0)$.*

Démonstration. Par transfert de la formule ε - δ . □

Définition 67 (Suite de Cauchy). *Une suite (u_n) dans X est de Cauchy si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $d(u_m, u_n) < \varepsilon$ pour tous $m, n \geq n_0$.*

Proposition 43 (Caractérisation non standard de Cauchy). *(u_n) est de Cauchy ssi $u_m^* \approx u_n^*$ pour tous $m, n \in \tilde{\mathbb{N}}_1 \setminus \mathbb{N}$.*

8.1.3 Complétude

Définition 68 (Espace complet). *(X, d) est complet si toute suite de Cauchy dans X converge dans X .*

Théorème 44 (Caractérisation non standard de la complétude). *(X, d) est complet ssi pour toute suite (u_n) de Cauchy dans X , $u_{n_\infty}^*$ admet une partie standard dans X .*

Démonstration. $(\Rightarrow)$ Si X complet et (u_n) Cauchy, soit $\ell := \lim u_n \in X$. Par proposition 41, $u_{n_\infty}^* \approx \ell$, donc $\ell \in \text{hal}(u_{n_\infty}^*) \cap X$. L'unicité provient de la métrique : si $\ell, \ell' \in X$ et $u_{n_\infty}^* \approx \ell, \ell'$, alors $d(\ell, \ell') \leq d^*(\ell, u_{n_\infty}^*) + d^*(u_{n_\infty}^*, \ell') \in \mathcal{I}$, donc $d(\ell, \ell') = 0$, donc $\ell = \ell'$.

$(\Leftarrow)$ Si toute suite Cauchy (u_n) vérifie $u_{n_\infty}^*$ a partie standard $\ell \in X$, on montre que ℓ est la limite de (u_n) . Par proposition 43, $u_m^* \approx u_{n_\infty}^*$ pour tout m transfini, donc $u_m^* \approx \ell$ pour tout m transfini. Par proposition 41, $u_n \rightarrow \ell$. $\square$

8.2 Espaces vectoriels normés et espaces de Banach

8.2.1 Définitions

Définition 69 (Espace vectoriel normé). *Un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ est un couple $(E, \|\cdot\|)$ où E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifie, pour tous $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:*

$$\|x\| = 0 \iff x = 0, \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|, \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

La métrique associée est $d(x, y) := \|x - y\|$.

Définition 70 (Espace de Banach). *Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet pour la métrique associée.*

8.2.2 Partie standard dans un Banach

Proposition 44 (Existence et unicité de la partie standard). *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un Banach. Pour tout $a \in E^*$ tel que $\|a\|^*$ est borné dans $\widetilde{\mathbb{R}}$, il existe une unique $\text{st}(a) \in E$ tel que $a - \text{st}(a)$ est de norme infinitésimale.*

Démonstration. Existence. Soit $a \in E^*$ avec $\|a\|^* < M$ standard. Par densité de E dans E^* aux échelles standards (transfert), pour chaque $n \in \mathbb{N}$ il existe $b_n \in E$ avec $\|a - b_n\|^* < 2^{-n}$. La suite (b_n) est de Cauchy dans E : $\|b_m - b_n\| = \text{st}(\|b_m - b_n\|^*) \leq \text{st}(\|b_m - a\|^* + \|a - b_n\|^*) \leq 2^{-m} + 2^{-n}$. Par complétude, $b_n \rightarrow \ell \in E$. Alors $\|a - \ell\|^* \leq \|a - b_n\|^* + \|b_n - \ell\|^*$, où le premier terme est $< 2^{-n}$ pour tout n et le second tend vers 0. Donc $\|a - \ell\|^*$ est infinitésimal.

Unicité. Si $\ell, \ell' \in E$ avec $a - \ell, a - \ell'$ de norme infinitésimale, alors $\|\ell - \ell'\| \leq \|a - \ell\| + \|a - \ell'\| \in \mathcal{I}$, donc $\|\ell - \ell'\| = 0$, donc $\ell = \ell'$. $\square$

Théorème 45 (Propriétés algébriques de st). *Pour $a, b \in E^*$ de norme bornée et $\lambda \in \widetilde{\mathbb{R}}_b$:*

1. $\text{st}(a + b) = \text{st}(a) + \text{st}(b)$.
2. $\text{st}(\lambda \cdot a) = \text{st}(\lambda) \cdot \text{st}(a)$.
3. $\text{st}(\|a\|^*) = \|\text{st}(a)\|$ (continuité de la norme).

Démonstration. (1) $a + b = (\text{st}(a) + \text{st}(b)) + ((a - \text{st}(a)) + (b - \text{st}(b)))$ où le second terme est somme de deux infinitésimaux en norme.

(2) Décomposition $\lambda a = \text{st}(\lambda)\text{st}(a) + (\lambda - \text{st}(\lambda))\text{st}(a) + \text{st}(\lambda)(a - \text{st}(a)) + (\lambda - \text{st}(\lambda))(a - \text{st}(a))$. Les trois derniers termes sont infinitésimaux en norme.

(3) Inégalité triangulaire inverse : $\| \|a\|^* - \|\text{st}(a)\| \| \leq \|a - \text{st}(a)\|^* \in \mathcal{I}$. $\square$

8.3 Espaces préhilbertiens

8.3.1 Produit scalaire

Définition 71 (Espace préhilbertien). *Un espace préhilbertien (réel) est un couple $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ où H est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie :*

- *Bilinéarité.*
- *Symétrie : $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$.*
- *Positivité : $\langle x, x \rangle \geq 0$, avec $= 0$ ssi $x = 0$.*

On pose $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

8.3.2 Inégalités fondamentales

Théorème 46 (Cauchy-Schwarz). *Pour tous x, y dans un préhilbertien H :*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Démonstration. Si $y = 0$, l'inégalité est triviale. Sinon, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$0 \leq \|x - \lambda y\|^2 = \|x\|^2 - 2\lambda \langle x, y \rangle + \lambda^2 \|y\|^2.$$

Discriminant en λ négatif ou nul : $\langle x, y \rangle^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$. □

Corollaire 15 (Inégalité triangulaire). $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Démonstration. $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$, par Cauchy-Schwarz. □

Remarque 50 (Continuité du produit scalaire). *Le produit scalaire est continu : si $x \approx x_0$ et $y \approx y_0$ avec $\|x\|, \|y\|$ bornés, alors $\langle x, y \rangle^* \approx \langle x_0, y_0 \rangle$. Démonstration directe par bilinéarité et Cauchy-Schwarz.*

8.4 Espaces de Hilbert

8.4.1 Définition

Définition 72 (Espace de Hilbert). *Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien complet pour la norme associée au produit scalaire.*

Exemple 13. $\mathbb{R}^n$ avec $\langle x, y \rangle = \sum x_i y_i$; $\ell^2(\mathbb{R}) = \{(u_n) : \sum u_n^2 < \infty\}$ avec $\langle u, v \rangle = \sum u_n v_n$; $L^2(\mathbb{R})$ avec $\langle f, g \rangle = \int f g$.

8.4.2 Théorème de projection sur un convexe fermé

Théorème 47 (Projection). *Soit H un Hilbert et $C \subseteq H$ un sous-ensemble convexe, fermé, non vide. Pour tout $x \in H$, il existe un unique $p \in C$ tel que*

$$\|x - p\| = \inf_{y \in C} \|x - y\|.$$

p est appelé projection de x sur C , noté $p = P_C(x)$.

Démonstration. Existence. Soit $d := \inf_{y \in C} \|x - y\| \in \mathbb{R}_+$. Par caractérisation de l'inf, pour tout $\varepsilon > 0$ standard il existe $y_\varepsilon \in C$ avec $\|x - y_\varepsilon\| < d + \varepsilon$. Cette formule est transférable. Dans H^* , on prend $\varepsilon = 1/2^{n^\infty}$ infinitésimal : il existe $a \in C^*$ avec $\|x - a\|^* < d + 1/2^{n^\infty}$.

$\|a\|^* \leq \|x\| + \|x - a\|^* < \|x\| + d + 1$, standard borné. Donc $a \in H^*$ borné, et la partie standard existe.

Soit $C_R := C \cap \overline{B}(x, d + 1)$, fermé borné de H . $a \in C_R^*$, et par caractérisation de Robinson pour les fermés bornés de Hilbert, $\text{st}(a) \in C_R \subseteq C$.

Posons $p := \text{st}(a)$. Par continuité de la norme,

$$\|x - p\| = \text{st}(\|x - a\|^*) \leq \text{st}(d + 1/2^{n^\infty}) = d.$$

Et $\|x - p\| \geq d$ par définition de d comme infimum. Donc $\|x - p\| = d$.

Unicité. Soient $p, p' \in C$ avec $\|x - p\| = \|x - p'\| = d$. Identité du parallélogramme :

$$\|p - p'\|^2 + \|2x - p - p'\|^2 = 2\|x - p\|^2 + 2\|x - p'\|^2 = 4d^2.$$

Or $\frac{p+p'}{2} \in C$ par convexité, donc $\|x - \frac{p+p'}{2}\| \geq d$, soit $\|2x - p - p'\|^2 \geq 4d^2$. Combinant : $\|p - p'\|^2 \leq 0$, donc $p = p'$. $\square$

Remarque 51. La démonstration classique utilise une suite minimisante (y_n) avec $\|x - y_n\| \rightarrow d$, montre qu'elle est de Cauchy via l'identité du parallélogramme, et conclut par complétude. Ici, on construit directement le point optimal $p = \text{st}(a)$ pour $a \in C^*$ infinitésimalement proche de l'infimum.

8.4.3 Théorème de représentation de Riesz

Définition 73 (Forme linéaire continue). Une forme linéaire continue sur un Hilbert H est une application $\varphi : H \rightarrow \mathbb{R}$ linéaire et continue. Le dual topologique de H est noté $H^\vee$.

Théorème 48 (Riesz). Soit H un Hilbert et $\varphi \in H^\vee$. Il existe un unique $v_\varphi \in H$ tel que

$$\forall x \in H, \quad \varphi(x) = \langle x, v_\varphi \rangle.$$

Démonstration. Unicité. Si $v, v' \in H$ représentent φ , alors $\langle x, v - v' \rangle = 0$ pour tout $x \in H$. En prenant $x = v - v'$: $\|v - v'\|^2 = 0$, donc $v = v'$.

Existence. Si $\varphi = 0$, $v_\varphi = 0$ convient. Sinon, soit $N := \ker \varphi$. N est un sous-espace fermé propre de H (fermé par continuité de φ , propre car $\varphi \neq 0$).

Soit $u \in H \setminus N$ et $u_0 := P_N(u)$ sa projection sur N (par théorème 47, N étant convexe fermé non vide). Posons $e := (u - u_0)/\|u - u_0\|$, de norme 1 et orthogonal à N (propriété de la projection : $\langle u - u_0, y \rangle = 0$ pour tout $y \in N$).

Pour tout $x \in H$, on décompose $x = \left(x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(e)}e\right) + \frac{\varphi(x)}{\varphi(e)}e$. Le premier terme est dans N (en effet, φ appliqué donne $\varphi(x) - \frac{\varphi(x)}{\varphi(e)}\varphi(e) = 0$).

Donc $\langle x, e \rangle = 0 + \frac{\varphi(x)}{\varphi(e)}\langle e, e \rangle = \frac{\varphi(x)}{\varphi(e)}$, soit $\varphi(x) = \varphi(e) \cdot \langle x, e \rangle = \langle x, \varphi(e) \cdot e \rangle$.

On pose $v_\varphi := \varphi(e) \cdot e$. □

Corollaire 16 (Isomorphisme $H \cong H^\vee$). *L'application $v \mapsto \langle \cdot, v \rangle$ est un isomorphisme isométrique de H sur son dual topologique $H^\vee$.*

Démonstration. Linéarité, injectivité, surjectivité : par Riesz et bilinéarité du produit scalaire. Isométrie : $\|\langle \cdot, v \rangle\|_{H^\vee} = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle x, v \rangle| = \|v\|$ par Cauchy-Schwarz (sup atteint en $x = v/\|v\|$). □

8.4.4 Synthèse

- **Chemin parcouru.** Métrique $\rightarrow$ normé $\rightarrow$ Banach $\rightarrow$ préhilbertien $\rightarrow$ Hilbert. Chaque étape ajoute une structure, et la caractérisation non standard se propage.
- **Caractérisation centrale.** Dans un Hilbert H , tout $a \in H^*$ de norme bornée admet une unique partie standard $\text{st}(a) \in H$. C'est la traduction géométrique de la complétude.
- **Démonstrations courtes.** Cauchy-Schwarz (algébrique transférable), inégalité triangulaire (corollaire), projection (construction directe via partie standard), Riesz (projection appliquée au noyau d'une forme linéaire).

8.4.5 Points laissés ouverts

1. **Construction explicite de X^* pour les Banach abstraits.**
Pour $\mathbb{R}^n$, l'extension est composante par composante. Pour ℓ^2 et L^2 , il faut élaborer le cadre des séries et des intégrales dans $\widetilde{\mathbb{R}}$.

2. **Bases hilbertiennes et théorème spectral.** Naturellement accessibles via les mêmes méthodes, demandent un cadre supplémentaire sur les séries dans un Hilbert et les opérateurs compacts.
3. **Théorèmes du dual.** Hahn-Banach, Banach-Steinhaus, théorème d'isomorphisme de Banach, suivent par le même type d'argument.

Chapitre 9

Structure récursive des factorisations stratales

Préambule

Ce document consigne deux résultats structurels sur les factorisations stratales dans le programme du grain :

- Une *factorisation imbriquée* des résolutions successives, qui exprime la structure récursive stratale.
- Un *principe de transposabilité* entre le cardinal et le facteur de dilatation, qui identifie une équivalence structurelle entre modes de comptage.

Contexte. Le déploiement du cercle unité C_1 dans le programme du grain admet plusieurs factorisations selon la résolution considérée. Ce document analyse la structure interne de ces factorisations et fait apparaître deux mécanismes complémentaires.

Statut épistémologique. Les deux résultats sont *mathématiquement solides* et directement démontrables à partir des règles de calcul de fac-

torisation. Ils consolident la cohérence interne du programme et ouvrent une lecture récursive stratale.

Référence implicite. *Axiomatique du grain* (déploiement), *Symétrie de résolution* (théorème de factorisation), *Métrique stratale v4* (Section 1 : Heuristique combinatoire).

9.1 Rappel : déploiement et factorisations

9.1.1 Le mécanisme de déploiement

Définition 74 (Déploiement à la résolution $-kn_\infty$). *Le déploiement du cercle unité C_1 (de longueur 2π) à la résolution $-kn_\infty$ est une bijection entre C_1 et un segment linéaire de longueur :*

$$\mathcal{L}_{kn_\infty} = 2\pi \cdot 2^{kn_\infty}.$$

Ce déploiement traduit la structure cyclique du cercle en une structure linéaire de longueur amplifiée par le facteur stratal 2^{kn_∞} .

Remarque 52 (Signification structurelle du facteur 2^{kn_∞}). *Le facteur 2^{kn_∞} n'est pas arbitraire : il représente le nombre de grains à la résolution $-kn_\infty$. Chaque grain occupe alors, sur le segment déployé, une longueur d'un tour complet du cercle (2π). Le déploiement ne comprime pas le cercle : il le étire en préservant chaque grain à sa taille unitaire.*

9.1.2 Deux factorisations classiques

Proposition 45 (Factorisation à résolution $-n_\infty$). *À la résolution $-n_\infty$, la bijection de déploiement fait correspondre C_1 à un segment de longueur $2\pi \cdot 2^{n_\infty}$. Par cette bijection, C_1 admet la factorisation :*

$$f = \left(2\pi, 2^{n_\infty}, \frac{2\pi}{2^{n_\infty}} \right).$$

Vérification : $2^{n_\infty} \cdot (2\pi/2^{n_\infty}) = 2\pi$.

Proposition 46 (Factorisation à résolution $-2n_\infty$). *À la résolution $-2n_\infty$, la bijection de déploiement fait correspondre C_1 à un segment de longueur $2\pi \cdot 2^{2n_\infty}$. Par cette bijection, C_1 admet la factorisation :*

$$f' = \left(2\pi, 2^{2n_\infty}, \frac{2\pi}{2^{2n_\infty}} \right).$$

Vérification : $2^{2n_\infty} \cdot (2\pi/2^{2n_\infty}) = 2\pi$.

9.1.3 Position du problème

Les factorisations f et f' décrivent le même objet géométrique (C_1) à deux résolutions différentes. La question naturelle est : quelle est la relation structurelle entre f et f' ?

Cette relation admet, comme on va le voir, une double lecture : *transposabilité* entre cardinal et facteur de dilatation (Section 9.2), et *imbrication récursive* des factorisations (Section 9.3).

9.2 Transposabilité cardinal/dilatation

9.2.1 Une seule relation d'équivalence

Définition 75 (Équivalence de factorisations). *Deux factorisations $(\mathcal{L}, N, \epsilon)$ et $(\mathcal{L}', N', \epsilon')$ — vérifiant chacune la relation fondamentale $\mathcal{L} = N\epsilon$ et $\mathcal{L}' = N'\epsilon'$ — sont équivalentes, noté $\simeq$, si elles décrivent le même continu (C_1 ou un segment déployé) via la bijection de déploiement. La relation $\simeq$ est engendrée par les deux opérations élémentaires ci-dessous (regroupement et déploiement).*

Remarque 53 (Ce que $\simeq$ conserve — et ne conserve pas). *Aucune des trois grandeurs $\mathcal{L}, N, \epsilon$ n'est un invariant de $\simeq$ à elle seule : le regroupement fixe $\mathcal{L}$ mais change N et ϵ ; le déploiement fixe N mais change $\mathcal{L}$ et ϵ . L'invariant est le contenu en grains du continu sous-jacent (le même ensemble de grains, réorganisé ou remis à l'échelle). La contrainte $\mathcal{L} = N\epsilon$ est, elle, préservée par construction à chaque étape.*

9.2.2 Les deux opérations élémentaires

Proposition 47 (Regroupement — $\mathcal{L}$ conservée). *Si le cardinal se décompose $N = N_1 \cdot N_2$, on peut regrouper les grains par paquets de N_1 :*

$$(\mathcal{L}, N_1 N_2, \epsilon) \simeq (\mathcal{L}, N_2, N_1 \epsilon).$$

La longueur totale $\mathcal{L}$ est inchangée ; le cardinal est divisé par N_1 , l'épaisseur multipliée par N_1 (chaque nouveau grain réunit N_1 anciens grains).

Démonstration. Il suffit de vérifier la relation fondamentale à droite : $N_2 \cdot (N_1 \epsilon) = N_1 N_2 \cdot \epsilon = \mathcal{L}$. Les deux triplets factorisent donc le même continu de longueur $\mathcal{L}$, le second en regroupant N_1 grains adjacents du premier. $\square$

Proposition 48 (Déploiement — N conservé). *Pour un facteur $\lambda = 2^{mn_\infty}$ ($m \geq 0$), le déploiement étire le continu :*

$$(\mathcal{L}, N, \epsilon) \simeq (\lambda \mathcal{L}, N, \lambda \epsilon).$$

Le cardinal N est inchangé ; la longueur et l'épaisseur sont toutes deux multipliées par λ . C'est la bijection de déploiement de la Définition 74 (similitude de rapport λ).

Démonstration. Vérification à droite : $N \cdot (\lambda \epsilon) = \lambda(N\epsilon) = \lambda \mathcal{L}$. Le déploiement préserve le nombre de grains et multiplie la métrique par λ . $\square$

9.2.3 La transposabilité comme composée

Principe 1 (Transposabilité cardinal / facteur de dilatation). *Composer un regroupement puis un déploiement, de même facteur N_1 , transpose N_1 du cardinal vers une dilatation de la longueur :*

$$(\mathcal{L}, N_1 N_2, \epsilon) \xrightarrow{\text{regroup. } N_1} (\mathcal{L}, N_2, N_1 \epsilon) \xrightarrow{\text{déploi. } \lambda=N_1} (N_1 \mathcal{L}, N_2, N_1^2 \epsilon).$$

Autrement dit

$$(\mathcal{L}, N_1 N_2, \epsilon) \simeq (N_1 \mathcal{L}, N_2, N_1^2 \epsilon).$$

Démonstration. Chaque flèche est une opération élémentaire (Prop. 47 puis 48), donc préserve $\simeq$. Vérification directe de la relation fondamentale sur le triplet final : $N_2 \cdot (N_1^2 \epsilon) = N_1^2 N_2 \epsilon = N_1 \cdot (N_1 N_2 \epsilon) = N_1 \mathcal{L}$. $\square$

Remarque 54 (Pourquoi l'épaisseur ne peut pas rester ϵ). *On prendra garde : dans la transposition, l'épaisseur devient $N_1^2 \epsilon$, non ϵ . En effet, garder ϵ inchangée tout en posant la longueur $N_1 \mathcal{L}$ et le cardinal N_2 violerait la relation fondamentale ($N_2 \epsilon = \mathcal{L}/N_1 \neq N_1 \mathcal{L}$ dès que $N_1 \neq 1$). C'est la contrainte $\mathcal{L} = N \epsilon$ — une équation, donc deux degrés de liberté seulement — qui impose d'ajuster l'épaisseur lorsqu'on modifie les deux autres grandeurs.*

9.2.4 Application au passage $f \rightarrow f'$

Proposition 49 (Redistribution dans f'). *La factorisation fine $f' = (2\pi, 2^{2n_\infty}, 2\pi/2^{2n_\infty})$ est équivalente, par regroupement puis déploiement de facteur $N_1 = 2^{n_\infty}$, à*

$$\tilde{f}' = (2\pi \cdot 2^{n_\infty}, 2^{n_\infty}, 2\pi).$$

La factorisation intermédiaire est exactement f (Proposition 45), d'où la chaîne

$$f' \simeq f \simeq \tilde{f}'.$$

Démonstration. On pose $N_1 = N_2 = 2^{n_\infty}$, de sorte que $2^{2n_\infty} = N_1 N_2$.

Étape 1 — regroupement (Prop. 47) :

$$(2\pi, 2^{n_\infty} \cdot 2^{n_\infty}, \frac{2\pi}{2^{2n_\infty}}) \simeq (2\pi, 2^{n_\infty}, 2^{n_\infty} \cdot \frac{2\pi}{2^{2n_\infty}}) = (2\pi, 2^{n_\infty}, \frac{2\pi}{2^{n_\infty}}) = f.$$

On retrouve la factorisation intrinsèque de C_1 à la résolution $-n_\infty$ (Prop. 45).

Étape 2 — déploiement (Prop. 48) avec $\lambda = 2^{n_\infty}$:

$$(2\pi, 2^{n_\infty}, \frac{2\pi}{2^{n_\infty}}) \simeq (2\pi \cdot 2^{n_\infty}, 2^{n_\infty}, 2^{n_\infty} \cdot \frac{2\pi}{2^{n_\infty}}) = (2\pi \cdot 2^{n_\infty}, 2^{n_\infty}, 2\pi) = \tilde{f}'.$$

La relation fondamentale est vérifiée à chaque étape, et l'épaisseur finale $\epsilon = 2\pi$ résulte du déploiement d'un grain grossier (arc $2\pi/2^{n_\infty}$) étiré par 2^{n_∞} . $\square$

Remarque 55 (Interprétation). *La chaîne $f' \simeq f \simeq \tilde{f}'$ relie trois lectures d'un même objet :*

- f' : le cercle C_1 à la résolution fine $-2n_\infty$ (2^{2n_∞} grains) ;
- f : le cercle C_1 à la résolution grossière $-n_\infty$ (2^{n_∞} grains), obtenu en regroupant les grains fins par paquets de 2^{n_∞} ;
- $\tilde{f}'$: le déploiement de ce cercle grossier, où chaque grain occupe une longueur 2π (un tour complet).

L'épaisseur $\epsilon = 2\pi$ de $\tilde{f}'$ — égale à $\mu(C_1)$ — prépare l'imbrication récursive de la Section 9.3 : chaque grain déployé a la taille d'un cercle.

9.3 Factorisation imbriquée

9.3.1 Identification récursive de l'épaisseur

Remarque 56 (Une observation frappante). *Dans la factorisation $\tilde{f}' = (2\pi \cdot 2^{n_\infty}, 2^{n_\infty}, 2\pi)$ obtenue par redistribution, l'épaisseur élémentaire vaut $\epsilon = 2\pi$.*

Cette valeur coïncide numériquement avec la longueur du cercle C_1 lui-même. La question naturelle est : cette coïncidence est-elle une simple équivalence numérique, ou une identification structurelle ?

Principe 2 (Identification récursive). *Dans le programme du grain, la coïncidence $\epsilon = 2\pi = \mu(C_1)$ n'est pas une simple équivalence numérique : elle constitue une identification structurelle. Chaque grain à la résolution $-n_\infty$ contient une copie du cercle C_1 vue à sa résolution naturelle.*

Remarque 57 (Justification). *Cette identification est cohérente avec la structure de déploiement : si chaque grain à la résolution $-n_\infty$ occupe une longueur 2π sur le segment déployé, et si 2π est précisément la longueur d'un tour du cercle C_1 , alors chaque grain est structurellement un tour du cercle.*

C'est le mécanisme fractal-stratal du programme : chaque niveau de résolution contient récursivement les niveaux plus fins.

9.3.2 Le théorème d'imbrication

Théorème 49 (Factorisation imbriquée). *La factorisation $\tilde{f}' = (2\pi \cdot 2^{n_\infty}, 2^{n_\infty}, 2\pi)$ admet la forme imbriquée :*

$$\tilde{f}' = (2\pi \cdot 2^{n_\infty}, 2^{n_\infty}, f)$$

où $f = (2\pi, 2^{n_\infty}, 2\pi/2^{n_\infty})$ est la factorisation de C_1 à la résolution $-n_\infty$ (Proposition 45).

Cette imbrication traduit structurellement que chaque grain à la résolution grossière contient une copie de la factorisation fine.

Démonstration. Par le Principe 2, l'épaisseur $\epsilon = 2\pi$ s'identifie à C_1 . Par la Proposition 45, C_1 à la résolution $-n_\infty$ admet la factorisation f . Substitution directe dans $\tilde{f}'$:

$$\tilde{f}' = \left(2\pi \cdot 2^{n_\infty}, 2^{n_\infty}, \underbrace{2\pi}_{=C_1=f} \right) = (2\pi \cdot 2^{n_\infty}, 2^{n_\infty}, f).$$

□

9.3.3 Lecture récursive stratale

Remarque 58 (Structure hiérarchique). *Le Théorème 49 exprime une structure hiérarchique récursive :*

- Au niveau extérieur : 2^{n_∞} grains de longueur 2π chacun.
- Au niveau intérieur (dans chaque grain) : 2^{n_∞} sous-grains de longueur $2\pi/2^{n_\infty}$ chacun.

Le cardinal total effectif est donc $2^{n_\infty} \cdot 2^{n_\infty} = 2^{2n_\infty}$, cohérent avec la factorisation f' d'origine.

Cette hiérarchie n'est pas une simple juxtaposition : c'est une récursion stratale qui fait apparaître la structure du programme comme un ensemble de niveaux emboîtés, chaque niveau contenant le suivant.

9.3.4 Généralisation aux résolutions supérieures

Proposition 50 (Imbrication à toutes les résolutions). *Pour toute résolution $-kn_\infty$ avec $k \geq 2$, la factorisation $f^{(k)} = (2\pi, 2^{kn_\infty}, 2\pi/2^{kn_\infty})$ admet la forme imbriquée récursive :*

$$\tilde{f}^{(k)} = \left(2\pi \cdot 2^{(k-1)n_\infty}, 2^{n_\infty}, f^{(k-1)} \right)$$

où $f^{(k-1)}$ est la factorisation à la résolution $-(k-1)n_\infty$.

Remarque 59 (Interprétation). *Chaque résolution $-kn_\infty$ contient récursivement la résolution $-(k-1)n_\infty$, elle-même contenant $-(k-2)n_\infty$, et ainsi de suite jusqu'à la résolution $-n_\infty$ de base.*

L'ensemble du programme du grain s'organise ainsi comme une tour récursive de factorisations imbriquées, dont chaque niveau est structuellement identique aux autres, à un facteur de dilatation près.

9.4 Cohérence avec le programme

9.4.1 Lien avec la métrique stratale

Remarque 60 (Cohérence avec le transport de métriques). *Les deux résultats de ce document (transposabilité et imbrication) sont cohérents avec le transport métrique établi dans Métrique stratale v4 :*

- La transposabilité cardinal/dilatation (*Principe 1*) correspond au principe de transposabilité énoncé dans la Section 1 de Métrique stratale v4 (*heuristique combinatoire*) : une propriété qui dépend uniquement du rapport entre niveaux se transpose à tous les couples de niveaux ayant le même rapport.
- L'imbrication récursive (*Théorème 49*) fournit le support structural du transport : ce qui est transporté d'un niveau à l'autre, c'est la structure interne des grains, qui admet une lecture récursive.

Les deux mécanismes (transposabilité et récursion) sont deux facettes du même phénomène : la cohérence stratale du programme du grain.

9.4.2 Lien avec la construction pragmatique des réels

Remarque 61 (Cohérence avec la promotion stratale). *Le mécanisme d'identification $\epsilon = 2\pi = C_1$ (*Principe 2*) est cohérent avec la promotion stratale de la construction pragmatique des réels (cf. document correspondant) :*

- Un grain apparaît comme épaisseur élémentaire à un niveau de résolution.
- Le même grain, vu à un niveau plus fin, révèle sa structure interne (ici, un cercle avec sa propre factorisation).

L'imbrication récursive est ainsi l'expression géométrique de la promotion stratale : ce qui se manifeste comme un point ponctuel à un niveau devient une structure étendue et factorisable au niveau plus fin.

9.4.3 Lien avec le déploiement axiomatique

Remarque 62 (Structure émergente du déploiement). *Le déploiement introduit dans l'axiomatique du grain apparaît, à la lumière des résultats de ce document, comme le mécanisme qui engendre la récursion stratale :*

- Chaque déploiement à la résolution $-kn_\infty$ produit un segment de longueur $2\pi \cdot 2^{kn_\infty}$.
- Cette longueur admet une factorisation imbriquée récursive jusqu'à la résolution de base $-n_\infty$.
- L'ensemble forme une hiérarchie cohérente, où chaque niveau est reliée aux autres par transposabilité et imbrication.

Le déploiement axiomatique n'est donc pas seulement une opération géométrique : il structure la récursivité stratale de tout le programme.

9.5 Le continu comme objet stratifié

Parallèlement à l'analyse non standard, la *refactorisation du grain* propose une construction *géométrique et graduée* du continu linéaire. Son apport propre n'est pas de sortir du cadre ensembliste usuel, mais d'y ajouter une dimension absente des constructions classiques : la *relativité de l'unité* selon le niveau d'observation. Pour simplifier l'exposé on se place sur un situs diamétral ; cela ne change rien au raisonnement.

Définition 76 (Factorisation d'un continu à une résolution). *Tout continu linéaire $\mathcal{L}$ observé à une résolution donnée se factorise en un triplet $(\mathcal{L}, |\mathcal{L}|, \epsilon)$: longueur totale, nombre de grains élémentaires, épaisseur d'un grain, liés par la relation fondamentale*

$$\boxed{\mathcal{L} = |\mathcal{L}| \cdot \epsilon.}$$

Proposition 51 (Trois factorisations équivalentes). *Un même continu linéaire admet, selon le niveau d'observation, les trois écritures*

$$f_1 = \left(1, 2^{n_\infty}, \frac{1}{2^{n_\infty}}\right) \simeq f_2 = \left(1, 2^{2n_\infty}, \frac{1}{2^{2n_\infty}}\right) \simeq f_3 = \left(2^{n_\infty}, 2^{n_\infty}, \left(1, 2^{n_\infty}, \frac{1}{2^{n_\infty}}\right)\right)$$

où $\simeq$ désigne l'équivalence « même continu $\mathcal{L}$, factorisé à des résolutions distinctes ». Chaque triplet vérifie $\mathcal{L} = |\mathcal{L}| \cdot \epsilon$.

Démonstration. Vérification de la relation fondamentale sur chaque écriture : $f_1 : 2^{n_\infty} \cdot 2^{-n_\infty} = 1$; $f_2 : 2^{2n_\infty} \cdot 2^{-2n_\infty} = 1$; f_3 prend pour unité le grain de f_1 (de mesure 2^{-n_∞}) et compte 2^{n_∞} telles unités, d'où la longueur 2^{n_∞} dans ses propres unités. Les trois décrivent le même $\mathcal{L}$, réindexé. $\square$

Théorème 50 (Relativité de l'unité). *Le rôle d'unité est relatif au niveau d'observation. Ce qui est l'unité (le tout, le cardinal de référence) à la résolution $-n_\infty$ devient un ensemble de 2^{n_∞} sous-unités à la résolution $-2n_\infty$:*

$$\underbrace{1}_{\text{unité à } -n_\infty} \simeq \underbrace{2^{n_\infty} \text{ grains}}_{\text{à } -2n_\infty},$$

au sens de l'équivalence $f_1 \simeq f_2$ de la proposition 61.

Corollaire 17 (Relativité fini/infini). *Soit X un continu borné. Selon l'unité choisie, la mesure de X passe du fini au transfini, et réciproquement :*

$$\mu_X(X) = 1 \quad (\text{unité} = X \text{ lui-même : mesure finie}),$$

$$\mu_{\text{grain}_{-n_\infty}}(X) = 2^{n_\infty} \quad (\text{unité} = \text{grain fin : mesure transfinie}).$$

Ces deux valeurs mesurent le même continu borné X : ce qui est fini à un niveau d'observation est transfini à un autre, et inversement. La conversion directe (fini $\rightarrow$ transfini) s'opère par le facteur 2^{n_∞} ; la conversion réciproque (transfini $\rightarrow$ fini) par 2^{-n_∞} .

Démonstration. C'est le Théorème 50 lu au moyen de la relation fondamentale $\mathcal{L} = |\mathcal{L}| \cdot \epsilon$. La mesure de X dans une unité u est le nombre de copies de u nécessaires pour couvrir X , c'est-à-dire le cardinal $|\mathcal{L}|$ de la factorisation dont u est l'épaisseur ϵ . Pour $u = X$ (épaisseur $\epsilon = 1$), ce cardinal vaut 1 : $\mu_X(X) = 1$. Pour $u = \text{grain}_{-n_\infty}$ (épaisseur $\epsilon = 2^{-n_\infty}$), ce cardinal vaut 2^{n_∞} : $\mu_{\text{grain}}(X) = 2^{n_\infty}$. Le facteur de conversion entre les deux unités est le rapport des épaisseurs, $1/2^{-n_\infty} = 2^{n_\infty}$ dans le sens direct, 2^{-n_∞} dans le sens réciproque. $\square$

Remarque 63 (L'hypothèse « borné » est essentielle). *La réciproque « transfini $\rightarrow$ fini » ne vaut que pour un continu borné. Un continu non borné — la demi-droite $[0, +\infty[$, par exemple — garde une mesure transfinie dans toute unité : aucun changement de grain ne le ramène au fini, car « borné / non borné » est une propriété intrinsèque, indépendante de l'unité. Le corollaire ne « ramène pas l'infini au fini » en général ; il ne le fait que là où l'objet était déjà borné (le cercle, le segment unité).*

Remarque 64 (Compactifier un non-borné, c'est le ramener au cercle). *On pourrait croire que la demi-droite $\mathbb{R}^+$ « rentre » dans le segment déployé $\tilde{\mathbb{R}}^+ = [0, 2\pi \cdot 2^{n_\infty}[$, et hérite ainsi d'une mesure finie. Il n'en est rien, et la raison éclaire le statut du corollaire.*

Un non-borné ne rentre pas dans un segment. *L'inclusion $\mathbb{R}^+ \subset \tilde{\mathbb{R}}^+$ est fausse : $\tilde{\mathbb{R}}^+$ est borné (il s'arrête à $2\pi \cdot 2^{n_\infty}$), tandis que $\mathbb{R}^+$ ne l'est pas — il contient des éléments dépassant toute borne, en particulier $2\pi \cdot 2^{n_\infty}$ lui-même. Le segment déployé est un cercle déplié (borné, de mesure transfinie) ; $\mathbb{R}^+$ est une droite infinie. Les deux ne s'emboîtent pas : le premier a une extrémité, le second n'en a pas.*

La compactification, elle, fabrique la bornitude. *Pour soumettre $\mathbb{R}^+$ à la réciproque, il faut d'abord le rendre borné, c'est-à-dire le compactifier en lui adjoignant son point à l'infini. L'application*

$$\varphi : \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\} \longrightarrow [0, 1], \quad \varphi(x) = \frac{x}{1+x}, \quad \varphi(+\infty) = 1,$$

envoie $[0, +\infty]$ sur le segment borné $[0, 1]$. La réciproque du corollaire s'applique alors à $[0, 1]$. Mais φ n'est pas une isométrie : elle contracte l'infini (les intervalles $[n, n+1]$, tous de longueur 1, sont tassés vers 1). La bornitude n'est donc pas révélée, elle est fabriquée par une transformation qui change la métrique — ce n'est pas un simple changement d'unité.

Et la compactification naturelle est le cercle. *La compactification en un point de la droite réelle est précisément un cercle : $\mathbb{R} \cup \{\infty\} \cong S^1$.*

Compactifier un non-borné pour lui appliquer la relativité fini/infini revient donc à le ramener sur un cercle — l'objet fondamental du programme, dont le déploiement est justement $\widetilde{\mathbb{R}}^+$. On boucle : le domaine naturel de la réciproque n'est pas la droite, mais le compact, et le compact canonique de ce travail est le cercle C_1 .

Remarque 65 (Formulation de synthèse). *La relativité fini/infini (Corollaire 17) a pour domaine naturel les continus compacts. Sa réciproque « transfini $\rightarrow$ fini » ne s'applique qu'à eux ; y soumettre un non-borné exige une compactification, laquelle le ramène à un cercle. Ce que l'on prenait pour une limitation du corollaire (« pourquoi pas les non-bornés ? ») est en réalité une propriété structurante : le cercle est le lieu propre de la relativité de l'unité, et tout objet non borné doit d'abord y être rapporté.*

Remarque 66 (Les deux sens ne sont pas de même statut). *À la différence de la conversion mètres/centimètres — où les deux facteurs (100 et 1/100) sont des standards finis — les deux sens de la relativité fini/infini ont un statut différent :*

$$\underbrace{\text{fini} \xrightarrow{\times 2^{n\infty}} \text{transfini}}_{\text{facteur transfini}}, \quad \underbrace{\text{transfini} \xrightarrow{\times 2^{-n\infty}} \text{fini}}_{\text{facteur infinitésimal}}.$$

La montée se fait par un transfini, la descente par un infinitésimal $2^{-n\infty}$ (dont le statut — inversible ou non — dépend de la strate, cf. le chapitre sur $\widetilde{\mathbb{R}}$). C'est cette asymétrie de statut qui distingue la relativité de l'unité stratale de la simple conversion métrique : le facteur y franchit la frontière fini/infini, il ne reste pas dans le fini standard.

Remarque 67 (Relativité des mesures, non transmutation de l'objet). *Le corollaire porte sur des mesures relatives, non sur la nature de X . Il ne dit pas que « le transfini devient fini » dans l'absolu, mais que le même objet borné, changé d'unité, passe d'une mesure finie à une mesure*

transfinie. L'égalité sous-jacente est une conversion à unités explicites,

$$1 \cdot [\text{unité } X] = 2^{n_\infty} \cdot [\text{unité grain}_{-n_\infty}],$$

sur le modèle de « 1 m = 100 cm » — la nouveauté n'étant pas la forme de l'égalité, mais le caractère transfini du facteur (Remarque 66).

Remarque 68 (Mesure relative à une unité). Une longueur n'a pas de valeur absolue : elle a une valeur relative à une unité. Notons $\mu_u(X)$ la mesure d'un continu X lorsque l'unité de longueur est u . Le même segment C_1 prend alors, selon l'unité choisie, trois valeurs :

$$\mu_{C_1}(C_1) = 1, \quad \mu_{\text{grain}_{-n_\infty}}(C_1) = 2^{n_\infty}, \quad \mu_{\text{grain}_{-2n_\infty}}(C_1) = 2^{2n_\infty}.$$

La relativité de l'unité (Théorème 50) est exactement la conversion d'unités correspondante :

$1 \cdot [\text{unité } C_1] = 2^{n_\infty} \cdot [\text{unité grain}_{-n_\infty}] = 2^{2n_\infty} \cdot [\text{unité grain}_{-2n_\infty}].$
--

C'est le statut de « 1 m = 100 cm » : l'égalité est vraie parce que les unités sont écrites des deux côtés.

Remarque 69 (Ni « $1 = 2^{n_\infty}$ », ni « $1 \equiv 2^{n_\infty}$ »). On prendra garde à ne pas omettre les unités.

- L'égalité nue $1 = 2^{n_\infty}$ est fausse : elle comparerait deux nombres purs, et contredirait l'ordre $1 < 2^{n_\infty}$.
- La congruence $1 \equiv 2^{n_\infty}$ « modulo le niveau d'observation » n'a pas de contenu : une congruence se prend modulo un sous-groupe ($\text{mod } \mathbb{Z}$ signifie « différence entière », $\text{mod } \mathfrak{m}$ « différence infinitésimale »), et un « niveau » n'en est pas un. De fait $2^{n_\infty} - 1$ n'est ni un entier ni un infinitésimal (il est transfini) : aucun sous-groupe naturel ne rend 1 et 2^{n_∞} congrus.

La bonne écriture n'est donc ni « = » ni « ≡ » flou, mais « 1 unité- $C_1 = 2^{n_\infty}$ grains » : une conversion assumée, avec les unités explicites. Elle ne met en jeu que des mesures de longueur, et non l'ordre des ordinaux ; l'axiome 3 n'est donc pas concerné.

On observe que la conversion de grain diffère de la conversion mètres/centimètres : son facteur 2^{n_∞} est *transfini*, et non un entier standard. Le passage de l'unité au grain franchit donc la frontière fini/infini, là où la conversion métrique reste dans le fini standard.

Théorème 51 (Mesure transfinie d'un continu borné). *Soit C_1 le cercle unité, de circonférence 1 dans sa propre unité. Mesuré en grains de résolution $-n_\infty$, il occupe un segment déployé $\tilde{\mathbb{R}}^+ = [0, 2\pi \cdot 2^{n_\infty}[$, dont la « longueur » en grains est le transfini 2^{n_∞} :*

$$\mu_{C_1}(C_1) = 1 \quad \text{tandis que} \quad \mu_{\text{grain}}(C_1) = 2^{n_\infty}.$$

Le continu reste borné ; seule sa mesure passe du fini au transfini selon l'unité choisie.

Théorème 52 (Retour au fini — réciproque par changement d'unité). *Réciproquement, un continu dont la mesure en grains est le transfini 2^{n_∞} retrouve une mesure finie (égale à 1) dès qu'on prend pour unité le continu lui-même. La conversion inverse $\mu_{\text{grain}} \rightarrow \mu_{C_1}$ ramène le transfini au fini par le facteur 2^{-n_∞} .*

Remarque 70 (La tour des mesures est cohérente). *Les trois valeurs d'un même segment,*

$$1 < 2^{n_\infty} < 2^{2n_\infty},$$

ne sont pas égales, et c'est normal : ce sont les mesures du même objet dans des unités de plus en plus fines, donc des nombres de plus en plus grands. Leur relation est une pure conversion :

$$2^{n_\infty} = 1 \times (\text{nombre de grains } -n_\infty \text{ dans le segment}),$$

$$2^{2^{n_\infty}} = 2^{n_\infty} \times (\text{grains fins dans un grain } -n_\infty).$$

L'ordre $1 < 2^{n_\infty} < 2^{2^{n_\infty}}$ est respecté, et rien ne se contredit : la relativité de l'unité est une hiérarchie de conversions, non une suite d'égalités absolues.

Remarque 71 (Observation depuis $-3n_\infty$: la relativité monte d'un étage). En prenant $-3n_\infty$ comme niveau d'observation, on reconstitue le segment de niveau $-2n_\infty$ comme unité linéaire, subdivisée en 2^{n_∞} grains de niveau $-n_\infty$ (c'est la factorisation f_3). La longueur de ce segment vaut alors

$$\mu_{\text{grain}_{-n_\infty}}(\text{segment}) = 2^{n_\infty}, \quad \text{tandis que} \quad \mu_{\text{segment}}(\text{segment}) = 1.$$

On retrouve exactement le schéma « 1 unité = 2^{n_∞} sous-unités », mais un cran plus haut dans la tour : l'unité est ici le grain $-n_\infty$ (au lieu du grain fin $-2n_\infty$). Ce passage confirme la relativité de l'unité ; il ne produit pas une égalité absolue « $1 = 2^{n_\infty}$ ». La règle est invariante à tous les étages : l'unité étant nommée, « vaut 2^{n_∞} » est vrai ; l'unité étant omise, « = 2^{n_∞} » redevient l'erreur du mètre et du centimètre.

Remarque 72 (Position vis-à-vis de ZFC et de l'analyse non standard). La refactorisation est parallèle à l'analyse non standard, et de même nature quant au statut logique : comme l'analyse non standard (ultrapuissance, compacité), elle est une construction interne à la théorie ensembliste usuelle, non un dépassement de celle-ci. Les objets manipulés (2^{kn_∞} , mesures dyadiques $k \cdot 2^{-n_\infty}$) sont ceux que ZFC construit ; la refactorisation réindexe un continu déjà disponible, elle ne décide aucun énoncé que ZFC laisserait indécidable.

Son apport propre est ailleurs, et il est réel : là où l'analyse non standard n'offre qu'un seul niveau d'infinitésimaux, la refactorisation fournit une hiérarchie graduée de résolutions $-kn_\infty$ et une lecture géométrique de la relativité fini/infini. Le continu n'y est plus un objet à propriétés fixes, mais un objet stratifié dont l'unité, le cardinal et la finesse dépendent du niveau d'observation.

Conclusion

Ce document a consigné deux résultats structurels sur les factorisations stratales du programme du grain :

- Le *Principe de transposabilité cardinal/dilatation* (Principe 1) : une partie du cardinal peut être redistribuée comme facteur de dilatation de la longueur, donnant des factorisations congruentes modulo la bijection de déploiement.
- Le *Théorème d'imbrication récursive* (Théorème 49) : la factorisation à une résolution grossière contient une copie de la factorisation à la résolution fine comme épaisseur élémentaire, formant une structure hiérarchique récursive.

Ces deux résultats, structurellement indépendants mais complémentaires, consolident la *cohérence interne* du programme du grain. Ils s'articulent avec le transport métrique stratal, la construction pragmatique des réels, et le mécanisme axiomatique du déploiement.

La lecture récursive stratale qui en émerge suggère que le programme du grain n'est pas une simple superposition de niveaux, mais une *structure hiérarchique cohérente* où chaque niveau contient récursivement les niveaux plus fins, articulés par les mécanismes de factorisation et de transport.

Chapitre 10

Construction pragmatique des réels

Préambule

Ce chapitre propose une *construction pragmatique* des nombres réels dans le cadre du programme du grain. Cette construction est complémentaire à la construction algébrique de $\mathbb{R}$ comme corps déjà établie, et compatible avec les constructions classiques (coupures de Dedekind, suites de Cauchy).

Statut. La construction pragmatique stratale est un *objet nouveau*, qui n'a pas d'analogue direct dans les constructions classiques. Elle s'appuie sur la *relativité du statut des réels* : un nombre réel n'a pas de propriétés absolues, mais des propriétés *relatives au niveau de résolution* où on l'observe.

Nature de la construction. La construction est :

- *Effective* : elle produit explicitement les objets, par un mécanisme géométrique de stratification.

- *Opérationnelle* : elle définit les réels par les opérations qu'on peut effectuer sur eux à chaque niveau de résolution.

Méthode d'étalonnage. On étalonne d'abord la construction sur le cercle unité (de circonférence 1), puis on l'étend au diamètre, et enfin à tout objet stratifiable.

Référence implicite. Programme du grain (Volumes I-III), et les notes sur la stratification fonctionnelle, la rectification stratale, et la métrique stratale.

10.1 Position du problème

10.1.1 Quatre constructions des réels

Le programme du grain admet désormais trois constructions des nombres réels, complémentaires et compatibles :

- **Construction algébrique.** $\mathbb{R}$ est construit comme corps, par les structures algébriques classiques. C'est la construction la plus abstraite et la plus universelle.
- **Constructions classiques (Dedekind, Cauchy).** Coupures de $\mathbb{Q}$ ou classes d'équivalence de suites convergentes. Constructions par complétion topologique.
- **Construction non-standard.** développée en application du programme du grain.
- **Construction pragmatique stratale.** Nouvelle approche propre au programme du grain : les réels comme objets stratifiés dont les propriétés dépendent du niveau de résolution.

10.1.2 Pourquoi une construction pragmatique

Remarque 73 (Motivation). *Les constructions classiques produisent les réels comme objets absolus, indépendants de toute représentation.*

La construction algébrique en fait des éléments d'une structure abstraite (corps).

La construction pragmatique adopte une perspective différente : elle reconnaît qu'un réel est toujours observé à un niveau de résolution donné, et que ses propriétés (mesure, extension, cardinalité) sont relatives à ce niveau.

Cette perspective permet de répondre à des objections épistémologiques sur le statut des réels : un grain ponctuel de mesure nulle au niveau supérieur n'est pas un objet « sans substance », il devient un grain étendu de mesure non nulle au niveau inférieur. La « disparition » apparente est un effet de la représentation, pas une propriété intrinsèque de l'objet.

10.1.3 Statut épistémologique

Remarque 74 (Objet nouveau, compatible avec les approches classiques). *La construction pragmatique stratale est un objet nouveau : elle n'identifie pas un réel à une coupure de $\mathbb{Q}$ ni à une classe de suites convergentes, mais à une famille de représentations stratales aux différents niveaux de résolution.*

Cependant, elle est compatible avec les constructions classiques :

- *L'opération de partie standard (cf. note sur la partie standard) relie la famille stratale d'un réel à sa coupure canonique de Dedekind.*
- *Les suites de Cauchy classiques correspondent aux suites stratales d'un réel : chaque représentant au niveau k est un terme de la suite.*

Aucune des constructions classiques n'est invalidée. La construction pragmatique les enrichit en y ajoutant la dimension stratale.

10.2 Étalonnage sur le cercle unité

10.2.1 Choix de l'étalon

Définition 77 (Cercle unité de référence). *On choisit comme étalon initial le cercle unité C_1 de circonférence 1 (et donc de rayon $1/(2\pi)$).*

Ce choix particulier (circonférence 1 plutôt que 2π) simplifie l'écriture des mesures stratales et permet d'établir une correspondance directe avec le système décimal stratal.

Remarque 75 (Pourquoi la circonférence unitaire). *Avec une circonférence de 1, la stratification du cercle à résolution $-kn_\infty$ donne 2^{kn_∞} grains d'épaisseur élémentaire $1/2^{kn_\infty}$. Le développement « décimal » (en base 2) de la mesure d'un grain admet alors une lecture directe : sa position ℓ est codée par les chiffres après la virgule, sans facteur multiplicatif parasite. Au niveau de résolution $-kn_\infty$, on trouve $-kn_\infty$ chiffre après la virgule.*

10.2.2 Stratification à résolution $-n_\infty$

Proposition 52 (Mosaïque à résolution $-n_\infty$). *À résolution $-n_\infty$, le cercle unité C_1 se factorise comme :*

$$C_1 = \left(1, 2^{n_\infty}, \frac{1}{2^{n_\infty}}\right).$$

La mosaïque $\mathcal{B}_{-n_\infty} \simeq \mathcal{G}_{-n_\infty}$ comporte 2^{n_∞} grains $b_{k,-n_\infty}$ ($k = 1, \dots, 2^{n_\infty}$), chacun de mesure $1/2^{n_\infty}$.

À ce niveau de résolution, chaque grain $b_{k,-n_\infty}$ apparaît comme un point ponctuel : sa mesure $1/2^{n_\infty}$ est un infinitésimal de niveau n_∞ , qui se présente comme une mesure « nulle » au sens des observations à résolution standard.

10.3. LE MÉCANISME CENTRAL : PASSAGE DE MESURE NULLE À MESURE NON NULLE

10.2.3 Stratification à résolution $-2n_\infty$

Proposition 53 (Mosaïque à résolution $-2n_\infty$). *À résolution $-2n_\infty$, le même cercle C_1 se factorise comme :*

$$C_1 = \left(1, 2^{2n_\infty}, \frac{1}{2^{2n_\infty}} \right).$$

La mosaïque $\mathcal{B}_{-2n_\infty} \simeq \mathcal{G}_{-2n_\infty}$ comporte 2^{2n_∞} sous-grains de mesure $1/2^{2n_\infty}$.

Chaque grain $b_{k,-n_\infty}$ de la mosaïque grossière contient exactement 2^{n_∞} sous-grains de la mosaïque fine :

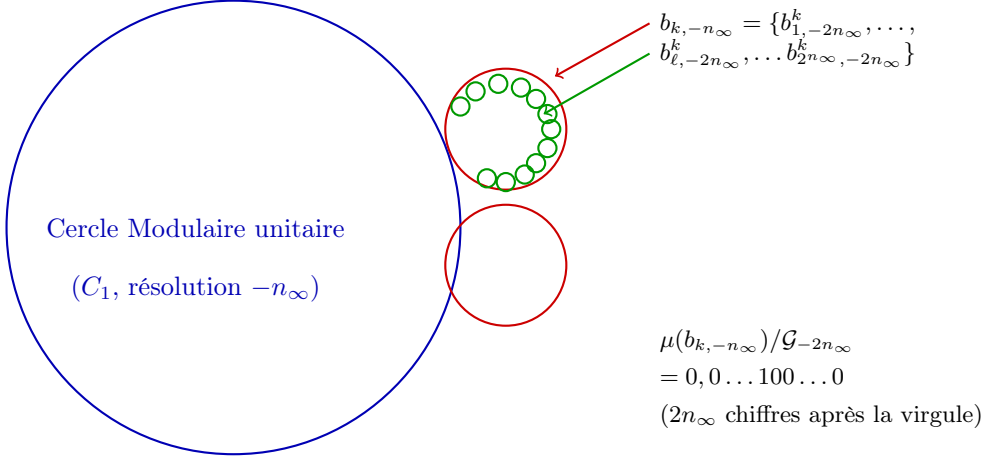
$$b_{k,-n_\infty} = \{b_{1,-2n_\infty}^k, \dots, b_{\ell,-2n_\infty}^k, \dots, b_{2^{n_\infty},-2n_\infty}^k\}.$$

À ce niveau de résolution, le grain $b_{k,-n_\infty}$ apparaît comme un objet étendu : sa mesure $\mu(b_{k,-n_\infty})$ vaut $2^{n_\infty}/2^{2n_\infty} = 1/2^{n_\infty}$, qui est non nulle au niveau $-2n_\infty$.

10.3 Le mécanisme central : passage de mesure nulle à mesure non nulle

10.3.1 Représentation graphique

La figure suivante illustre le mécanisme de promotion stratale. Le grand cercle (Cercle Modulaire) représente le cercle unité à résolution $-n_\infty$. Les deux petits cercles rouges (zoom) représentent un grain particulier $b_{k,-n_\infty}$ vu à résolution $-2n_\infty$, contenant ses 2^{n_∞} sous-grains.



10.3.2 Le développement décimal stratal

Proposition 54 (Expression décimale de la mesure stratée). *La mesure du grain $b_{k,-n_\infty}$ exprimée dans le système de résolution $\mathcal{G}_{-2n_\infty}$ admet le développement décimal binaire :*

$$\frac{\mu(b_{k,-n_\infty})}{\mathcal{G}_{-2n_\infty}} = 0,0 \dots 100 \dots 0$$

avec $2n_\infty$ chiffres après la virgule, le chiffre 1 occupant une position précise déterminée par l'indice k et la cardinalité de la mosaïque fine.

Remarque 76 (Lecture du développement). *Le développement $0,0 \dots 100 \dots 0$ représente :*

- Les premiers chiffres « 0 » avant le « 1 » : la position du grain dans la mosaïque grossière (codage à résolution $-n_\infty$).
- Le chiffre « 1 » : l'indication que le grain est présent (non nul).
- Les chiffres « 0 » après le « 1 » : la structure interne du grain à résolution fine (sous-grains).

10.3. LE MÉCANISME CENTRAL : PASSAGE DE MESURE NULLE À MESURE NON NULLE

À résolution $-n_\infty$, seuls les premiers n_∞ chiffres sont visibles : on perçoit le grain comme ponctuel (la position précise est encodée mais sans étendue interne).

À résolution $-2n_\infty$, les $2n_\infty$ chiffres sont visibles : on perçoit la position grossière du grain et sa structure interne (qui constitue son extension).

10.3.3 Le mécanisme de promotion stratale

Théorème 53 (Promotion stratale d'un grain). *Pour tout grain $b_{k,-n_\infty}$ de la mosaïque grossière, le passage du niveau de résolution $-n_\infty$ au niveau $-2n_\infty$ effectue une promotion stratale :*

$(\text{grain ponctuel, mesure nulle}) \xrightarrow{\text{passage } -n_\infty \rightarrow -2n_\infty} (\text{grain étendu, mesure non nulle}).$

Plus précisément :

- À résolution $-n_\infty$: $b_{k,-n_\infty}$ est un objet ponctuel sans structure interne perceptible. Sa mesure est $1/2^{n_\infty}$, infinitésimale au sens standard.
- À résolution $-2n_\infty$: $b_{k,-n_\infty}$ est un objet étendu contenant 2^{n_∞} sous-grains. Sa mesure est $1/2^{n_\infty}$, non nulle au niveau de résolution considéré.

La promotion conserve quantitativement la mesure ($1/2^{n_\infty}$ dans les deux cas), mais elle change qualitativement son statut (« nul standard » vs « non nul stratal »).

Démonstration. Conséquence directe des Propositions 52 et 53. Le calcul de la mesure donne $1/2^{n_\infty}$ dans les deux cas, mais ce nombre est :

- Infinitésimal d'ordre n_∞ vu de la résolution $-n_\infty$ (où l'épaisseur élémentaire est $1/2^{n_\infty}$ également) : il se réduit à une « ponctualité ».

- Non nul vu de la résolution $-2n_\infty$ (où l'épaisseur élémentaire est $1/2^{2n_\infty}$, plus fine que la mesure considérée) : il acquiert une étendue détectable.

□

10.3.4 Interprétation comme changement de représentation

Remarque 77 (Lecture épistémologique). *Le mécanisme de promotion stratale n'est pas une transformation ontologique du grain : le grain $b_{k,-n_\infty}$ ne « change » pas de nature en passant d'une résolution à l'autre.*

C'est un changement de représentation : le même objet est représenté différemment selon le niveau d'observation. Sa mesure intrinsèque (calculable à tout niveau suffisamment fin) est $1/2^{n_\infty}$. Mais l'apparence de cette mesure (nulle ou non nulle) dépend du système de référence.

Cette lecture s'inscrit dans une perspective générale de relativité du statut des réels : les propriétés d'un nombre réel ne sont pas absolues, elles dépendent du niveau de résolution où on l'observe.

10.4 La relativité du statut des réels

10.4.1 Le principe général

Principe 3 (Relativité stratale). *Toutes les propriétés d'un nombre réel — mesure, extension, cardinalité, ainsi que d'autres attributs métriques ou structuraux — sont relatives au niveau de résolution où on l'observe.*

Aucune propriété n'est intrinsèquement absolue. Le nombre réel n'est pas un objet à propriétés fixes, mais une famille de représentations stratales aux différents niveaux.

Remarque 78 (Conséquences du principe). *Le Principe 4 a plusieurs conséquences :*

- Un même réel peut être de mesure nulle à un niveau et non nulle à un autre, sans contradiction (Théorème 53).
- Un même continu peut avoir des cardinalités différentes selon le mode de décompte (positionnel ou combinatoire, cf. chapitre sur la stratification fonctionnelle).
- L'extension d'un grain dépend du niveau d'observation (ponctuelle ou étendue).

Cette relativité ne fragilise pas la notion de nombre réel : elle l'enrichit en révélant ses différentes facettes selon le niveau d'analyse.

10.4.2 Compatibilité avec les constructions classiques

Proposition 55 (Lien avec Dedekind). *La construction pragmatique stratale est compatible avec les coupures de Dedekind. À toute famille stratale $\{b_{k,-mn_\infty}\}_{m \geq 1}$ correspondant à un réel x , la partie standard de la suite des mesures donne la coupure de Dedekind canonique :*

$$\text{st} \left(\bigcup_m b_{k,-mn_\infty} \right) = \{q \in \mathbb{Q} : q < x\}.$$

La coupure classique est ainsi récupérée comme limite standard de la construction stratale, sans contradiction avec les axiomes de Dedekind.

Proposition 56 (Lien avec Cauchy). *La construction pragmatique stratale est compatible avec les suites de Cauchy. La famille stratale $\{b_{k,-mn_\infty}\}_{m \geq 1}$ d'un réel x correspond à une suite stratale de représentants, où chaque grain au niveau $-mn_\infty$ est un terme de la suite.*

La condition de Cauchy classique est automatiquement satisfaite : deux représentants $b_{k,-mn_\infty}$ et $b_{k,-m'n_\infty}$ (à $m, m' \geq m_0$) sont à distance infinitésimale.

Le réel x classique est récupéré comme la partie standard de la suite stratale.

Remarque 79 (Le diagramme de compatibilité). *On peut résumer la compatibilité avec le diagramme suivant :*

Construction stratale $\longrightarrow$ Partie standard $\longrightarrow$ Construction classique

Famille $\{b_{k,-mn_\infty}\}_m$

Opération st

Coupure / Suite Cauchy

La construction stratale est plus fine que la classique : elle conserve la structure de hiérarchie stratale, alors que la partie standard la réduit à un objet unique (le réel classique).

10.4.3 Distinction avec l'analyse non-standard

Remarque 80 (Comparaison avec Robinson). *La construction pragmatique stratale partage des traits avec l'analyse non-standard (Robinson, 1960), mais s'en distingue :*

- Point commun : *Toutes deux travaillent avec des infinitésimaux et opèrent dans un cadre plus large que $\mathbb{R}$.*
- Différence 1 : *L'analyse non-standard de Robinson construit son cadre par ultraproduit et théorie des modèles ; la construction stratale opère par hiérarchisation géométrique des niveaux de résolution.*
- Différence 2 : *L'analyse non-standard a un seul niveau d'infinitésimaux ($\mathbb{R}^*$) ; la construction stratale en a une hiérarchie graduée ($\mathcal{G}_{-kn_\infty}$ pour $k \geq 1$).*
- Différence 3 : *L'analyse non-standard est essentiellement analytique ; la construction stratale est essentiellement géométrique et opérationnelle.*

Les deux approches sont compatibles et complémentaires, mais elles proposent des perspectives différentes sur les nombres réels.

10.5 Généralisation au-delà du cercle

10.5.1 Du cercle au diamètre

Proposition 57 (Extension au diamètre). *La construction pragmatique étalonnée sur le cercle unité s'étend naturellement au diamètre du cercle (segment de longueur $1/\pi$, ou plus généralement segment unitaire après normalisation).*

Le mécanisme de promotion stratale (Théorème 53) s'applique verbatim au diamètre, en remplaçant la structure cyclique par la structure linéaire.

La mosaïque grossière du diamètre comporte 2^{n_∞} grains de mesure $1/2^{n_\infty}$; la mosaïque fine en comporte $2^{2^{n_\infty}}$ de mesure $1/2^{2^{n_\infty}}$. La promotion stratale opère identiquement.

10.5.2 À toute structure stratifiable

Proposition 58 (Généralisation). *La construction pragmatique stratale, étalonnée sur le cercle unité et étendue au diamètre, s'applique à toute structure stratifiable du programme du grain :*

- *Le plan stratal (Volume II).*
- *Toute mosaïque stratée du programme.*

À chaque fois, le même mécanisme de promotion stratale opère : un grain ponctuel à un niveau de résolution devient un grain étendu au niveau plus fin, sans changement ontologique mais par changement de représentation.

Remarque 81 (Universalité de la construction). *La construction pragmatique stratale n'est donc pas un mécanisme particulier au cercle ou au diamètre, mais un principe général qui régit tout objet stratifiable du programme. Le cercle et le diamètre servent d'étalons initiaux pour calibrer la construction, mais le mécanisme se généralise sans restriction.*

C'est conforme à l'esprit du programme du grain : un seul mécanisme structurel (la stratification multiplicative) gouverne toutes les constructions, et la construction pragmatique en est une expression particulière dans le domaine des nombres réels.

10.6 $\mathbb{R}$ est un corps : preuve géométrique par Thalès

On a construit $\tilde{\mathbb{R}}$ comme *anneau* (commutatif, unitaire, intègre), dont les seules unités sont les puissances de 2. Le corps des réels est obtenu par promotion

$$\mathbb{R} = \tilde{\mathbb{R}}_{\text{fin}}/\mathfrak{m},$$

où $\tilde{\mathbb{R}}_{\text{fin}}$ est la *partie finie* (éléments de valeur absolue majorée par un standard) et $\mathfrak{m}$ l'ensemble des *infinitésimaux*. Cette section démontre que ce quotient est bien un *corps*, sans supposer l'inversibilité que l'on veut établir. La preuve suit l'esprit géométrique du programme : l'inverse est construit à la règle par le théorème de Thalès, mais *au niveau des grains*, ce qui fournit exactement le lemme de densité dont découle la maximalité de $\mathfrak{m}$.

Mise en garde méthodologique. Appliqué directement « dans $\mathbb{R}$ », le théorème de Thalès *suppose* le corps : l'existence du point d'intersection des droites auxiliaires équivaut à la résolubilité d'un système linéaire, c'est-à-dire à l'inversibilité dans le corps de coordonnées. On ne l'emploie donc pas pour *fonder* $\mathbb{R}$, mais au niveau des grains, où il produit un *quasi-inverse* à un *infinitésimal près* — énoncé qui, lui, n'est pas circulaire et entraîne le résultat.

10.6.1 Cadre : partie finie, infinitésimaux, projection standard

Définition 78 (Partie finie). $\widetilde{\mathbb{R}}_{\text{fin}} := \{X \in \widetilde{\mathbb{R}} : \exists c \in \mathbb{R}_{>0} \text{ standard, } |X| \leq c\}$.

Définition 79 (Infinitésimaux). $\mathfrak{m} := \{X \in \widetilde{\mathbb{R}}_{\text{fin}} : \forall c \in \mathbb{R}_{>0} \text{ standard, } |X| < c\}$, i.e. les éléments X tels que $\text{st}(|X|) = 0$.

Proposition 59 ($\widetilde{\mathbb{R}}_{\text{fin}}$ est un sous-anneau, $\mathfrak{m}$ un idéal). $\widetilde{\mathbb{R}}_{\text{fin}}$ est un sous-anneau de $\widetilde{\mathbb{R}}$, et $\mathfrak{m}$ en est un idéal.

Démonstration. Sous-anneau. Si $|X| \leq c$ et $|Y| \leq c'$ (bornes standards), alors $|X \pm Y| \leq c + c'$ et $|XY| \leq cc'$: bornes standards. Donc $\widetilde{\mathbb{R}}_{\text{fin}}$ est stable par $+$, $-$, $\times$, et contient $0, 1$.

Idéal. Si $X, Y \in \mathfrak{m}$, alors $\text{st}(|X + Y|) \leq \text{st}(|X|) + \text{st}(|Y|) = 0$, donc $X + Y \in \mathfrak{m}$. *Absorption* : si $X \in \mathfrak{m}$ et $A \in \widetilde{\mathbb{R}}_{\text{fin}}$ avec $|A| \leq c$ standard, alors $|AX| \leq c|X|$, donc $\text{st}(|AX|) \leq c \cdot \text{st}(|X|) = 0$, soit $AX \in \mathfrak{m}$. $\square$

Remarque 82 (Pourquoi la restriction à la partie finie). *L'absorption échoue sur la tour entière : $2^{-2n\infty} \in \mathfrak{m}$ mais $2^{-2n\infty} \cdot 2^{2n\infty} = 1 \notin \mathfrak{m}$, car le facteur $2^{2n\infty}$ est transfini, non fini. C'est la restriction à $\widetilde{\mathbb{R}}_{\text{fin}}$ qui rend $\mathfrak{m}$ absorbant, donc idéal.*

Définition 80 (Projection standard). $\text{st} : \widetilde{\mathbb{R}}_{\text{fin}} \rightarrow \mathbb{R}$ associe à X l'unique réel r tel que $X - r \in \mathfrak{m}$ (partie standard). Par construction $\ker(\text{st}) = \mathfrak{m}$ et st est un morphisme d'anneaux.

10.6.2 Le théorème de Thalès au niveau des grains

On travaille sur le situs (diamétral) muni de l'unité 1 et des grains $x = (\text{valeur } |x|, \text{ signe})$. La construction classique de l'inverse par triangles semblables se transcrit ainsi.

Lemme 1 (Construction de Thalès, version granulaire). *Soit x un grain fini non infinitésimal, de partie standard $r := \text{st}(|x|) > 0$. La construction de Thalès (droites auxiliaires portant les longueurs 1 et x , parallèle coupant l'axe unité) désigne un point P d'abscisse exacte $1/r \in \mathbb{R}$. Il existe alors un grain h tel que*

$$\left| h - \frac{1}{r} \right| < 2^{-n_\infty}, \quad \text{donc} \quad \text{st}(h) = \frac{1}{r}.$$

Démonstration. La construction de Thalès place, sur l'axe unité, le point P tel que $\overline{OP} \cdot \overline{Ox} = \overline{O1}^2$ (moyenne proportionnelle / triangles semblables), soit $\overline{OP} = 1/r$ dès que $\overline{Ox} = r$ et $\overline{O1} = 1$. Le point P est un point du situ *standard* (abscisse réelle $1/r$), non nécessairement un grain.

Le grain h annoncé est le grain le plus proche de P : par la finesse de la mosaïque, tout réel de la partie finie est encadré par deux grains consécutifs distants de 2^{-n_∞} (pas de la grille), donc l'un d'eux, h , vérifie $|h - 1/r| < 2^{-n_\infty}$. Comme $2^{-n_\infty} \in \mathfrak{m}$, on a $\text{st}(h) = 1/r$. $\square$

Remarque 83 (Où Thalès « sort de la grille »). *Le point P n'est en général pas un grain : pour $x = 3 \cdot 2^{-n_\infty}$ (donc $r = 3$ à l'échelle voulue), P a pour abscisse $1/3$, qui n'est un grain à aucune résolution ($3 \nmid 2^k$). C'est exactement le « trou » de l'anneau. La construction ne le comble pas dans $\mathbb{R}$; elle fournit seulement le grain voisin h à 2^{-n_∞} près. C'est suffisant pour le quotient, et c'est là tout le sel de la preuve : on ne prétend pas $xh = 1$ dans l'anneau, mais $\text{st}(xh) = 1$.*

10.6.3 Le lemme de densité

Lemme 2 (Surjectivité de st / densité des grains). *$\text{st} : \widetilde{\mathbb{R}}_{\text{fin}} \rightarrow \mathbb{R}$ est surjective : tout réel s est la partie standard d'un grain (les grains dyadiques $k \cdot 2^{-n_\infty}$ approchent tout réel fini à 2^{-n_∞} près).*

Démonstration. Pour $s \in \mathbb{R}$ (fini), le grain $h := \lfloor s \cdot 2^{n_\infty} \rfloor \cdot 2^{-n_\infty}$ vérifie $|h - s| < 2^{-n_\infty}$, donc $\text{st}(h) = s$. (C'est l'approximation binaire à n_∞ chiffres, i.e. la définition même des grains.) $\square$

Remarque 84. *Le lemme 1 est le cas particulier $s = 1/r$ de la densité, obtenu géométriquement par Thalès. La densité générale (lemme 2) en est l'ossature arithmétique. Les deux disent la même chose : st atteint tout réel.*

10.6.4 $\mathfrak{m}$ est maximal, donc $\mathbb{R}$ est un corps

Théorème 54 (Maximalité de $\mathfrak{m}$). *$\mathfrak{m}$ est un idéal maximal de $\widetilde{\mathbb{R}}_{\text{fin}}$. De façon équivalente : tout $X \in \widetilde{\mathbb{R}}_{\text{fin}} \setminus \mathfrak{m}$ est inversible modulo $\mathfrak{m}$.*

Démonstration. Soit X fini non infinitésimal, $r := \text{st}(|X|) > 0$. Par le lemme 1 (ou 2 avec $s = 1/r$), il existe un grain h avec $\text{st}(h) = 1/r$; quitte à ajuster le signe, on prend $Y := (\sigma_X, h)$, de sorte que $\text{st}(Y) = 1/r$ avec le bon signe. Comme st est un morphisme d'anneaux (déf. 80),

$$\text{st}(XY) = \text{st}(X) \text{st}(Y) = (\pm r) \cdot (\pm 1/r) = 1,$$

donc $XY - 1 \in \mathfrak{m}$, i.e. $XY \equiv 1 \pmod{\mathfrak{m}}$. Ainsi la classe de X est inversible dans le quotient. Un idéal dont tout élément extérieur est inversible modulo lui est maximal. $\square$

Corollaire 18 ($\mathbb{R}$ est un corps). $\mathbb{R} = \widetilde{\mathbb{R}}_{\text{fin}}/\mathfrak{m}$ est un corps. En particulier tout réel non nul y admet un inverse.

Démonstration. Le quotient d'un anneau commutatif unitaire par un idéal maximal est un corps (résultat standard). La maximalité est le théorème 54. $\square$

Remarque 85 (Retour sur l'inverse de 3). *L'inversibilité de 3 n'est pas un axiome ni une pétition : elle est un cas particulier du corollaire 18. Concrètement, le grain $g = 0,0101 \dots 01$ (n_∞ chiffres) vérifie $3g = 1 - u$ avec $u = 2^{-n_\infty} \in \mathfrak{m}$; donc $3g \equiv 1 \pmod{\mathfrak{m}}$ et $\text{st}(g) = 1/3 = 3^{-1}$ dans $\mathbb{R}$. Le résidu $-u$, qui interdisait l'inverse dans l'anneau, est précisément ce que le passage au quotient annule. L'anneau garde le trou ; le corps le comble.*

Remarque 86 (Statut de la preuve géométrique). *Le rôle de Thalès est ainsi clarifié : il ne démontre pas que $\mathbb{R}$ est un corps (ce serait circulaire, l'intersection des droites présupposant la division), il réalise géométriquement le quasi-inverse h du lemme 1. C'est ce quasi-inverse — inverse exact à un infinitésimal près — qui, via la maximalité de $\mathfrak{m}$, entraîne le corps. La construction grecque de l'inverse retrouve ainsi sa place, un cran sous le corps : au niveau des grains, comme fournisseur de densité.*

10.7 Statut et perspectives

10.7.1 Ce qui est solide

Le présent chapitre établit, dans un cadre cohérent avec le programme du grain :

- Un *étalonnage rigoureux* sur le cercle unité de circonférence 1.
- Un *mécanisme central* de promotion stratale (Théorème 53).
- Une *compatibilité explicite* avec les constructions classiques de Dedekind et Cauchy.
- Une *généralisation universelle* à toute structure stratifiable.

Ces résultats forment une construction pragmatique stratale des réels qui complète, sans contredire, les approches algébriques et classiques.

10.7.2 Ce qui demande à être approfondi

Plusieurs aspects méritent un développement ultérieur :

- La *structure algébrique* de l'ensemble des familles stratales : forme-t-il un corps ? Quelles sont ses opérations canoniques ?
- L'*ordre* sur les familles stratales : comment comparer deux réels par leur représentation stratale ?

- La *topologie* : quelle est la topologie naturelle sur l'espace des familles stratales ? Est-elle plus fine que la topologie classique de $\mathbb{R}$?

10.7.3 Liens avec le corpus

Cette construction s'articule avec plusieurs chapitres du programme :

- *Remarques topo-ensemblistes* : la promotion stratale reprend et précise le mécanisme « sortir du zéro » par factorisation du continu.
- *Rectification stratale du cercle* : la rectification en $2n_\infty$ étapes utilise la même promotion stratale appliquée à la corde rectifiée.
- *Métrique stratale* : la métrique logarithmique est compatible avec la mesure stratée des grains.

Conclusion

Ce chapitre a établi une *construction pragmatique stratale* des nombres réels, propre au programme du grain. Cette construction est *nouvelle* (sans analogue direct dans les approches classiques) mais *compatible* avec les constructions algébriques, de Dedekind et de Cauchy.

L'apport principal est conceptuel : les nombres réels sont conçus non comme des objets à propriétés absolues, mais comme des *familles de représentations stratales* aux différents niveaux de résolution. La mesure, l'extension, la cardinalité d'un réel deviennent des propriétés *relatives au niveau d'observation*.

Le mécanisme central est la *promotion stratale* : un grain ponctuel de mesure nulle à un niveau devient un grain étendu de mesure non nulle au niveau plus fin. Cette promotion n'est pas une transformation ontologique mais un changement de représentation, ce qui préserve la cohérence avec les constructions classiques tout en révélant une structure stratale plus riche.

La construction, étalonnée sur le cercle unité et étendue au diamètre, se généralise à toute structure stratifiable du programme, manifestant l'universalité du mécanisme de stratification dans le programme du grain.

Chapitre 11

Remarques topo-ensembliste

Préambule

Cette note établit une équivalence structurelle entre trois mécanismes de sortie de strate dans le programme du grain :

1. La *stratification fonctionnelle* (cf. note précédente *Anomalie cartésienne et factorisation logarithmique*) : toute fonction dérivable stratifie localement l'axe codomaine.
2. La *stratification multiplicative* (Volume I) : le produit de deux positions fait sortir de la strate vers la suivante.
3. L'*exponentiation cardinale stratale* : le passage du décompte géométrique au décompte combinatoire fait monter d'une strate.

Le résultat principal est que ces trois mécanismes ne sont pas indépendants : ils sont *trois facettes d'un même phénomène structurel*, qu'on appellera la *sortie de strate par opération multiplicative*.

Référence implicite. Programme du grain (Volumes I-III) et la note *Anomalie cartésienne et factorisation logarithmique*.

11.1 Configuration : fonction et homothétie locale

11.1.1 Action d'une fonction sur les grains

Soit $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ une fonction continue, avec $\mathcal{C} = [a, b]$ et $\mathcal{C}' = f(\mathcal{C})$. On suppose $\mathcal{C}$ factorisé à la résolution $-n_\infty$ comme

$$\mathcal{C} = \left(b - a, 2^{n_\infty}, \frac{b - a}{2^{n_\infty}} \right),$$

avec 2^{n_∞} grains d'épaisseur uniforme $\epsilon_0 = (b - a)/2^{n_\infty}$.

Proposition 60 (Homothétie locale induite par f). *En chaque grain $G_k \subset \mathcal{C}$ de centre x_k , la fonction f agit localement comme une homothétie de rapport $\lambda_k := |f'(x_k)|$. L'image $f(G_k) \subset \mathcal{C}'$ est un grain d'épaisseur :*

$$\epsilon_k = \lambda_k \cdot \epsilon_0 = \frac{\lambda_k(b - a)}{2^{n_\infty}}.$$

Démonstration. C'est une conséquence de l'anomalie cartésienne, c'est l'expression de la stratification au niveau local, de la déformation des grains de l'axe des ordonnées par la fonction f . $\square$

Remarque 87 (Stratification hétérogène). *Les épaisseurs $\epsilon_k = \lambda_k \epsilon_0$ varient avec k , sauf si f est affine (f' constant). La fonction f produit donc en général une stratification hétérogène de l'image $\mathcal{C}'$ à la résolution $-n_\infty$.*

11.1.2 Refactorisation à la résolution fine

Pour traiter cette hétérogénéité, on refactorise chaque grain image $f(G_k)$ à la résolution $-2n_\infty$ (épaisseur de base ϵ_* homogène).

Proposition 61 (Refactorisation homogène). *Chaque grain image $f(G_k)$ d'épaisseur $\lambda_k \epsilon_0$ se refactorise à la résolution $-2n_\infty$ comme :*

$$f(G_k) = \left(\lambda_k \epsilon_0, 2^{n_\infty}, \frac{\lambda_k \epsilon_0}{2^{n_\infty}} \right).$$

La mosaïque image entière $\mathcal{C}'$ se factorise comme :

$$\mathcal{C}' = \left(\sum_k \lambda_k \epsilon_0, 2^{2n_\infty}, \frac{(b-a)}{2^{2n_\infty}} \cdot \bar{\lambda} \right),$$

où $\bar{\lambda}$ est une moyenne stratale des λ_k .

Remarque 88 (Émergence de la résolution fine). *La résolution $-2n_\infty$ apparaît naturellement comme la résolution où l'hétérogénéité de f peut être absorbée en une factorisation homogène. C'est un premier indice que la fonction f fait monter d'une strate dans la hiérarchie de résolution.*

11.2 La connexion avec la stratification multiplicative

11.2.1 L'homothétie comme multiplication

Remarque 89 (Statut algébrique de l'homothétie). *L'homothétie locale de rapport λ_k qui agit sur le grain G_k n'est rien d'autre qu'une multiplication par λ_k . Si l'on considère le grain G_k comme un sous-ensemble du déploiement (et donc comme un ensemble de positions multiplicables), alors f agit en multipliant ces positions par λ_k .*

11.2.2 Le mécanisme multiplicatif du Volume I

Proposition 62 (Rappel du Volume I). *Pour deux positions $x, y \in \mathcal{G}_{-n_\infty}$, leur produit lexical $x \cdot y$ vit dans $\mathcal{G}_{-2n_\infty}$: la multiplication fait sortir d'une strate vers la suivante.*

Plus généralement, le produit de positions de $\mathcal{G}_{-kn_\infty}$ et $\mathcal{G}_{-ln_\infty}$ vit dans $\mathcal{G}_{-(k+l)n_\infty}$.

11.2.3 La fonction comme déclencheur multiplicatif local

Théorème 55 (Stratification fonctionnelle = stratification multiplicative locale). *La stratification fonctionnelle induite par une fonction f est identique à la stratification multiplicative locale du Volume I :*

- En chaque grain G_k de $\mathcal{C}$, f agit par homothétie de rapport λ_k .
- Cette homothétie est une multiplication, qui fait sortir de la strate $\mathcal{G}_{-n_\infty}$ vers $\mathcal{G}_{-2n_\infty}$ par le mécanisme du Volume I.
- Par conséquent, la fonction f fait monter chaque grain de $\mathcal{C}$ d'une strate, ce qui explique l'émergence naturelle de la résolution fine $-2n_\infty$ dans la refactorisation de $\mathcal{C}'$.

Démonstration. La proposition 60 établit que f agit localement par homothétie de rapport λ_k sur chaque grain G_k . Cette homothétie est, par définition, la multiplication par λ_k sur les positions du grain.

Par la proposition 62 (mécanisme multiplicatif du Volume I), une telle multiplication appliquée à une position de $\mathcal{G}_{-n_\infty}$ produit une position de $\mathcal{G}_{-2n_\infty}$ (lecture lexicale du produit).

Donc l'action de f sur chaque grain est un cas particulier du mécanisme multiplicatif : la fonction est un *déclencheur local de la stratification multiplicative*. $\square$

Remarque 90 (Interprétation conceptuelle). *Le théorème 55 unifie deux mécanismes qui apparaissaient distincts :*

- Le mécanisme du Volume I (algébrique) : $x \cdot y$ stratifie.
- Le mécanisme fonctionnel (géométrique) : f déforme.

Ces deux lectures décrivent la même opération : la sortie de strate par opération multiplicative. La fonction est l'application locale du produit, et le produit est l'abstraction algébrique de la fonction linéaire locale.

11.3 Les trois décomptes de l'image

11.3.1 Décompte positionnel à $-n_\infty$

Proposition 63 (Décompte positionnel grossier). *À la résolution $-n_\infty$, l'image $\mathcal{C}'$ comporte*

$$|\mathcal{C}'|_{/\mathcal{G}_{-n_\infty}} = 2^{n_\infty}$$

grains (un par grain du domaine). Cette quantité est un élément de $\tilde{\mathbb{N}}_1$.

11.3.2 Décompte positionnel à $-2n_\infty$

Proposition 64 (Décompte positionnel fin). *À la résolution $-2n_\infty$, l'image $\mathcal{C}'$ comporte*

$$|\mathcal{C}'|_{/\mathcal{G}_{-2n_\infty}} = 2^{2n_\infty}$$

sous-grains (chaque grain de $-n_\infty$ est refactorisé en 2^{n_∞} sous-grains). Cette quantité est un élément de $\mathbb{N}_2$.

11.3.3 Décompte combinatoire à $-2n_\infty$

Chaque homothétie locale induite par f est identique à une multiplication du point de vue du grain. Chaque grain de $\mathcal{B}_{-2n_\infty}$ (ensemble des mots binaires de longueur $2n_\infty$, base lexicale des réels stratifiés) admet 2^{2n_∞} étiquettes lexicales distinctes. Or une multiplication de deux nombres de $\mathcal{B}_{-n_\infty}$ nous fait passer à $\mathcal{B}_{-2n_\infty}$ nombres sur chaque grain $\mathcal{G}_{-n_\infty}$. Il s'en suit un décompte combinatoire du nombre de réels avec $-2n_\infty$ chiffres après la virgule associés aux grains.

Proposition 65 (Décompte combinatoire). *On considère le nombre de configurations possibles d'un grain de $\mathcal{B}_{-n_\infty}$ exprimé dans le système lexical de $\mathcal{B}_{-2n_\infty}$:*

- *Chaque grain de $\mathcal{B}_{-2n_\infty}$ admet 2^{2n_∞} étiquettes lexicales distinctes (mots de $2n_\infty$ symboles).*

- Pour chacun des 2^{n_∞} grains de $\mathcal{B}_{-n_\infty}$, sa configuration interne à la résolution $-2n_\infty$ peut prendre n'importe laquelle des 2^{2n_∞} étiquettes possibles.

Le décompte combinatoire conjoint est donc

$$|\mathcal{B}_{-n_\infty}|^{vu \text{ à } \mathcal{B}_{-2n_\infty}} = 2^{n_\infty} \cdot 2^{2n_\infty} = 2^{3n_\infty}.$$

Cette quantité est un élément de $\tilde{\mathbb{N}}_3$.

Remarque 91 (Distinction des trois décomptes). *Les trois décomptes mesurent des quantités distinctes :*

- 2^{n_∞} : positions grossières de $\mathcal{C}'$ à $-n_\infty$.
- 2^{2n_∞} : positions fines de $\mathcal{C}'$ à $-2n_\infty$.
- 2^{3n_∞} : configurations possibles du système (avec les réels).

Les deux premiers sont des décomptes positionnels : ils comptent des objets géométriques. Le troisième est un décompte combinatoire ou configurationnel : il compte des états possibles du système.

Chacun des trois vit dans une strate distincte $\tilde{\mathbb{N}}_1, \tilde{\mathbb{N}}_2, \tilde{\mathbb{N}}_3$ respectivement.

11.4 Unification des trois mécanismes

11.4.1 Le théorème central

Théorème 56 (Unification des trois mécanismes de sortie de strate). *Les trois mécanismes suivants sont trois facettes d'un même phénomène structurel dans le programme du grain :*

1. **Stratification fonctionnelle.** Une fonction f stratifie l'axe co-domaine en grains hétérogènes au niveau $-n_\infty$, qui se résorbent en grains homogènes au niveau $-2n_\infty$.

2. **Stratification multiplicative.** *Le produit de positions fait sortir de la strate $\mathcal{G}_{-kn_\infty}$ vers la strate $\mathcal{G}_{-(k+1)n_\infty}$ par le mécanisme lexical du Volume I.*
3. **Exponentiation cardinale stratale.** *Le passage du décompte positionnel 2^{2n_∞} au décompte combinatoire 2^{3n_∞} fait monter d'une strate dans la hiérarchie ordinale $\tilde{\mathbb{N}}_k$.*

Ces trois mécanismes ne sont pas indépendants : ils sont les expressions respectivement géométrique, algébrique et ensembliste de la sortie de strate par opération multiplicative.

Démonstration. L'équivalence (1) $\Leftrightarrow$ (2) est établie par le théorème 55 : la stratification fonctionnelle est la stratification multiplicative locale.

L'équivalence (2) $\Leftrightarrow$ (3) procède du décompte combinatoire de la proposition 65 : le décompte $2^{n_\infty} \cdot 2^{2n_\infty} = 2^{3n_\infty}$ est précisément l'effet du produit $\mathcal{G}_{-n_\infty} \times \mathcal{G}_{-2n_\infty} \rightarrow \mathcal{G}_{-3n_\infty}$, qui est une instance générale du mécanisme multiplicatif du Volume I.

Donc (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3), ce qui établit l'unification. $\square$

11.4.2 Lecture conceptuelle

Remarque 92 (Le produit comme opération structurale première). *Le théorème 56 met en évidence le rôle structurel premier de la multiplication dans le programme du grain :*

- *Géométriquement, la multiplication apparaît comme homothétie.*
- *Algébriquement, comme produit lexical faisant sortir de strate.*
- *Ensemblistement, comme exponentiation cardinale entre strates.*

Toute opération qui « monte d'une strate » dans le programme est, in fine, une opération multiplicative. C'est la cohérence interne du procédé du grain : sa hiérarchie stratale est gouvernée par un seul mécanisme, le produit.

11.4.3 Cohérence avec la digression sur l'anomalie cartésienne

Remarque 93 (Articulation avec la note précédente). *La note précédente sur l'anomalie cartésienne avait établi le théorème de stratification fonctionnelle (point 1 du théorème 56). Le présent chapitre le complète en montrant que cette stratification fonctionnelle n'est pas un mécanisme nouveau, mais une instance locale de la stratification multiplicative du Volume I.*

Le programme du grain présente ainsi une cohérence structurelle : un mécanisme unique (la multiplication) gouverne à la fois les opérations algébriques (Volume I), les transformations géométriques (fonctions), et les comptages ensemblistes (cardinalités).

11.5 Conséquences ensemblistes

11.5.1 Hiérarchie des cardinaux stratifiés

Proposition 66 (Cardinalité stratale variable). *Un même continu C' admet une hiérarchie de cardinalités selon la résolution et le mode de décompte :*

- *Positionnel à $\mathcal{G}_{-n_\infty}$: $2^{n_\infty} \in \tilde{\mathbb{N}}_1$.*
- *Positionnel à $\mathcal{G}_{-2n_\infty}$: $2^{2n_\infty} \in \tilde{\mathbb{N}}_2$.*
- *Combinatoire conjoint : $2^{3n_\infty} \in \tilde{\mathbb{N}}_3$.*
- *Plus généralement, le décompte combinatoire conjoint sur k niveaux donne $2^{k(k+1)n_\infty/2}$, dans la strate appropriée.*

11.5.2 Sur le statut « mesure nulle » des grains

Remarque 94 (Une ambiguïté nommée). *Les grains de $\mathcal{G}_{-n_\infty}$ ont une mesure nulle au sens standard (mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$), mais une*

mesure non nulle au sens stratal (*épaisseur* $1/2^{n\infty}$, *infinitésimal non standard* dans $\widehat{\mathbb{R}}$).

Cette ambiguïté est essentielle : un grain est simultanément un point (à la résolution standard) et un intervalle (à la résolution stratale). On fera une analogie avec le développement décimal d'une partie entière : une partie entière est un objet individué de mesure nulle au sens des nombres réels, mais son développement décimal infini lui confère une « épaisseur » dans la stratification des décimales.

11.6 Synthèse

- Une fonction dérivable f agit en chaque grain de son domaine par une *homothétie locale de rapport* $\lambda_k = |f'(x_k)|$.
- Cette homothétie locale est une *multiplication*, et par le mécanisme du Volume I, elle fait sortir d'une strate vers la suivante.
- Le *décompte combinatoire conjoint* d'un continu, qui compte les configurations possibles plutôt que les positions, fait également monter d'une strate.
- Les trois mécanismes (fonctionnel, multiplicatif, ensembliste) sont *trois facettes d'une même opération structurelle* : la sortie de strate par opération multiplicative.
- Cette unification met en évidence le *rôle structurel premier de la multiplication* dans le programme du grain : c'est le mécanisme unique qui gouverne sa hiérarchie stratale.
- Une conséquence ensembliste : la cardinalité d'un continu *dépend du mode de décompte* (positionnel ou combinatoire), et ce mode est lui-même stratifié.

Conclusion

L'apport principal de cette note est la mise en évidence d'une *cohérence structurelle interne* du programme du grain. Les trois mécanismes de sortie de strate (fonctionnel, multiplicatif, ensembliste), qui apparaissaient distincts, sont en réalité trois expressions d'un seul phénomène : la multiplication comme opération de stratification.

Chapitre 12

Métrie stratale

Préambule

Ce théorème est la version reformulée du premier théorème vers la physique du grain. La transformation logarithmique n'est plus présentée comme une projection analytique *ad hoc*, mais comme la *coordonnée canonique de la stratification réduite*. Sa justification repose sur deux propriétés intrinsèques au programme du grain :

1. *Linéarisation* : la stratification est multiplicative (sortie de $\tilde{\mathbb{N}}_k$ vers $\tilde{\mathbb{N}}_{k+1}$ par produit). Le logarithme rend ce passage additif.
2. *Réduction de magnitude* : le logarithme transforme les invariants strataux exponentiels (de la forme 2^{n_∞}) en invariants polynomiaux (de la forme $n_\infty \ln 2$), strictement inférieurs et plus proches du standard.

Cette double propriété fait du logarithme la coordonnée naturelle pour décrire la stratification depuis l'intérieur. La métrie stratale qui en découle n'est plus une projection vers une métrie standard, mais *la métrie propre* de la stratification réduite.

Référence implicite. *Axiomatique du grain, Symétrie de résolution* (théorème de factorisation), et *Intégrales divergentes*.

Apports de la version 4. Cette version intègre quatre apports développés postérieurement à la version 3 :

- *Heuristique combinatoire* : intuition par regroupement des grains fins en paquets, en amont de la construction formelle (Section 12.1).
- *Cause profonde du non-retour à l'identité* : analyse de l'asymétrie « logarithme de l'image, non de l'antécédent » (Section ??).
- *Relativité du transport métrique* : la métrique n'est pas absolue, elle est relative au niveau de référence choisi (Section 12.8).
- *Diagramme catégorique commutatif* : expression structurelle du transport comme commutativité de deux chemins (Section 12.9).

12.1 Heuristique combinatoire

12.1.1 Intuition par regroupement des grains

Avant la construction formelle, donnons une intuition combinatoire du changement d'échelle entre $\mathcal{G}_{-2n_\infty}$ et $\mathcal{G}_{-n_\infty}$.

Remarque 95 (Construction d'une application par paquets). *On construit une application $\Phi : \mathcal{G}_{-2n_\infty} \rightarrow \mathcal{G}_{-n_\infty}$ par regroupement des grains fins en paquets de taille 2^{n_∞} .*

Niveau positions. *Chaque grain $g_{-2n_\infty}^k$ occupe la position $k/2^{2n_\infty}$ sur le cercle unité. Après changement de référence par homothétie de rapport 2^{n_∞} , cette position devient $k/2^{n_\infty}$.*

Niveau combinatoire. *Les 2^{n_∞} premiers grains fins forment ensemble le premier grain grossier :*

$$\bigcup_{k=1}^{2^{n_\infty}} g_{-2n_\infty}^k \mapsto g_{-n_\infty}^1.$$

Plus généralement, le j -ième paquet de 2^{n_∞} grains fins forme le j -ième grain grossier :

$$\bigcup_{k=(j-1)2^{n_\infty}+1}^{j \cdot 2^{n_\infty}} g_{-2^{n_\infty}}^k \mapsto g_{-n_\infty}^j.$$

En particulier, le cercle entier est préservé :

$$\bigcup_{k=1}^{2^{2n_\infty}} g_{-2^{n_\infty}}^k = C_1 \mapsto \bigcup_{k'=1}^{2^{n_\infty}} g_{-n_\infty}^{k'} = C_1.$$

12.1.2 Translation logarithmique

$$\begin{aligned} \ln \circ h \left(\bigcup_{k=1}^j g_{-2^{n_\infty}}^k \right) &= \ln \left(\bigcup_{k=1}^j g_{-2^{n_\infty}}^k \right) + n_\infty \ln 2 \\ \Leftrightarrow \ln \circ h \left(\bigcup_{k=1}^j g_{-2^{n_\infty}}^k \right) - n_\infty \ln 2 &= \ln \left(\bigcup_{k=1}^j g_{-2^{n_\infty}}^k \right). \end{aligned}$$

Remarque 96 (Lecture en échelle logarithmique). *Le même phénomène, exprimé en coordonnées logarithmiques, donne une simple translation additive :*

$$j = 1 \mapsto -n_\infty \ln 2, \quad j = 2^{n_\infty} \mapsto 0, \quad j = 2^{2n_\infty} \mapsto n_\infty \ln 2.$$

L'homothétie multiplicative par 2^{n_∞} se transforme en translation par $n_\infty \ln 2$ sur l'échelle logarithmique. C'est la signature canonique du transport stratal, qui sera formalisée dans les sections suivantes.

L'homothétie externe (dilatation des positions par 2^{n_∞}) est équivalente à une homothétie interne (subdivision de l'épaisseur par 2^{n_∞}) sur le plan du rapport d'échelle. Plus généralement, toute propriété du

transport qui dépend uniquement du rapport entre deux niveaux consécutifs (ici 2^{n_∞}) est *invariante sous décalage stratal* : elle se transpose identiquement à tout couple de niveaux $(\mathcal{G}_{-(k+1)n_\infty}, \mathcal{G}_{-kn_\infty})$. L'homothétie interne qui laisse invariant le rapport entre niveaux préserve donc toutes les propriétés structurelles du transport, indépendamment du niveau absolu (cf. Section 12.8).

12.2 La refactorisation et ses deux lectures

12.2.1 La refactorisation par homothétie

Proposition 67 (Refactorisation $-2n_\infty \rightarrow -n_\infty$). *La refactorisation entre les résolutions $-2n_\infty$ et $-n_\infty$ s'effectue par homothétie globale de rapport 2^{n_∞} sur la longueur totale, conservant le cardinal des éléments :*

$$(1, 2^{2n_\infty}, 1/2^{2n_\infty}) \xrightarrow{h^{2^{n_\infty}}} (2^{n_\infty}, 2^{2n_\infty}, 1/2^{n_\infty}).$$

La relation fondamentale $\mathcal{L} = |\mathcal{L}| \cdot \epsilon$ est préservée.

Démonstration. Vérification directe :

$$1 = 2^{2n_\infty} \cdot \frac{1}{2^{2n_\infty}}, \quad 2^{n_\infty} = 2^{2n_\infty} \cdot \frac{1}{2^{n_\infty}}. \quad \checkmark$$

Géométriquement, l'opération est l'homothétie de centre O et de rapport 2^{n_∞} appliquée au cercle entier. Tous les grains héritent proportionnellement de la dilatation : opération *globalement homogène*. $\square$

12.2.2 La lecture exponentielle

Remarque 97 (Réécriture exponentielle). *La longueur 2^{n_∞} admet la réécriture exponentielle*

$$2^{n_\infty} = e^{n_\infty \ln 2}.$$

Cette réécriture est algébriquement triviale, mais conceptuellement significative : elle exprime la dilatation comme exponentielle d'un exposant stratal $n_\infty \ln 2$ pour la borne supérieure.

12.3 La transformation logarithmique

12.3.1 Justification par contre-effet de l'exponentielle

Définition 81 (Transformation logarithmique). *La transformation logarithmique entre strates est l'application*

$$T : \widetilde{\mathbb{R}}_*^+ \longrightarrow \widetilde{\mathbb{R}}, \quad y \longmapsto \log_2 y.$$

Théorème 57 (Linéarisation et réduction). *La transformation logarithmique T accomplit deux opérations simultanées sur les invariants de la stratification :*

1. **Linéarisation de la stratification.** *Le passage entre strates, qui est multiplicatif sur les positions ($x \in \widetilde{\mathbb{N}}_k \cdot x \in \widetilde{\mathbb{N}}_{k'} \rightarrow xy \in \widetilde{\mathbb{N}}_{k+k'}$), devient additif dans la coordonnée $T : T(xy) = T(x) + T(y)$.*
2. **Réduction de magnitude des invariants.** *L'invariant stratal 2^{n_∞} (à la borne supérieure de $\widetilde{\mathbb{N}}_1$, de type exponentiel) est transformé en $T(2^{n_\infty}) = n_\infty$ (strictement à l'intérieur de $\widetilde{\mathbb{N}}_1$, de type polynomial) :*

$$T(2^{n_\infty}) = n_\infty < 2^{n_\infty}.$$

Plus généralement, $T(2^{kn_\infty}) = kn_\infty$: les invariants de type $\widetilde{\mathbb{N}}_k$ (exponentiels) deviennent des invariants polynomiaux d'un ordre inférieur.

Démonstration. (1) Propriété fondamentale du logarithme : $\log_2(xy) = \log_2 x + \log_2 y$. La stratification multiplicative devient additive dans cette coordonnée.

(2) Calcul direct : $\log_2(2^{n_\infty}) = n_\infty$. L'inégalité $n_\infty < 2^{n_\infty}$ est le théorème 5 de l'*Axiomatique du grain* (comparaisons fondamentales). Donc T ramène strictement la magnitude.

Pour les strates supérieures : $\log_2(2^{kn_\infty}) = kn_\infty$, et $kn_\infty < 2^{kn_\infty}$ par récurrence sur le même théorème. $\square$

Remarque 98 (Interprétation arithmétique). *Le théorème exprime ce que le logarithme fait depuis l'intérieur du programme du grain : il réduit l'ordre de grandeur sans quitter la strate $\tilde{\mathbb{N}}_1$, et il linéarise les opérations de stratification.*

Cette double propriété est essentielle. Le logarithme n'est pas une projection vers l'extérieur (vers $\mathbb{R}$ standard) : il est l'opération arithmétique intrinsèque qui exprime au mieux la stratification multiplicative en termes additifs.

12.3.2 Calcul explicite

Proposition 68 (Action de T sur les positions polynomiales). *Pour $x \in \mathbb{R}_*^+$ standard, on a :*

- $T(x) = \log_2 x \in \mathbb{R}$ (standard).
- $T(x^2) = 2 \log_2 x \in \mathbb{R}$ (standard, multiplié par 2).
- $T(x^k) = k \log_2 x \in \mathbb{R}$ pour tout k standard.

Pour les éléments stratals :

- $T(2^{n_\infty}) = n_\infty \in \tilde{\mathbb{N}}_1$.
- $T(2^{2n_\infty}) = 2n_\infty \in \tilde{\mathbb{N}}_1$.
- $T(\Delta x) = T(2\pi/2^{n_\infty}) = \log_2(2\pi) - n_\infty \in -\tilde{\mathbb{N}}_1$.

Remarque 99 (Interprétation de $T(x^2) = 2 \log_2 x$). *L'expression $T(x^2) = 2 \log_2 x$ formalise précisément l'intuition de départ : la position $x^2 \in \mathcal{B}_{-2n_\infty}$, lorsqu'elle est exprimée dans la coordonnée logarithmique adaptée à la strate $\mathcal{B}_{-n_\infty}$, vaut $2 \log_2 x$.*

Ce facteur 2 reflète que la sortie de strate par multiplication ($x \cdot x = x^2$) correspond, dans la coordonnée logarithmique, à un doublement additif. La stratification multiplicative est ainsi linéarisée de la manière la plus économique possible.

12.4 La métrique stratale

Définition 82 (Métrique stratale). *Sur $\widetilde{\mathbb{R}}_*^+$, on définit la métrique stratale d_σ comme distance euclidienne tirée en arrière par T :*

$$d_\sigma(x, y) := \ln 2 \cdot |T(x) - T(y)| = |\ln(y/x)|.$$

Le facteur $\ln 2$ provient du passage de la base 2 à la base e , choix de convention sans incidence structurelle.

Théorème 58 (Métrique stratale). *d_σ est une métrique sur $\widetilde{\mathbb{R}}_*^+$, satisfaisant :*

1. **Positivité** : $d_\sigma(x, y) \geq 0$, égalité ssi $x = y$.
2. **Symétrie** : $d_\sigma(x, y) = d_\sigma(y, x)$.
3. **Inégalité triangulaire**.
4. **Identification standard** : pour $x, y \in \mathbb{R}_+^+$, $\text{st}(d_\sigma(x, y)) = |\ln(y/x)|$.

Démonstration. d_σ est définie comme distance euclidienne tirée en arrière par l'injection T , donc automatiquement une métrique sur la pré-image.

L'identification standard découle du fait que pour x, y standards, $\log_2 x, \log_2 y \in \mathbb{R}$ et $\ln 2 \cdot |\log_2 y - \log_2 x| = |\ln(y/x)|$. $\square$

12.5 Extension symétrique à $\widetilde{\mathbb{R}}_*$

Définition 83 (Métrique stratale étendue). *Pour $x, y \in \widetilde{\mathbb{R}}_*$, on pose*

$$d_\sigma(x, y) := d_\sigma(|x|, |y|) = |\ln(|y|/|x|)|.$$

La courbure se comporte symétriquement par rapport à l'origine.

Proposition 69 (Propriétés de l'extension). 1. *d_σ reste une métrique sur $\widetilde{\mathbb{R}}_*$.*

2. *Invariance par symétrie centrale* : $d_\sigma(-x, -y) = d_\sigma(x, y)$.
3. *Invariance par homothétie multiplicative* : pour $\lambda \in \widetilde{\mathbb{R}}^*$ avec $|\lambda|$ non infinitésimal,

$$d_\sigma(\lambda x, \lambda y) = d_\sigma(x, y).$$

12.6 Conséquences immédiates

Corollaire 19 (Distance stratale entre x^2 et x). *Pour $x \in \widetilde{\mathbb{R}}_+^+$ standard, $x > 0$:*

$$d_\sigma(x^2, x) = |\ln x|.$$

Remarque 100 (Lecture). *La distance stratale entre x^2 et x est $|\ln x|$, qui s'interprète comme la quantité de changement de stratification nécessaire pour passer de $x^2 \in \mathcal{B}_{-2n_\infty}$ à $x \in \mathcal{B}_{-n_\infty}$.*

Le logarithme apparaît ici non pas ad hoc, mais comme conséquence directe du Théorème 57 : $T(x^2) - T(x) = 2 \log_2 x - \log_2 x = \log_2 x$, multiplié par $\ln 2$ pour le passage en base e .

Corollaire 20 (Dualité ι et métrique stratale). *L'involution multiplicative $\iota : x \mapsto 1/x$ est une isométrie pour la métrique stratale :*

$$d_\sigma(\iota(x), \iota(y)) = d_\sigma(x, y).$$

Remarque 101 (Lecture par T). *L'inversion ι correspond, dans la co-ordonnée T , à la symétrie $u \mapsto -u$. Cette symétrie préserve les distances euclidiennes sur $\widetilde{\mathbb{R}}$, donc ι préserve d_σ .*

Corollaire 21 (Lien avec l'intégrale du Volume III). *La distance stratale entre la finesse élémentaire $\Delta x = 2\pi/2^{n_\infty}$ et l'unité 1 vaut*

$$d_\sigma(\Delta x, 1) = |\ln \Delta x| = n_\infty \ln 2 - \ln(2\pi).$$

Cette quantité, dans $\widetilde{\mathbb{N}}_1$, est précisément l'intégrale logarithmique stratifiée du Volume III.

12.7 Récapitulons

12.7.1 Factorisations et homothéties

Nous sommes partis de deux factorisation de C'_1 , le cercle unitaire normalisé (de rayon $\frac{1}{2\pi}$) avec un grain fin et un grain grossier. Par l'homothétie, la factorisation du grain fin devient une factorisation du grain grossier étendue. Donc, on a l'expression de f'_1 en fonction de f_2 . Toutefois nous désirons réduire la magnitude des invariants strataux. Pour cela on applique une transformation logarithmique, qui ramène les invariants exponentiels 2^{kn_∞} à des invariants polynomiaux kn_∞ sans quitter la strate $\tilde{\mathbb{N}}_1$. Pour cela on applique une transformation logarithmique qui nous y ramène. Comme nous sommes passer par une homothétie interne, la transformation logarithmique est applicable sur C'_1 . On se figure alors l'expression du grain $\mathcal{G}_{-2n_\infty}$ sur une échelle de grain $\mathcal{G}_{n_\infty}$.

12.7.2 Transport intrinsèque, pas projection

Remarque 102 (Bijection vs projection). *L'opération $\ln \circ h$ est une bijection préservant toute l'information stratale, à distinguer de l'opérateur de partie standard st qui est une projection irréversible de $\tilde{\mathbb{R}}$ vers $\mathbb{R}$ écrasant les infinitésimaux.*

Le transport stratal vit entièrement dans la structure stratale, sans intervention d'une opération extérieure de réduction. C'est ce qui en fait l'expression métrique canonique de la réciprocité stratale entre $\mathcal{G}_{-2n_\infty}$ et $\mathcal{G}_{-n_\infty}$.

12.8 Relativité du transport métrique

12.8.1 Le principe de relativité

Principe 4 (Relativité du transport métrique). *La métrique stratale $d_\sigma(x, y) = |\ln(y/x)|$ n'est pas une propriété absolue intrinsèque, mais*

une propriété relative au niveau de référence choisi pour le transport.

Remarque 103 (Exemples de transport). — Pour le transport $\mathcal{G}_{-2n_\infty} \rightarrow \mathcal{G}_{-n_\infty}$ avec $\mathcal{G}_{-n_\infty}$ comme référence, la métrique recouvre l'intervalle $] - n_\infty \ln 2, n_\infty \ln 2[$.
 — Pour le transport $\mathcal{G}_{-3n_\infty} \rightarrow \mathcal{G}_{-2n_\infty}$ avec $\mathcal{G}_{-2n_\infty}$ comme référence, la métrique recouvre l'intervalle $] - 2n_\infty \ln 2, 2n_\infty \ln 2[$.
 Plus généralement, pour le transport entre niveaux $\mathcal{G}_{-(k+1)n_\infty}$ et $\mathcal{G}_{-kn_\infty}$, la métrique logarithmique recouvre l'intervalle $] - kn_\infty \ln 2, kn_\infty \ln 2[$.

12.8.2 Cohérence avec la construction pragmatique des réels

Remarque 104 (Lien avec la lecture C). *Le Principe 4 s'inscrit dans la perspective générale de la construction pragmatique stratale des réels (cf. document correspondant) : les propriétés des objets stratals sont relatives au niveau d'observation.*

Lecture C reprise. *Le passage d'un transport à un autre (avec référence différente) est un changement de représentation, pas une transformation ontologique du transport lui-même. La métrique stratale est donc une famille de représentations stratales, paramétrée par le niveau de référence.*

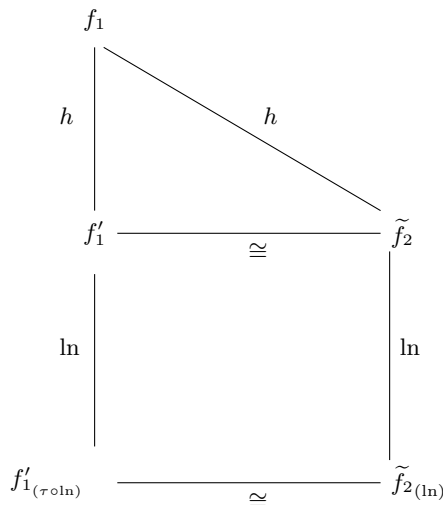
Cette cohérence renforce la position épistémologique du programme du grain : tous les objets fondamentaux (réels, métrique, transport) ont un statut relatif qui ne fragilise pas leur définition mais l'enrichit en révélant ses différentes facettes selon le niveau d'analyse.

12.9 Diagramme catégorique commutatif

12.9.1 Expression structurelle du transport

Le transport stratal admet une expression catégorique compacte qui exprime sa structure essentielle : la commutativité de deux chemins équi-

valents.



12.9.2 Lecture du diagramme

Remarque 105 (Les deux chemins commutatifs). *Le diagramme commute par les deux chemins suivants :*

- **Chemin gauche** : $f_1 \xrightarrow{h} f'_1 \xrightarrow{\ln} f'_{1(\tau \circ \ln)}$. *Lecture : translation de la contraction logarithmique de f_1 .*
- **Chemin droit** : $f_1 \xrightarrow{h} \tilde{f}_2 \xrightarrow{\ln} \tilde{f}'_{2(\ln)}$. *Lecture : contraction logarithmique pure de $\tilde{f}_2$.*

Les deux chemins aboutissent à des objets identifiés par l'isomorphisme canonique $\cong (f'_{1(\tau \circ \ln)} \cong \tilde{f}'_{2(\ln)})$.

Théorème 59 (La commutativité comme transport). *La commutativité du diagramme est l'expression catégorique du transport stratal. Le même objet final admet deux lectures structurellement équivalentes :*

- *Lecture par translation* : $\ln x + n_\infty \ln 2$ (l'antécédent $\ln x$ translaté).
- *Lecture par contraction* : $\ln(x \cdot 2^{n_\infty})$ (le logarithme de l'image).

L'égalité $\ln x + n_\infty \ln 2 = \ln(x \cdot 2^{n_\infty})$ est la propriété additive du logarithme, expression analytique de la commutativité catégorique.

12.9.3 Statut conceptuel du diagramme

Remarque 106 (Pourquoi le diagramme est important). *Le diagramme catégorique :*

- *Rend visible la structure du transport, indépendamment des calculs analytiques.*
- *Identifie le transport stratal comme commutativité de deux chemins équivalents, pas comme accident de compensation.*
- *Articule les notations indicielles : $f_{1_{(\tau \circ \ln)}}$ et $\tilde{f}_{2_{(\ln)}}$ ne sont pas des objets différents mais des vues différentes du même objet final.*

Lecture catégorique plus profonde. *Le diagramme exprime que le transport stratal h est une transformation naturelle entre les deux foncteurs « niveau fin $\rightarrow$ échelle logarithmique » et « niveau grossier $\rightarrow$ échelle logarithmique ». Cette lecture catégorique consolide le statut intrinsèque du transport.*

12.10 Synthèse

- L'objet primitif est la *transformation logarithmique T* , justifiée par sa *double propriété arithmétique intrinsèque* : linéarisation de la stratification multiplicative et réduction de magnitude des invariants strataux (passage d'exponentiels en polynomiaux).
- La *métrique stratale d_σ* est dérivée de T comme distance euclidienne tirée en arrière, et coïncide modulo infinitésimaux avec la métrique multiplicative classique sur $\mathbb{R}_*^+$.

- Le logarithme ne projette pas vers l'extérieur du programme : il est la *coordonnée canonique de la stratification réduite*, opération arithmétique intrinsèque au procédé du grain.
- L'extension à $\widetilde{\mathbb{R}}_*$ par valeur absolue est cohérente avec l'extension symétrique par rapport à l'origine.
- L'expression intégrale $d_\sigma(x, y) = |\int_x^y du/u|$ reste valable comme forme analytique secondaire, mais le fondement conceptuel est désormais la transformation T .
- **(Apport v4)** L'*heuristique combinatoire* par regroupement des grains en paquets de $2^{n\infty}$ donne une intuition concrète du changement d'échelle, préfigurant la construction formelle.
- **(Apport v4)** La *cause profonde* du non-retour à l'identité dans la composition $\ln \circ h$ est l'asymétrie structurelle : le logarithme s'applique à l'image (dans f_2), non à l'antécédent (dans f_1). Cette asymétrie n'est pas un défaut mais ce qui rend le transport possible.
- **(Apport v4)** La *métrique stratale est relative* au niveau de référence choisi, cohérent avec la construction pragmatique des réels (lecture C : changement de représentation).
- **(Apport v4)** Le *diagramme catégorique commutatif* exprime structurellement le transport stratal comme commutativité de deux chemins équivalents : translation de la contraction logarithmique de f_1 , et contraction logarithmique pure de $\widetilde{f}_2$.

Vers la suite

Le théorème suivant (*Champ stratifié unidimensionnel*) utilise la métrique stratale pour formaliser la dynamique d'un champ entre deux corps modélisé par un segment de droite. La signature 2D logarithmique (force en $1/r$, potentiel en $\ln r$) émerge naturellement de la stratification.

La construction se poursuit ensuite vers la métrique stratale euclidienne 2D, puis vers d'autres généralisations explorant les liens avec la géométrie hyperbolique et les applications physiques.

Chapitre 13

Exponentiation

Préambule

Ce chapitre construit l'*exponentielle complexe* à partir de l'exponentielle stratale réelle, comme conséquence forcée de la compatibilité entre la stratification du procédé du grain et la structure circulaire de C_1 . L'élément i tel que $i^2 = -1$ n'y est pas adjoint algébriquement, mais émerge *géométriquement* comme nécessité structurelle du procédé.

La construction se déroule en quatre temps :

1. Rappel de la métrique logarithmique et de sa réciproque exponentielle.
2. Identification du demi-tour géométrique sur C_1 avec l'involution $x \mapsto -x$.
3. Imposition de la compatibilité circulaire sur l'exponentielle stratale, et émergence forcée de i .
4. Définition propre de l'exponentielle complexe stratale et identification stratale précise du plan complexe.

Référence implicite. Programme du grain (Volumes I-III) et les théorèmes précédents : *Métrie stratale* et *Champ stratifié 1D*.

13.1 Rappel : la métrique logarithmique sur C'_1

13.1.1 Position du problème

À partir de la factorisation $(2^{n_\infty}, 2^{2n_\infty}, 1/2^{n_\infty})$ de $\mathcal{G}_{-2n_\infty}$, le cercle de référence C'_1 porte naturellement deux échelles superposées :

- Une *échelle homothétique linéaire* native, déployée sur la longueur $\mathcal{L} = 2^{n_\infty}$, avec un cardinal 2^{2n_∞} d'éléments d'épaisseur $1/2^{n_\infty}$. Cette échelle vit dans $\widetilde{\mathbb{R}}$ (non-standard).
- Une *échelle logarithmique* obtenue par application de la transformation $T = \log_2$, qui se déploie de $-n_\infty$ à 0. Les distances dans cette échelle sont des éléments standards de $\mathbb{R}$.

13.1.2 Le rôle de la transformation logarithmique

La transformation T effectue deux opérations simultanées (théorème *Métrie stratale*) :

1. *Linéarisation* : la stratification multiplicative ($x \cdot y$ stratifiant en montant) devient additive ($T(xy) = T(x) + T(y)$).
2. *Réduction de magnitude* : les invariants exponentiels 2^{kn_∞} deviennent les invariants polynomiaux kn_∞ , strictement plus petits.

L'échelle logarithmique ramène $\mathcal{G}_{-2n_\infty}/\mathcal{G}_{-n_\infty}$ dans les réels standards, ce qui est l'avantage conceptuel décisif.

13.2 L'exponentielle stratale réelle comme réciproque

13.2.1 Définition

Définition 84 (Exponentielle stratale réelle). *L'exponentielle stratale réelle est l'application réciproque de la transformation logarithmique :*

$$E := T^{-1} : \widetilde{\mathbb{R}} \rightarrow \widetilde{\mathbb{R}}_+^+, \quad y \mapsto 2^y.$$

13.2.2 Action géométrique

Proposition 70 (Action de E sur les strates). *L'exponentielle stratale E effectue le passage inverse de T : elle remonte de $\mathcal{G}_{-n_\infty}$ vers $\mathcal{G}_{-2n_\infty}$, en transformant additivement les positions en multiplicativement les positions, et en amplifiant les invariants polynomiaux en invariants exponentiels.*

Pour y standard : $E(y) = 2^y$ est standard. Pour $y = n_\infty$ stratal : $E(n_\infty) = 2^{n_\infty}$, à la borne supérieure de $\widetilde{\mathbb{N}}_1$.

13.2.3 Transport sur le cercle

Considérons maintenant le cercle C_1 (de circonférence 2π , hérité du programme). L'échelle logarithmique se transporte sur C_1 à un facteur multiplicatif près ($\ln 2$, pour le passage à la base e). On peut alors interroger la *réciproque géométrique* de la transformation logarithmique sur ce cercle.

Remarque 107 (L'échelle exponentielle circulaire). *La réciproque, appliquée à C_1 , distribue les éléments de $\mathcal{G}_{-n_\infty}/\mathcal{G}_{-2n_\infty}$ (structure quotient, intrinsèquement circulaire) sur une échelle exponentielle circulaire qui partage le même support géométrique que C_1 . Les deux structures stratales sont superposées sur le même cercle :*

— *La mosaïque fine de $\mathcal{G}_{-2n_\infty}$ (cardinal 2^{2n_∞} , épaisseur $1/2^{n_\infty}$).*

- Le quotient cyclique de $\mathcal{G}_{-n_\infty}/\mathcal{G}_{-2n_\infty}$ (cardinal 2^{n_∞} , épaisseur $2\pi/2^{n_\infty}$ ramenée modulo la strate fine).

Il n'y a pas de second cercle géométrique externe : il y a un seul cercle qui porte plusieurs structures stratales superposées, à des résolutions distinctes.

Le caractère circulaire du quotient est essentiel : c'est lui qui justifie que l'image de l'exponentielle stratale sur le cercle soit elle-même circulaire (et non linéaire).

Remarque 108 (Principe de superposition stratale). Plus généralement, le programme du grain ne multiplie pas les supports géométriques : il superpose plusieurs structures stratales sur les mêmes supports. C'est déjà le cas dans le Volume I avec le segment $\mathbb{R}^+$, qui porte simultanément la mosaïque fine (cardinal 2^{2n_∞}) et la mosaïque grossière (cardinal 2^{n_∞}). C'est encore le cas ici : le cercle C_1 porte à la fois sa structure linéaire native, sa structure logarithmique transportée, et la structure exponentielle circulaire image du quotient stratal.

Cette superposition de structures sur un même support est la signature géométrique du programme. Toute représentation graphique qui distingue visuellement les structures (par exemple par deux cercles emboîtés) relève d'une convention de lisibilité, non d'une différence géométrique réelle.

13.3 Le demi-tour géométrique et l'involution

—1

13.3.1 La structure géométrique du cercle

Le cercle C_1 a une structure géométrique intrinsèque qui ne dépend d'aucune construction algébrique externe :

- Un point de référence : $\theta = 0$, position d'origine sur le cercle.
- Un antipode : $\theta = \pi$, point diamétralement opposé.

- Une orientation : sens trigonométrique sur le cercle, hérité du flot universel Γ du procédé.

13.3.2 Le demi-tour et son interprétation stratale

Proposition 71 (Demi-tour comme involution). *L'opération de demi-tour sur C_1 , envoyant $\theta = 0$ sur $\theta = \pi$, est :*

- *Involutive : appliquée deux fois, elle ramène au point initial.*
- *Inversive d'orientation : un déplacement vers la droite devient un déplacement vers la gauche.*

Si l'on identifie le point $\theta = 0$ à la position $+1$ (point de tangence canonique avec Δ , repère du programme), alors le point $\theta = \pi$ s'identifie à la position -1 , l'image de $+1$ par l'involution $x \mapsto -x$ de la symétrisation $\widetilde{\mathbb{R}}^+ \rightarrow \widetilde{\mathbb{R}}$ (Volume I, Partie III).

Remarque 109 (Identification intrinsèque). *Cette identification $\theta = \pi \leftrightarrow -1$ ne dépend pas de la formule d'Euler ni d'aucune construction d'analyse complexe. Elle est une conséquence directe de :*

1. *La structure géométrique du cercle (un antipode existe).*
2. *La symétrisation du Volume I, qui dote $\widetilde{\mathbb{R}}$ d'une involution $x \mapsto -x$.*

Le demi-tour géométrique est l'involution algébrique sur le diamètre principal du cercle.

13.4 L'émergence forcée de i

13.4.1 La contrainte de compatibilité circulaire

On cherche à étendre l'exponentielle stratale E en une fonction $\mathcal{E}$ définie sur les arguments angulaires θ , qui soit compatible avec la structure géométrique du cercle. Les contraintes incontournables sont :

1. **Position d'origine** : $\mathcal{E}(0) = +1$.
2. **Antipode** : $\mathcal{E}(\pi) = -1$ (par la proposition 71).
3. **Périodicité** : $\mathcal{E}(2\pi) = +1$ (retour au point de départ après un tour complet).
4. **Propriété multiplicative** : $\mathcal{E}(\theta_1 + \theta_2) = \mathcal{E}(\theta_1) \cdot \mathcal{E}(\theta_2)$, héritée de la propriété fondamentale de l'exponentielle.

13.4.2 L'insuffisance de l'exponentielle réelle

Proposition 72 (Non-compatibilité réelle). *L'exponentielle stratale réelle $E(\theta) = 2^\theta$ ne satisfait pas les contraintes de compatibilité circulaire.*

Démonstration. $E(0) = 2^0 = 1$: contrainte 1 satisfaite. $E(\pi) = 2^\pi \approx 8,82 \neq -1$: contrainte 2 violée. E est strictement croissante, donc non périodique : contrainte 3 violée.

L'image de E est $\mathbb{R}_*^+$ (réels strictement positifs), donc -1 n'appartient jamais à son image. $\square$

13.4.3 Introduction d'un facteur structurel

Pour satisfaire les contraintes circulaires, introduisons un *facteur multiplicatif* ξ sur l'argument :

$$\mathcal{E}(\theta) := E(\xi \cdot \theta) = 2^{\xi\theta},$$

où ξ est un élément à déterminer dans une extension appropriée de $\mathbb{R}$.

13.4.4 Détermination de ξ par les contraintes

Théorème 60 (Émergence géométrique de i). *L'unique élément ξ tel que $\mathcal{E}(\theta) = 2^{\xi\theta}$ satisfasse les contraintes de compatibilité circulaire vérifie*

$$\boxed{\xi^2 = -1.}$$

Cet élément ξ n'est pas dans $\widetilde{\mathbb{R}}$: il appartient nécessairement à une extension corporelle où $\sqrt{-1}$ existe. On le note i .

Démonstration. Étape 1 : Évaluation de $\mathcal{E}(\pi)$. Par la contrainte d'antipode, $\mathcal{E}(\pi) = -1$, soit :

$$2^{\xi\pi} = -1.$$

Étape 2 : Évaluation de $\mathcal{E}(\pi/2)$. Par la propriété multiplicative,

$$\mathcal{E}(\pi) = \mathcal{E}(\pi/2 + \pi/2) = \mathcal{E}(\pi/2)^2.$$

Posons $\mathcal{E}(\pi/2) = \eta$. Alors $\eta^2 = -1$ par l'étape 1.

Étape 3 : Identification du quart de tour. Le quart de tour ($\theta = \pi/2$) sur le cercle envoie le point $+1$ sur un point géométriquement à équidistance entre $+1$ et -1 , sur l'axe perpendiculaire au diamètre principal. Cet axe n'est pas dans $\widetilde{\mathbb{R}}$ (qui ne contient que des positions sur le diamètre principal), mais dans une direction transverse, qu'on doit ajouter au plan.

L'élément $\eta = \mathcal{E}(\pi/2)$ est donc dans une extension géométrique de $\widetilde{\mathbb{R}}$ contenant un axe perpendiculaire. La propriété $\eta^2 = -1$ caractérise cette extension de manière unique : c'est l'extension par $\sqrt{-1}$, classiquement notée $\widetilde{\mathbb{R}}[i]$ avec $i^2 = -1$.

Étape 4 : Identification de ξ . La cohérence entre $\mathcal{E}(\pi/2) = \eta$ et la forme générale $\mathcal{E}(\theta) = 2^{\xi\theta}$ donne :

$$2^{\xi\pi/2} = \eta \quad \text{et} \quad 2^{\xi\pi} = -1 = \eta^2.$$

Pour que la propriété multiplicative tienne et que η soit le quart de tour de $+1$, ξ doit être proportionnel à η — plus précisément, $\xi = \eta / \ln 2$ (à la conversion de base près). En notant $i := \eta$, on a :

$$\xi = \frac{i}{\ln 2}, \quad i^2 = -1.$$

□

13.4.5 Lecture conceptuelle

Remarque 110 (Le statut de l'émergence). *i n'est pas adjoint algébriquement à $\widetilde{\mathbb{R}}$. Il est forcé d'exister par la contrainte de cohérence entre :*

- *La structure circulaire de C_1 (cercle géométrique du procédé).*
- *L'exponentielle stratale, qui veut être compatible avec cette circularité.*
- *La symétrisation $\widetilde{\mathbb{R}}^+ \rightarrow \widetilde{\mathbb{R}}$ qui impose $\theta = \pi \leftrightarrow -1$.*

L'extension $\widetilde{\mathbb{R}}[i]$ apparaît comme le plus petit corps dans lequel l'exponentielle stratale s'étend de manière cohérente au cercle entier. i y est forcé géométriquement, pas posé algébriquement.

13.5 L'exponentielle complexe stratale et le plan complexe stratal

13.5.1 Définition de l'exponentielle complexe stratale

Définition 85 (Exponentielle complexe stratale). *Pour $\theta \in \widetilde{\mathbb{R}}$, l'exponentielle complexe stratale est*

$$\mathcal{E}(\theta) := 2^{i\theta/\ln 2} = e^{i\theta}.$$

La seconde égalité utilise $2^{1/\ln 2} = e$, conversion de base standard.

Remarque 111 (Coïncidence avec l'exponentielle complexe classique). *L'expression $\mathcal{E}(\theta) = e^{i\theta}$ est strictement identique à l'exponentielle complexe classique. La différence est de statut : ici, elle est dérivée comme unique extension stratale de E compatible avec C_1 , alors que classiquement elle est posée ou démontrée à partir d'une série de Taylor sur $\mathbb{C}$.*

13.5.2 Propriétés

Proposition 73 (Propriétés de $\mathcal{E}$). *$\mathcal{E}$ vérifie les propriétés caractéristiques de l'exponentielle complexe :*

1. $\mathcal{E}(0) = 1$.
2. $\mathcal{E}(\pi) = -1$ (formule d'Euler comme conséquence).
3. $\mathcal{E}(2\pi) = 1$ (périodicité).
4. $\mathcal{E}(\theta_1 + \theta_2) = \mathcal{E}(\theta_1) \cdot \mathcal{E}(\theta_2)$ (multiplicativité).
5. $|\mathcal{E}(\theta)| = 1$ pour tout θ réel : $\mathcal{E}$ prend ses valeurs sur le cercle unité.
6. $\mathcal{E}(\theta) = \cos \theta + i \sin \theta$ (forme canonique, par développement en série dans $\widetilde{\mathbb{R}}[i]$).

Remarque 112 (La formule d'Euler comme conséquence). *La formule d'Euler $e^{i\pi} = -1$, classiquement présentée comme une identité remarquable de l'analyse complexe, est ici un conséquence directe de la construction : elle exprime simplement que le demi-tour sur C_1 est l'involution -1 , propriété géométrique élémentaire du cercle.*

13.6 Le plan complexe stratal : identification précise des trois objets

13.6.1 Définition

Définition 86 (Plan complexe stratal). *Le plan complexe stratal est*

$$P_{\mathbb{C}} := \widetilde{\mathbb{R}} \oplus i\widetilde{\mathbb{R}} = \{x + iy : x, y \in \widetilde{\mathbb{R}}\},$$

avec sa structure de corps héritée de $\widetilde{\mathbb{R}}[i]$.

13.6.2 Distinction des trois objets géométriques

Théorème 61 (Correspondances stratales dans $P_{\mathbb{C}}$). *Le plan complexe stratal abrite trois objets géométriques distincts, qui correspondent à trois éléments distincts de la stratification du programme :*

1. **Axe réel $\widetilde{\mathbb{R}}$** : déploiement linéaire fin, en correspondance avec $\mathcal{G}_{-2n_{\infty}}$ (strate fine, mosaïque d'épaisseur $1/2^{n_{\infty}}$).

2. **Axe imaginaire** $i\tilde{\mathbb{R}}$: déploiement linéaire grossier (droite perpendiculaire au déploiement réel), en correspondance avec $\mathcal{G}_{-n_\infty}$ (strate grossière, mosaïque d'épaisseur 2π).
3. **Cercle unité complexe** $\mathbb{S}^1 = \{e^{i\theta} : \theta \in [0, 2\pi[\}$: structure circulaire, en correspondance avec le quotient $\mathcal{G}_{-n_\infty}/\mathcal{G}_{-2n_\infty}$ (structure quotient, intrinsèquement cyclique).

Démonstration. (1) L'axe réel $\tilde{\mathbb{R}}$ est le déploiement par défaut du programme (Volume I, Partie III) : il porte la mosaïque fine de 2^{2n_∞} éléments d'épaisseur $1/2^{n_\infty}$. C'est par définition $\mathcal{G}_{-2n_\infty}$.

(2) L'axe imaginaire $i\tilde{\mathbb{R}}$ est obtenu par rotation de 90° de l'axe réel. C'est encore une droite stratifiée, mais *perpendiculaire* au déploiement principal. Son rôle structurel est de représenter une seconde direction du déploiement linéaire — à la résolution *grossière*, héritée du Volume I (déploiement à résolution $-n_\infty$ avec mosaïque grossière). C'est donc $\mathcal{G}_{-n_\infty}$.

(3) Le cercle unité $\mathbb{S}^1$ est l'image de $\tilde{\mathbb{R}}$ par l'exponentielle complexe $\mathcal{E}(\theta) = e^{i\theta}$: il s'agit d'une structure circulaire, paramétrée par les angles $\theta \in [0, 2\pi[$.

Le quotient $\mathcal{G}_{-n_\infty}/\mathcal{G}_{-2n_\infty}$ est, par construction, la structure des positions à résolution grossière *modulo* les positions fines. Cette opération de quotient, en identifiant les positions distantes d'un multiple de l'épaisseur fine, produit une structure naturellement cyclique : c'est exactement la structure du cercle.

L'identification $\mathbb{S}^1 \leftrightarrow \mathcal{G}_{-n_\infty}/\mathcal{G}_{-2n_\infty}$ est donc cohérente avec leur nature commune de structure cyclique quotient. $\square$

13.6.3 Lecture conceptuelle

Remarque 113 (Trois objets, trois rôles). *La distinction est importante :*

- L'axe imaginaire entier $i\tilde{\mathbb{R}}$ est une droite stratale au même titre

13.6. LE PLAN COMPLEXE STRATAL : IDENTIFICATION PRÉCISE DES TROIS OB

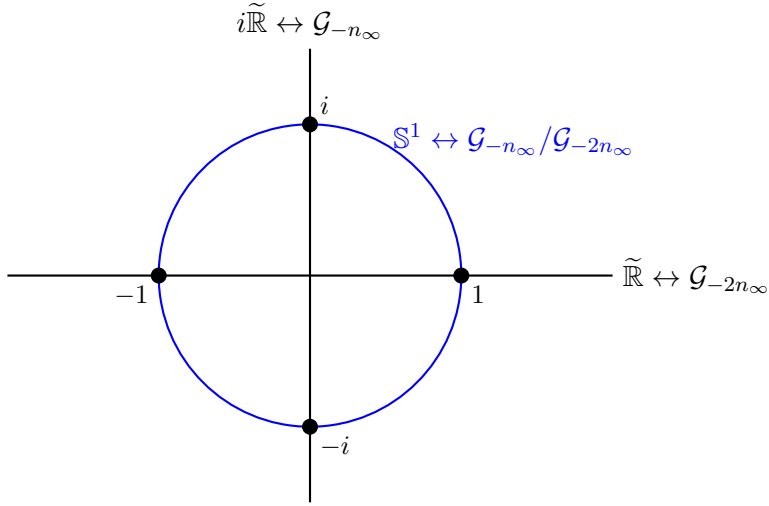
que l'axe réel, simplement à une résolution différente (grossière au lieu de fine). Il accueille des positions linéaires perpendiculaires.

- *Le cercle unité $\mathbb{S}^1$, sous-ensemble du plan, accueille les positions circulaires, c'est-à-dire les phases. C'est sur ce cercle que vit l'image de l'exponentielle complexe stratale.*

Le quotient stratal $\mathcal{G}_{-n_\infty}/\mathcal{G}_{-2n_\infty}$ correspond précisément au cercle unité parce que c'est dans la structure quotient que les positions deviennent cycliques (équivalence modulo la strate fine). C'est l'« échelle exponentielle circulaire » évoquée précédemment.

Conformément au principe de superposition stratale (Remarque 108), le cercle unité $\mathbb{S}^1$ du plan complexe n'est pas un cercle géométriquement distinct du cercle C_1 du procédé : il s'agit du même support géométrique, portant la structure quotient stratale. La représentation schématique ci-dessous distingue visuellement les trois objets pour la lisibilité, mais l'axe réel et le cercle unité partagent le même support physique, à des structures stratales superposées.

13.6.4 Représentation schématique



13.7 Auto-dualité $\ln / \exp$

Proposition 74 (Dualité fonctionnelle). *Les opérations $T = \log_2$ (logarithme stratal) et $E = T^{-1}$ (exponentielle stratale) forment une paire duale, prolongée par la construction $\mathcal{E}$ et son inverse $\mathcal{L}$ (logarithme complexe stratal) :*

$$\mathcal{L}(z) = \frac{\ln |z| + i \arg z}{\ln 2} \quad (\text{modulo } 2\pi i / \ln 2).$$

On a $\mathcal{L} \circ \mathcal{E} = \text{Id}$ et $\mathcal{E} \circ \mathcal{L} = \text{Id}$ (sur les domaines appropriés).

Remarque 114 (Prolongement de la dualité du Volume II). *La dualité $\ln / \exp$ prolonge la dualité de résolution $\mathcal{F}/\mathcal{F}^{-1}$ du Volume II : la transformation logarithmique relie les strates dans le sens descendant (réduction d'invariants), l'exponentielle dans le sens ascendant (expansion). Sur le plan complexe, cette dualité se manifeste entre la partie*

réelle (échelle linéaire fine) et la partie imaginaire (échelle linéaire grossière), reliées par l'exponentielle complexe via le cercle unité.

13.8 Interprétation : un parallèle avec la mécanique quantique

Remarque 115 (Parallèle exploratoire). *La construction admet un parallèle suggestif avec la mécanique quantique :*

- *L'expérimentateur prépare une expérience dans le grain $\mathcal{G}_{-2n_\infty}$ (déploiement fin, axe réel).*
- *La mesure produit une réalité dans le grain $\mathcal{G}_{-n_\infty}$ (déploiement grossier, axe imaginaire) projetée sur le cercle unité (la phase observée).*

Ce parallèle évoque la projection de la mesure quantique : passage d'une superposition (espace fin) à une réalité observée (espace grossier), avec irréversibilité de l'opération. La nature complexe de la fonction d'onde quantique trouverait alors son origine dans la nécessité géométrique d'introduire i pour relier les deux niveaux strataux.

Ce parallèle est développé en détail dans le chapitre Mécanique quantique et programme du grain.

13.9 Synthèse

- *L'exponentielle stratale réelle $E = T^{-1}$ est l'inverse de la transformation logarithmique. Elle remonte de $\mathcal{G}_{-n_\infty}$ vers $\mathcal{G}_{-2n_\infty}$ en amplifiant les invariants polynomiaux en exponentiels.*
- *La structure circulaire de C_1 et la symétrisation $\tilde{\mathbb{R}}^+ \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$ imposent que le demi-tour géométrique $\theta = \pi$ corresponde à l'involution -1 .*
- *Étendre E en une exponentielle compatible avec la circularité force l'apparition d'un élément i tel que $i^2 = -1$. Cet élément n'est*

pas adjoint algébriquement : il émerge géométriquement comme nécessité structurelle.

- L'exponentielle complexe stratale $\mathcal{E}(\theta) = e^{i\theta}$ est l'unique extension cohérente, et coïncide formellement avec l'exponentielle complexe classique. La formule d'Euler $e^{i\pi} = -1$ devient une conséquence immédiate.
- Le plan complexe stratal $P_{\mathbb{C}}$ abrite trois objets géométriques distincts :
 - L'axe réel $\widetilde{\mathbb{R}} \leftrightarrow \mathcal{G}_{-2n_{\infty}}$ (déploiement fin).
 - L'axe imaginaire $i\widetilde{\mathbb{R}} \leftrightarrow \mathcal{G}_{-n_{\infty}}$ (déploiement grossier).
 - Le cercle unité $\mathbb{S}^1 \leftrightarrow \mathcal{G}_{-n_{\infty}}/\mathcal{G}_{-2n_{\infty}}$ (quotient circulaire).
- La dualité $\ln/\exp$ structure l'ensemble : descente vers les strates par $\ln$, montée par $\exp$.

Conclusion

L'apport principal de ce travail est de présenter i et l'exponentielle complexe non comme des constructions algébriques imposées de l'extérieur, mais comme des objets *géométriquement forcés* par la compatibilité entre la stratification du procédé du grain et la structure circulaire de C_1 .

Cette émergence offre une lecture nouvelle du plan complexe : il n'est plus un objet algébrique abstrait mais la *réalisation naturelle de la dualité stratale*, où l'axe réel et l'axe imaginaire correspondent à deux niveaux de résolution distincts du procédé (fin et grossier respectivement), et le cercle unité correspond au quotient cyclique entre les deux.

Les implications physiques de cette construction sont explorées dans le chapitre *Mécanique quantique et programme du grain*.

Chapitre 14

Anomalie cartésienne

Préambule

Cette note explore une observation géométrique élémentaire mais féconde sur la représentation cartésienne des fonctions. Elle conduit à un résultat conceptuel qui éclaire d'un angle nouveau le programme du grain : toute fonction induit, sur son axe codomaine, une *stratification fonctionnelle locale*. La métrique stratale du programme apparaît alors comme un cas particulier de ce phénomène, où la fonction considérée est le logarithme.

Référence implicite. Programme du grain (Volumes I-III) et le premier théorème vers la physique (*Métrique stratale*).

14.1 L'anomalie cartésienne

14.1.1 Le constat

Soit $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$ une fonction dérivable et bijective, et soit $g = f^{-1} : [c, d] \rightarrow [a, b]$ sa réciproque. Considérons l'arc de courbe $\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in [a, b]\}$ dans un repère cartésien (O, x, y) .

Proposition 75 (Conservation algébrique de la longueur d'arc). *La longueur d'arc de Γ_f peut se calculer de deux façons équivalentes :*

$$\ell_f = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx = \int_c^d \sqrt{1 + g'(y)^2} dy.$$

Ces deux intégrales ont la même valeur : c'est la longueur géométrique de l'arc, indépendante de la paramétrisation.

Démonstration. Par le changement de variable $y = f(x)$, $dy = f'(x)dx$, et $g'(y) = 1/f'(x)$. Donc :

$$\int_c^d \sqrt{1 + g'(y)^2} dy = \int_a^b \sqrt{1 + \frac{1}{f'(x)^2}} \cdot f'(x) dx = \int_a^b \sqrt{f'(x)^2 + 1} dx = \ell_f.$$

□

14.1.2 Le déplacement vers un nouveau repère

Considérons maintenant la fonction $g = f^{-1}$ tracée dans un *nouveau* repère cartésien (O', X, Y) , où l'on prend X comme variable indépendante et $Y = g(X)$ comme variable dépendante. Le graphe est $\Gamma_g = \{(X, g(X)) : X \in [c, d]\}$.

La longueur d'arc de Γ_g dans ce nouveau repère est :

$$\ell_g^{\text{nouveau}} = \int_c^d \sqrt{1 + g'(X)^2} dX.$$

Proposition 76 (L'anomalie). *En général,*

$$\ell_g^{\text{nouveau}} \neq \ell_f.$$

Les deux longueurs ne coïncident que dans des cas particuliers, par exemple lorsque f est une isométrie locale (rotation, translation, réflexion) ou linéaire de coefficient ± 1 .

Démonstration. Contre-exemple. Pour $f(x) = x^2$ sur $[0, 1]$, on a $f'(x) = 2x$ et $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ sur $[0, 1]$, avec $(f^{-1})'(y) = 1/(2\sqrt{y})$.

Numériquement :

- $\ell_f = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2} dx \approx 1,479$.
- $\ell_g^{\text{nouveau}} = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{1}{4y}} dy$, qui diverge en $y = 0$. La courbe $y = \sqrt{x}$ a une tangente verticale en 0, donc sa longueur d'arc dans le nouveau repère est différente (et même infinie sur certains intervalles).

Plus généralement, les deux intégrales ne coïncident que si l'on tient compte du facteur jacobien lors du changement de paramétrisation, ce qui revient à la proposition 75. Si l'on omet ce facteur (comme dans le calcul dans le nouveau repère), les longueurs diffèrent. $\square$

14.1.3 Diagnostic de l'anomalie

L'apparente contradiction se résout en comprenant ce qui distingue les deux situations :

- Dans la proposition 75, on calcule la longueur d'arc d'une même courbe géométrique avec deux paramétrisations différentes. Le changement de variable introduit naturellement le facteur jacobien $f'(x)$, qui compense la déformation.
- Dans la proposition 76, on transporte la fonction réciproque dans un nouveau repère cartésien *uniforme*, sans intégrer le facteur jacobien. La déformation locale induite par f n'est pas compensée, et les longueurs apparaissent différentes.

14.2 La stratification fonctionnelle

14.2.1 Le théorème central

Théorème 62 (Stratification fonctionnelle). *Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. La représentation cartésienne $\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$*

induit, sur l'axe Oy , une stratification non uniforme :

- L'intervalle uniforme $[x, x + dx]$ sur l'axe Ox est envoyé par f sur l'intervalle $[f(x), f(x) + f'(x)dx]$ sur l'axe Oy .
- La longueur de cet intervalle image dépend de x via $|f'(x)|$.
- La fonction f agit donc comme un facteur de stratification local sur l'axe codomaine, dépendant de la position.

Réciproquement, la fonction inverse f^{-1} induit sur le codomaine original une stratification locale par le facteur $1/|f'(f^{-1}(y))|$.

Démonstration. Direct par dérivation. L'image différentielle de f envoie dx sur $f'(x)dx$, ce qui modifie la mesure locale par le facteur $|f'(x)|$. $\square$

14.2.2 Lecture conceptuelle

Remarque 116 (Le plan cartésien n'est pas neutre). *La représentation cartésienne d'une fonction n'est pas une présentation neutre du graphe : elle impose une métrique uniforme sur les deux axes, alors que la fonction induit naturellement une déformation locale de l'un par rapport à l'autre.*

Cette déformation est invisible quand on regarde le graphe (la courbe est tracée avec sa géométrie naturelle), mais elle apparaît dès qu'on mesure des longueurs, des aires, ou des volumes induits.

Le théorème 62 formalise cette observation : tracer une fonction, c'est stratifier l'axe codomaine.

L'axe des ordonnées, en tant que continu nu, est homogène (métrique euclidienne uniforme). Mais muni de la stratification induite par f — c'est-à-dire vu comme image de l'axe des abscisses uniforme à travers f — il devient non homogène : la mesure locale y varie par le facteur $|f'(x)|$. L'hétérogénéité est imprimée par la fonction, non intrinsèque à l'axe.

14.2.3 Lien historique : Bolzano et le continu

Cette observation prolonge dans une certaine mesure les travaux de Bolzano sur l'image du continu par les fonctions. Bolzano s'intéressait aux paradoxes de cardinalité (un segment a « autant » de points qu'une droite entière). La stratification fonctionnelle est une extension naturelle de cette problématique : si la cardinalité est préservée, la *mesure locale* ne l'est généralement pas, et la fonction introduit une déformation continue de la métrique.

Cette extension rapproche la stratification fonctionnelle de la géométrie différentielle moderne, où les changements de coordonnées introduisent systématiquement des facteurs jacobiens qui modifient la métrique locale.

14.3 Application : la factorisation logarithmique

14.3.1 Énoncé du problème

On cherche à transporter un continu $\mathcal{C}$ donné sous la factorisation

$$f_1 = \left(1, 2^{2n_\infty}, \frac{1}{2^{2n_\infty}} \right)$$

vers un continu $\mathcal{C}'$ factorisé sous la forme

$$f' = \left(1, 2^{n_\infty}, \frac{1}{2^{n_\infty}} \right).$$

Les deux continus ont la même longueur unitaire, mais $\mathcal{C}$ a un cardinal plus élevé et une épaisseur de grain plus fine que $\mathcal{C}'$.

14.3.2 Étape 1 : refactorisation par homothétie

On refactorise f_1 sous la forme

$$f'_1 = \left(2^{n_\infty}, 2^{2n_\infty}, \frac{1}{2^{n_\infty}} \right).$$

C'est équivalent à une *homothétie* de rapport 2^{n_∞} appliquée à la longueur totale du continu. Le cardinal est préservé, mais l'épaisseur passe de $1/2^{2n_\infty}$ à $1/2^{n_\infty}$ (homogène, dans $\widetilde{\mathbb{R}}$ non-standard).

14.3.3 Étape 2 : contraction logarithmique

L'homothétie globale rapportée au cercle d'origine peut se lire comme une *dilatation exponentielle non homogène*. Pour ramener la longueur dans $\mathbb{R}$ standard tout en préservant l'information de cardinalité, on applique une *contraction logarithmique*.

Proposition 77 (Factorisation logarithmique). *La factorisation logarithmique de f'_1 est :*

$$f''_1 = (n_\infty \ln 2, 2^{2n_\infty}, \epsilon_h),$$

où la longueur $n_\infty \ln 2$ vit dans $\widetilde{\mathbb{N}}_1$ (mais est strictement inférieure à n_∞ par le théorème de comparaison fondamental, donc réduite par rapport à l'invariant exponentiel initial 2^{n_∞}), et où ϵ_h désigne une stratification non uniforme des grains.

Remarque 117 (Pourquoi ϵ_h est non uniforme). *La contraction logarithmique applique localement le facteur dérivé du logarithme, $1/x$, sur chaque position. Comme ce facteur dépend de la position, les grains sont contractés différemment selon leur place sur le continu : c'est la stratification non uniforme du Théorème 62 appliquée à la fonction $f = \log_2$.*

14.3.4 Étape 3 : ajustement des domaines

Pour finaliser le transport de $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}'$, il faut ajuster les domaines :

- Le domaine du continu de référence $\mathcal{C}'$ est $[0, 1[$.
- Par la transformation logarithmique, l'image de $[0, 1[$ est $] -\infty, 0]$
 - mais ramené stratalement, cela donne $] -n_\infty \ln 2, 0]$ (en bornes exprimées par les images logarithmiques).

Le continu $\mathcal{C}$ est donc représenté dans $\mathcal{C}'$ sous une *échelle logarithmique*, ce qui équivaut à définir une *métrique logarithmique* sur le continu.

14.4 Synthèse

- L'*anomalie cartésienne* (Section 1) : tracer une fonction dans le plan cartésien et sa réciproque dans un nouveau repère ne préserve pas, en général, la longueur d'arc. Cette anomalie traduit une déformation locale induite par la fonction.
- La *stratification fonctionnelle* (Section 2, Théorème 62) : toute fonction f dérivable stratifie localement l'axe codomaine par le facteur $|f'(x)|$. Tracer une fonction, c'est stratifier l'axe vertical.
- La *factorisation logarithmique* (Section 3) : appliquée à $f = \log_2$, la stratification fonctionnelle produit la métrique stratale du programme du grain. Le logarithme est donc le cas particulier de la stratification fonctionnelle qui donne lieu à la métrique stratale étudiée dans le programme.

Lecture conceptuelle

Cette digression éclaire le programme du grain par un angle nouveau. La métrique stratale logarithmique, qu'on avait construite par voie géométrique (homothétie + contraction logarithmique) ou par voie arithmétique (intégration du facteur correctif $1/x$), apparaît ici comme un cas particulier d'un phénomène plus général : toute fonction induit une stratification locale de son axe codomaine.

Le programme du grain, en privilégiant la fonction logarithme, sélectionne une stratification *globalement définie et structurellement riche* (linéarisation de la stratification multiplicative, réduction de magnitude des invariants, propriétés arithmétiques particulières). Mais d'autres

fonctions induiraient d'autres stratifications, et il pourrait exister des programmes analogues fondés sur d'autres choix.

Cette ouverture suggère que le programme du grain pourrait s'inscrire dans une *famille de programmes strataux fonctionnels*, chacun associé à une fonction privilégiée, et qu'il serait fructueux d'étudier les propriétés relatives de ces différentes constructions.

Cette généralisation reste exploratoire et dépasse le cadre de la présente note.

Chapitre 15

Cardinal et promotion algébrique

15.1 De la grille hyperfinie au continu

Ce chapitre relie la construction des grains à la théorie cantorienne du cardinal du continu. On y montre que la numérotation lexicographique des grains calcule *correctement* un cardinal — mais celui d’une grille hyperfinie, non celui du continu — et que le passage de l’un à l’autre est *exactement* la promotion $\widetilde{\mathbb{R}}_{\text{fin}}/\mathfrak{m} = \mathbb{R}$. On précise ensuite le statut des grains d’apparence ponctuelle : non des « zéros », mais des *infinitésimaux stratifiés*, dont la non-idempotence garantit qu’il en existe toujours de plus fins.

15.1.1 Codage binaire et cardinal

Remarque 118 (La méthode de Cantor). *Tout réel $x \in [0, 1[$ se code par son développement binaire $x = 0, b_1 b_2 b_3 \dots$, suite indexée par $\mathbb{N}$ tout entier : il y a un chiffre b_n pour chaque entier n , sans fin. L’ensemble des réels s’identifie donc (aux doubles écritures près) à l’ensemble $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$*

de toutes les suites binaires illimitées, d'où

$$|\mathbb{R}| = |\{0, 1\}^{\mathbb{N}}| = 2^{\aleph_0}.$$

Le point décisif : l'exposant $\aleph_0$ est le nombre de chiffres, et il vaut $\aleph_0$ précisément parce que les développements ne s'arrêtent jamais.

Proposition 78 (Le cardinal de la grille). À la résolution $-n_\infty$, un grain de $\mathcal{B}_{-n_\infty}$ est une écriture binaire terminante $0, b_1 b_2 \dots b_{n_\infty}$, de longueur n_∞ . Le nombre de telles écritures est

$$|\mathcal{B}_{-n_\infty}| = 2^{n_\infty}.$$

Ici n_∞ est un entier non standard (le nombre de chiffres) et l'ensemble $\mathcal{B}_{-n_\infty} = \{1, \dots, 2^{n_\infty}\}$ est hyperfini : bien ordonné, muni d'un premier et d'un dernier élément et d'une fonction successeur, mais de cardinal non standard.

Remarque 119 (Même formule, exposant différent). La numérotation lexicographique reproduit la structure de la méthode de Cantor — « 2 élevé au nombre de chiffres » — mais avec l'exposant n_∞ au lieu de $\aleph_0$. Elle calcule donc correctement 2^{n_∞} , et non $2^{\aleph_0}$. La différence n'est pas un facteur : 2^{n_∞} est un entier non standard, $2^{\aleph_0}$ un cardinal indénombrable. La grille $\mathcal{B}_{-n_\infty}$ est dense dans $C_1 = [0, 1[$ (elle l'approche à 2^{-n_∞} près), mais fondamentalement distincte de lui : ses 2^{n_∞} points terminants manquent tout développement illimité, à commencer par $1/3 = 0,0101\dots$ (car $3 \nmid 2^k$ pour tout k).

15.1.2 Réparation de la méthode : les suites illimitées

Pour atteindre le continu C_1 tout entier, il faut coder ses points par des suites binaires *illimitées* — de longueur $\aleph_0$, jamais tronquées.

Définition 87 (Suites illimitées). On note $\overline{\mathcal{B}}_{n_\infty}$ l'ensemble des points du cercle codés par des développements $0, b_1 b_2 b_3 \dots$ courant sur $\mathbb{N}$ tout entier (*illimités, non terminants*).

Proposition 79 (Cardinal du continu retrouvé).

$$|\overline{\mathcal{B}}_{n_\infty}| = 2^{\aleph_0} = |C_1|.$$

Démonstration. $\overline{\mathcal{B}}_{n_\infty}$ est, par définition, l'ensemble des suites binaires illimitées : c'est $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ (Remarque 118), de cardinal $2^{\aleph_0}$, en bijection (aux doubles écritures près) avec $C_1 = [0,1]$. $\square$

Théorème 63 (Suite illimitée = point = promotion). *Une suite illimitée n'est plus un grain : n'ayant pas de dernier chiffre, elle n'a ni rang, ni successeur, ni épaisseur. C'est un point du continu. Le passage*

$$\underbrace{\text{suite terminante à } n_\infty \text{ chiffres}}_{\text{grain de } \mathcal{B}_{-n_\infty}} \longrightarrow \underbrace{\text{suite illimitée}}_{\text{point de } \overline{\mathcal{B}}_{n_\infty}}$$

est exactement la promotion algébrique $\widetilde{\mathbb{R}}_{\text{fin}}/\mathfrak{m} = \mathbb{R}$.

Démonstration. Un point de C_1 est l'objet limite d'une suite de grains de plus en plus fins qui l'encadrent : à la résolution $-kn_\infty$, le grain $g_k(x)$ contenant x a une épaisseur 2^{-kn_∞} , et

$$\bigcap_{k \geq 1} g_k(x) = \{x\}$$

(intervalles emboîtés dont la largeur $\rightarrow 0$). Deux suites de grains qui convergent vers le même point diffèrent, à chaque étage, d'un infinitésimal (élément de $\mathfrak{m}$). Identifier ces suites, c'est quotienter par $\mathfrak{m}$; le point x est la classe correspondante. C'est la définition de la promotion. La suite illimitée $0, b_1 b_2 b_3 \dots$ est précisément le représentant canonique de cette classe : le développement « à l'infini » que la troncature à n_∞ ne fournissait qu'approché. $\square$

Remarque 120 (Le continu comme limite, non comme étage). *Aucune résolution finie $-kn_\infty$ ne numérote le continu : chaque $\mathcal{B}_{-kn_\infty}$ est hyperfini (2^{kn_∞} grains) et manque les développements illimités. C'est leur*

limite — l'intersection sur tous les niveaux, réalisée par la promotion — qui est le continu C_1 . La tour de résolutions vise le continu sans jamais l'atteindre à un étage ; la promotion le réalise à la limite. C'est la lecture cardinale de la bifurcation grain / point : 2^{n_∞} (grille, anneau) d'un côté, $2^{\aleph_0}$ (continu, corps) de l'autre.

15.1.3 Les grains sont des infinitésimaux stratifiés, non des zéros

On aborde le second aspect : le statut des grains d'apparence ponctuelle. Il faut ici séparer soigneusement deux « points » de nature opposée.

Définition 88 (Deux « points »). — Le point du continu (dans $\mathbb{R}$, après promotion) : de mesure exactement nulle, sans structure interne, codé par une suite illimitée.

— Le grain d'apparence ponctuelle (dans $\widetilde{\mathbb{R}}$, à une résolution donnée) : d'épaisseur infinitésimale non nulle 2^{-kn_∞} , de partie standard nulle ($\text{st} = 0$), mais pourvu d'une structure interne au niveau plus fin.

Remarque 121 (« Zéro épais » est un oxymore). Un grain d'apparence ponctuelle n'est pas un zéro : un zéro a mesure nulle, un infinitésimal a mesure non nulle mais infinitésimale. Les appeler « zéros plus ou moins épais » les ramènerait au continu, où ils seraient tous le même 0 (écrasés par st), et l'on perdrait la hiérarchie même que l'on veut décrire. Le terme correct est infinitésimal stratifié.

Théorème 64 (Hiérarchie des infinitésimaux stratifiés). Les épaisseurs des grains forment, dans $\widetilde{\mathbb{R}}$, une hiérarchie graduée strictement décroissante

$$2^{-n_\infty} > 2^{-2n_\infty} > 2^{-3n_\infty} > \dots > 0,$$

toutes de partie standard nulle. Vus depuis $\mathbb{R}$, ces infinitésimaux sont tous écrasés sur l'unique 0 ; vus dans $\mathbb{R}$, ils sont distincts et ordonnés par niveau.

Démonstration. La décroissance stricte est la *non-idempotence* : $2^{-n_\infty} \cdot 2^{-n_\infty} = 2^{-2n_\infty} \neq 2^{-n_\infty}$, et plus généralement $2^{-(k+1)n_\infty} < 2^{-kn_\infty}$ par l'ordre de l'axiomatique. Chaque 2^{-kn_∞} est infinitésimal ($\text{st}(2^{-kn_\infty}) = 0$, car inférieur à tout standard). Sous la promotion st , tous ont même image 0 ; dans $\widetilde{\mathbb{R}}$, l'ordre les sépare. $\square$

Corollaire 22 (La non-idempotence, moteur d'une finesse sans fond). *Il n'existe pas de « grain atomique » : sous tout grain de niveau $-kn_\infty$ se trouvent 2^{n_∞} sous-grains de niveau $-(k+1)n_\infty$, plus fins. La tour des résolutions est ouverte vers le bas, et c'est la non-idempotence ($2^{-(k+1)n_\infty} \neq 2^{-kn_\infty}$) qui l'y maintient : à chaque étage, un infinitésimal strictement plus fin existe.*

Remarque 122 (Facteur contractant et changement d'axe). *Un facteur contractant (par exemple un jacobien infinitésimal appliqué le long d'un axe) descend cette hiérarchie : il transforme un grain d'épaisseur 2^{-kn_∞} en un grain plus fin $2^{-(k+j)n_\infty}$. C'est un autre moyen de parcourir la tour des infinitésimaux. Mais appliqué à un point du continu (mesure nulle), il donne $\lambda \cdot 0 = 0$: il ne crée aucun « sous-zéro ». On prendra garde, si l'on passe des positions (abscisse curviligne de C_1) à un autre axe (ordonnées $(y'Oy)$), à préciser que le couplage se fait par la transformation du plan — les deux directions ne se confondent pas.*

15.1.4 Ce que l'on ne peut pas faire : déborder le continu

Théorème 65 (On approche le point, on ne le franchit pas). *Raffiner la résolution ($k \rightarrow \text{grand}$) rend les grains de plus en plus fins, mais :*

1. *ne descend jamais sous 0 : le zéro du continu est un plancher absolu ($\lambda \cdot 0 = 0$ pour tout facteur λ) ;*

2. ne dépasse jamais le cardinal du continu : chaque niveau reste hyperfini ($|\mathcal{B}_{-kn_\infty}| = 2^{kn_\infty}$), et c'est leur limite qui est $2^{\aleph_0}$, non un cardinal supérieur.

Démonstration. (1) Un point du continu a mesure 0 ; toute contraction le fixe. Les grains plus fins sont des infinitésimaux *au-dessus* de 0 (Théorème 64), non « sous » lui : ils tendent vers 0 par valeurs décroissantes sans l'atteindre ni le traverser.

(2) Chaque $\mathcal{B}_{-kn_\infty}$ est hyperfini de cardinal 2^{kn_∞} , entier non standard, strictement inférieur à $2^{\aleph_0}$. Le continu est l'objet limite (Théorème 63), de cardinal $2^{\aleph_0}$; raffiner *approche* ce cardinal sans le dépasser. $\square$

Remarque 123 (Où vit chaque « plus fin »). « *Toujours des grains plus fins* » est vrai à l'intérieur de la tour (Corollaire 22). « *Des grains plus fins qu'un point du continu* » est une confusion de niveau : le point est la limite de la descente, pas un de ses étages. On tend vers lui par le bas (épaisseurs décroissantes) ; on ne passe jamais dessous.

15.1.5 Synthèse : une tour ouverte aux deux bouts

Corollaire 23 (Position d'ensemble). *La tour des résolutions est ouverte aux deux extrémités :*

- **vers le bas**, par la non-idempotence : sous tout grain, un grain plus fin (finesse sans fond, hiérarchie d'infinitésimaux stratifiés) ;
- **vers le haut / à la limite**, par la promotion : la limite de la tour est le continu $\mathbb{R} = \widetilde{\mathbb{R}}_{\text{fin}}/\mathfrak{m}$, où tous les infinitésimaux s'écrasent sur 0 et où les suites illimitées deviennent des points.

Le continu est le point de fuite de la tour : visé par la numérotation sans être atteint à distance finie, réalisé seulement à la limite. La grille est un anneau de grains (cardinal hyperfini 2^{kn_∞}) ; le continu est le corps des points (cardinal $2^{\aleph_0}$) ; la promotion est le pont, et c'est elle — non l'ordre lexicographique, non le raffinement seul — qui fabrique le continu.

Chapitre 16

Fondement différentiel du grain

16.1 La dérivée stratale

On donne ici au grain son ancrage le plus classique. Le calcul différentiel manipule depuis Leibniz une « quantité infiniment petite non nulle », le dx , avec laquelle on forme le rapport dy/dx . Nous montrons que le grain d'épaisseur 2^{-n_∞} est une réalisation géométrique explicite de ce dx , et que la dérivée s'écrit alors comme la promotion d'un quotient formé dans l'anneau $\widetilde{\mathbb{R}}$.

16.1.1 Le grain comme différentielle

Remarque 124 (Trois visages d'un même infinitésimal). *Le dx de Leibniz — infiniment petit, non nul, manipulable — fut d'abord utilisé sans fondement, puis remplacé par les limites (ε, δ) de Weierstrass, enfin refondé comme un véritable infinitésimal par l'analyse non standard de Robinson (où $\frac{dy}{dx} = \text{st}(\frac{\Delta y}{\Delta x})$). Le grain de résolution $-n_\infty$, d'épaisseur $\Delta x = 2^{-n_\infty}$, en est une réalisation géométrique : un infinitésimal*

concret, issu du déploiement du cercle, avec lequel on calcule et que la promotion st écrase à la fin. Le passage à la limite de Weierstrass, le st de Robinson et la promotion $\widetilde{\mathbb{R}}_{\text{fin}}/\mathfrak{m}$ sont un seul et même geste, vu sous trois angles.

Définition 89 (Épaisseur différentielle). On pose $\Delta x := 2^{-n_\infty}$, épaisseur d'un grain de résolution $-n_\infty$. C'est la différentielle dx du programme : un infinitésimal ($\text{st}(\Delta x) = 0$), non nul dans $\widetilde{\mathbb{R}}$.

16.1.2 Le quotient différentiel vit dans l'anneau

Soit $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction standard, et y^* son extension naturelle à $\widetilde{\mathbb{R}}$ (par transfert). Pour x standard, on forme l'accroissement et le quotient différentiel.

Proposition 80 (Le quotient est licite dans $\widetilde{\mathbb{R}}$). Posons $\Delta y := y^*(x + \Delta x) - y^*(x)$. Alors le quotient différentiel

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \Delta y \cdot 2^{n_\infty}$$

est un élément bien défini de $\widetilde{\mathbb{R}}$.

Démonstration. $\Delta x = 2^{-n_\infty}$ est une puissance de 2, donc une unité de l'anneau $\widetilde{\mathbb{R}}$: son inverse 2^{n_∞} est un grain. Diviser par Δx revient donc à multiplier par l'unité 2^{n_∞} — opération licite *directement* dans l'anneau, sans recours au corps des fractions. Comme $\Delta y \in \widetilde{\mathbb{R}}$, le produit $\Delta y \cdot 2^{n_\infty}$ est aussi. $\square$

Remarque 125 (Pourquoi ce point compte). C'est un avantage structural spécifique du grain différentiel. Un infinitésimal quelconque ($3 \cdot 2^{-n_\infty}$, par exemple) n'est pas inversible dans l'anneau, et diviser par lui exigerait de passer au corps. Mais l'épaisseur $\Delta x = 2^{-n_\infty}$ est une unité : le quotient différentiel se forme donc sans quitter $\widetilde{\mathbb{R}}$. La promotion n'intervient qu'à la toute fin, pour extraire la partie standard.

16.1.3 Définition et compatibilité

Définition 90 (Dérivée stratale). Lorsque $\frac{\Delta y}{\Delta x} \in \widetilde{\mathbb{R}}_{\text{fin}}$ (quotient fini), la dérivée stratale de y en x est

$$\boxed{\frac{dy}{dx} := \text{st}\left(\frac{y^*(x + \Delta x) - y^*(x)}{\Delta x}\right), \quad \Delta x = 2^{-n_\infty}.}$$

Théorème 66 (Compatibilité avec la dérivée classique). Si y est dérivable en x au sens classique, de dérivée $y'(x)$, alors le quotient différentiel est fini et

$$\frac{dy}{dx} = y'(x).$$

Démonstration. La dérivabilité classique s'écrit $y(x+h) = y(x) + y'(x)h + r(h)$ avec $r(h)/h \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$. Par transfert, la même identité vaut pour $h = \Delta x = 2^{-n_\infty}$ (infinitésimal) :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x) + \frac{r(\Delta x)}{\Delta x},$$

où $r(\Delta x)/\Delta x$ est infinitésimal (partie standard nulle) puisque le rapport $r(h)/h$ tend vers 0. Le quotient est donc fini, et sa partie standard vaut $y'(x)$. $\square$

Exemple. Pour $y = x^2$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \frac{2x \Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x,$$

donc $\frac{dy}{dx} = \text{st}(2x + \Delta x) = 2x$. L'infinitésimal résiduel $\Delta x = 2^{-n_\infty}$ est écrasé par la promotion, et l'on retrouve la dérivée classique — calculée sans limite, par un quotient exact dans l'anneau suivi d'une promotion.

16.1.4 Indépendance de la résolution = dérivabilité

La définition fixe $\Delta x = 2^{-n_\infty}$. Une exigence de robustesse s'impose : le résultat ne doit pas dépendre du *niveau* de résolution choisi.

Proposition 81 (Robustesse). *Pour y dérivable en x , la dérivée stratale calculée avec $\Delta x_k = 2^{-kn_\infty}$ vaut $y'(x)$ pour tout $k \geq 1$:*

$$\text{st} \left(\frac{y^*(x + 2^{-kn_\infty}) - y^*(x)}{2^{-kn_\infty}} \right) = y'(x) \quad (\forall k \geq 1).$$

Réciproquement, si cette partie standard existe et coïncide pour tous les niveaux, y est dérivable en x .

Démonstration. Chaque 2^{-kn_∞} est un infinitésimal non nul (et une unité) ; la preuve du Théorème 66 s'applique verbatim avec $h = 2^{-kn_\infty}$, donnant $y'(x)$ indépendamment de k . La réciproque est la caractérisation non standard de la dérivabilité : y est dérivable en x ssi $\text{st} \left(\frac{y^*(x+h) - y^*(x)}{h} \right)$ existe et est la même pour tout infinitésimal $h \neq 0$. $\square$

Remarque 126 (Lecture). *L'indépendance vis-à-vis du niveau de résolution est donc exactement la dérivabilité. Une fonction dérivable a une pente qui ne dépend pas de la finesse à laquelle on l'observe ; une fonction non dérivable (un coin, une oscillation infinitésimale) donnerait des pentes différentes selon la strate. La dérivée stratale détecte la dérivabilité par sa stabilité stratale.*

16.1.5 Le différentiel

Corollaire 24 (Forme différentielle). *Pour y dérivable, l'accroissement se décompose, dans $\mathbb{R}$, en*

$$\Delta y = y'(x) \Delta x + \varepsilon \Delta x, \quad \varepsilon \in \mathfrak{m},$$

dont la partie linéaire $dy := y'(x) \Delta x$ est le différentiel. Le grain $\Delta x = 2^{-n_\infty}$ y joue littéralement le rôle de dx , et $dy = y'(x) dx$ retrouve l'écriture de Leibniz — ici non comme abus de notation, mais comme égalité entre grains (à un infinitésimal d'ordre supérieur près).

16.1.6 Ordres supérieurs : la descente dans la tour

Proposition 82 (La dérivée seconde vit un cran plus fin). *La dérivée seconde s'exprime par un quotient au second niveau de résolution :*

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \text{st} \left(\frac{y^*(x + 2\Delta x) - 2y^*(x + \Delta x) + y^*(x)}{(\Delta x)^2} \right), \quad (\Delta x)^2 = 2^{-2n_\infty}.$$

Le dénominateur $(\Delta x)^2 = 2^{-2n_\infty}$ est l'épaisseur du grain fin (résolution $-2n_\infty$) : la dérivée seconde descend d'un étage dans la tour.

Démonstration. Le développement de Taylor $y(x+h) = y(x) + y'(x)h + \frac{1}{2}y''(x)h^2 + o(h^2)$, valable par transfert pour $h = \Delta x$ infinitésimal, donne pour la différence seconde

$$y^*(x + 2\Delta x) - 2y^*(x + \Delta x) + y^*(x) = y''(x) (\Delta x)^2 + o((\Delta x)^2).$$

En divisant par $(\Delta x)^2 = 2^{-2n_\infty}$ (unité, d'inverse 2^{2n_∞}), le quotient vaut $y''(x) + \text{infinitésimal}$, de partie standard $y''(x)$. $\square$

Remarque 127 (Le calcul différentiel épouse la stratification). *La hiérarchie des dérivées $y, y', y'', \dots$ épouse la tour des résolutions : la dérivée k -ième fait intervenir l'épaisseur $(\Delta x)^k = 2^{-kn_\infty}$ (grain de niveau $-kn_\infty$). La non-idempotence ($2^{-2n_\infty} \neq 2^{-n_\infty}$) est ce qui rend ces niveaux distincts, donc ce qui permet aux dérivées d'ordres successifs de ne pas se confondre. La double mosaïque du programme (niveaux $-n_\infty$ et $-2n_\infty$) est ainsi le support naturel des dérivées première et seconde, et la tour entière celui de tous les ordres.*

16.1.7 Lien avec la métrique et l'anomalie cartésienne

Remarque 128 (La dérivée comme facteur d'échelle local). *La dérivée stratale dy/dx est le facteur d'échelle local : elle mesure de combien un grain de l'axe des abscisses est dilaté ou contracté sur l'axe des ordonnées. Une contraction non uniforme de l'axe $(y'Oy)$ — l'anomalie cartésienne — est donc décrite par un jacobien $y'(x)$ variable, dérivée stratale calculée point par point.*

Remarque 129 (L'origine doit être un grain, et à quel prix). *Une contraction ne peut agir sur un point de mesure nulle ($\lambda \cdot 0 = 0$). Pour que l'anomalie cartésienne ait prise sur l'origine, il faut donc prendre l'origine comme grain (épaisseur 2^{-kn_∞}), non comme point. Ceci se passe dans $\widetilde{\mathbb{R}}$ (avant promotion), à un niveau de résolution fixé : la contraction descend la tour des infinitésimaux ($2^{-kn_\infty} \rightarrow 2^{-(k+j)n_\infty}$) sans jamais franchir l'origine-point du corps $\mathbb{R}$, qui reste la limite inatteignable.*

Proposition 83 (Grain de référence commun pour la métrique). *Si l'anomalie contracte tout l'axe des ordonnées avec des épaisseurs locales $2^{-k(x)n_\infty}$ variables, la métrique est bien définie dès qu'il existe un niveau le plus fin atteint*

$$K := \sup_x k(x) \quad (\text{fini au sens de la tour}).$$

Le grain de référence 2^{-Kn_∞} sert alors d'unité commune : chaque épaisseur locale $2^{-k(x)n_\infty}$ en est un multiple entier ($2^{(K-k(x))n_\infty}$ fois), et la métrique s'exprime dans cette unique unité fine. Si K n'est pas atteint (contraction arbitrairement forte), il n'existe pas de grain commun, et la métrique n'est pas uniformément définie.

Remarque 130 (« Grain de référence »). *Ce que l'on cherche est un grain de référence commun au niveau le plus fin — un dénominateur*

d'épaisseur unique — dont tous les grains locaux sont des multiples entiers. Sa condition d'existence est que le niveau le plus fin $-Kn_\infty$ soit atteint : une contraction uniforme la garantit trivialement, une contraction à jacobien non borné la détruit.

16.1.8 Position

Remarque 131 (Un ancrage classique, interne à ZFC). *La dérivée stratale est la dérivée non standard, avec le grain pour infinitésimal concret. C'est une force : elle relie la construction du grain à l'objet le plus universel de l'analyse — la différentielle — et lui donne une origine géométrique (le déploiement du cercle). Elle confirme aussi le statut du programme : parallèle à l'analyse non standard, donc interne à ZFC. Le grain n'est pas un infinitésimal d'un type nouveau ; c'est une réalisation géométrique et graduée de l'infinitésimal classique. Loin d'affaiblir la thèse, cet adossement la rend défendable : le grain cesse d'être un postulat isolé pour devenir la face géométrique du dx .*

Chapitre 17

Interprétation de la rectification par bisection itérée

17.1 Interprétation corporelle

Partons de $\rho_1 \in \mathbb{Q}$ et $\theta_1 \in \mathbb{Q}\pi$ (typiquement $\theta_1 = \pi$, $\rho_1 = 1$). La construction de S_{k+1} à partir de S_k se trouve dans une extension algébrique de degré deux de L_k (corps comprenant les coordonnées de S_k). En effet, S_{k+1} s'obtient par intersection d'un cercle et d'une droite, et l'on applique le théorème de Wantzel. Plus précisément, si $\sin \theta_k, \cos \theta_k \in L_k$, alors $\cos \theta_{k+1} = \sqrt{\frac{1+\cos \theta_k}{2}}$, d'où $[L_{k+1} : L_k] = 2$.

Étant donné que S_1 a ses coordonnées dans $\mathbb{Q}$, la suite (S_k) vit dans une tour d'extensions quadratiques. Si l'on considère le premier ordinal transfini ω , on peut former :

1. la réunion $L_\omega = \bigcup_{k < \omega} L_k$,
2. le point limite $S_\omega := \lim_{k \rightarrow \infty} S_k \in \mathbb{R}^2$.

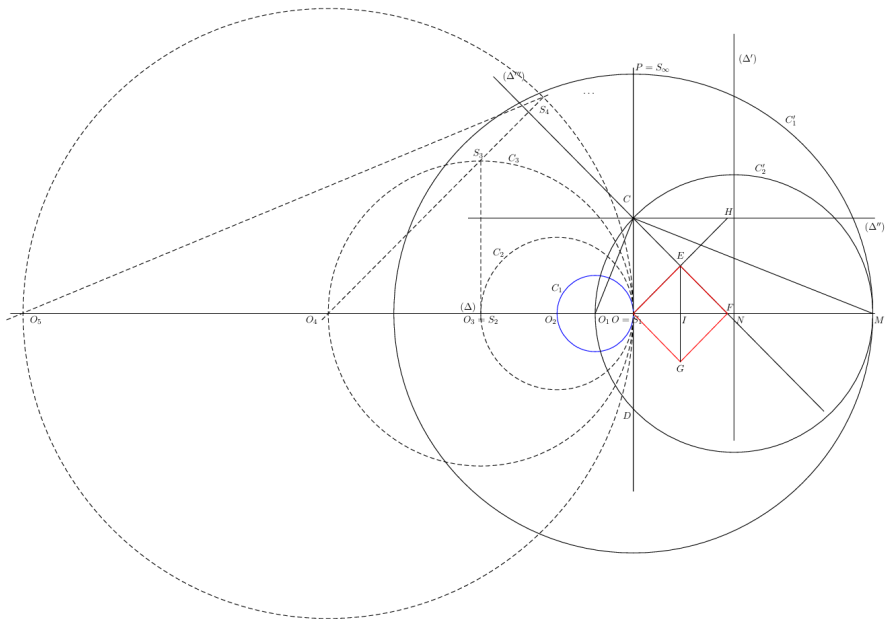


FIGURE 17.1 – Quadrature du cercle.

Soit $L_\omega = \bigcup_{k < \omega} L_k$. Alors :

1. L_ω est un sous-corps de $\mathbb{R}$, extension algébrique de $\mathbb{Q}$ de degré dénombrable :

$$[L_\omega : \mathbb{Q}] = \aleph_0.$$

2. La fermeture topologique $\widehat{L_\omega}$ de L_ω dans $\mathbb{R}$ vaut $\mathbb{R}$ tout entier, et contient π :

$$\widehat{L_\omega} = \mathbb{R}, \quad |\widehat{L_\omega}| = 2^{\aleph_0}.$$

3. En particulier, $\pi \in \widehat{L_\omega} \setminus L_\omega$.

Pour démontrer ce théorème, nous établissons d'abord deux lemmes préparatoires.

[Structure de L_ω] $L_\omega = \bigcup_{k < \omega} L_k$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$, et c'est une extension algébrique de $\mathbb{Q}$.

Démonstration. **Sous-corps.** Soient $x, y \in L_\omega$. Par définition, il existe $i, j < \omega$ tels que $x \in L_i$ et $y \in L_j$. Posons $k = \max(i, j)$. Comme la tour (L_n) est croissante, $x, y \in L_k$. Or L_k est un corps, donc $x + y, x - y, xy \in L_k \subset L_\omega$, et si $y \neq 0$, $x/y \in L_k \subset L_\omega$. De plus $0, 1 \in L_1 \subset L_\omega$. Donc L_ω est un sous-corps de $\mathbb{R}$.

Algébricité. Soit $x \in L_\omega$. Il existe k tel que $x \in L_k$. Par construction de la tour, $[L_k : \mathbb{Q}] = 2^{k-1}$ est fini, donc L_k est une extension algébrique finie de $\mathbb{Q}$. En particulier x est algébrique sur $\mathbb{Q}$. Comme cela vaut pour tout $x \in L_\omega$, l'extension $L_\omega/\mathbb{Q}$ est algébrique. $\square$

[Bases emboîtées] Il existe une suite croissante $(B_k)_{k \geq 1}$ de parties finies de L_ω telle que :

1. pour tout $k \geq 1$, B_k est une $\mathbb{Q}$ -base de L_k , de cardinal 2^{k-1} ;
2. $B_k \subset B_{k+1}$ pour tout $k \geq 1$.

Par conséquent, $B_\omega := \bigcup_{k \geq 1} B_k$ est une $\mathbb{Q}$ -base de L_ω .

Démonstration. Construction par récurrence sur k .

Initialisation. On prend $B_1 = \{1\}$, qui est une $\mathbb{Q}$ -base de $L_1 = \mathbb{Q}$, de cardinal $2^0 = 1$.

Hérédité. Supposons construite $B_k = \{e_1, \dots, e_{2^{k-1}}\}$ une $\mathbb{Q}$ -base de L_k . Comme $[L_{k+1} : L_k] = 2$, il existe $\alpha_{k+1} \in L_{k+1} \setminus L_k$ tel que $\{1, \alpha_{k+1}\}$ soit une L_k -base de L_{k+1} . Par transitivité des bases dans les tours d'extensions, la famille

$$B_{k+1} := B_k \cup \alpha_{k+1} B_k = \{e_1, \dots, e_{2^{k-1}}, \alpha_{k+1} e_1, \dots, \alpha_{k+1} e_{2^{k-1}}\}$$

est une $\mathbb{Q}$ -base de L_{k+1} . Elle est de cardinal $2 \cdot 2^{k-1} = 2^k$, et contient B_k par construction.

Choix du générateur α_{k+1}

Le point S_{k+1} , de coordonnées $(\cos \theta_{k+1}, \sin \theta_{k+1})$ dans le repère adapté, est défini comme l'intersection du cercle C_{k+1} et de la droite $(O_{k+1} S_k)$. Les points O_{k+1} et S_k ayant leurs coordonnées dans L_k , cette droite admet une équation

$$a x + b y = c, \quad a, b, c \in L_k.$$

Cas $b \neq 0$. On pose $\alpha_{k+1} := \cos \theta_{k+1}$. Puisque $[L_{k+1} : L_k] = 2$ et que S_{k+1} engendre l'étage, $\alpha_{k+1} \in L_{k+1} \setminus L_k$, donc $\{1, \alpha_{k+1}\}$ est une L_k -base de L_{k+1} , c'est-à-dire $L_{k+1} = L_k(\cos \theta_{k+1})$. La seconde coordonnée s'en déduit alors par la relation *linéaire* de la droite :

$$\sin \theta_{k+1} = \frac{c - a \cos \theta_{k+1}}{b}.$$

Le membre de droite est une expression rationnelle en α_{k+1} à coefficients dans L_k ; il appartient donc à L_{k+1} . Ainsi $\sin \theta_{k+1} \in L_{k+1}$: la seconde coordonnée ne crée *aucune* extension supplémentaire.

Cas $b = 0$. La droite est verticale ($x = c/a$ avec $c/a \in L_k$), donc $\cos \theta_{k+1} = c/a \in L_k$. C'est alors $\sin \theta_{k+1}$ qui engendre l'étage : on pose $\alpha_{k+1} := \sin \theta_{k+1}$, et $\cos \theta_{k+1} \in L_k \subset L_{k+1}$.

Dans les deux cas, *une* des deux coordonnées engendre L_{k+1} sur L_k , et l'autre s'en déduit rationnellement à coefficients dans L_k . En particulier S_{k+1} a ses deux coordonnées dans L_{k+1} , et $[L_{k+1} : L_k] = 2$.

Base de L_ω . Posons $B_\omega = \bigcup_{k \geq 1} B_k$. Vérifions que B_ω engendre L_ω sur $\mathbb{Q}$ et est libre.

Engendrement. Soit $x \in L_\omega$. Il existe k tel que $x \in L_k$, donc x s'écrit comme combinaison $\mathbb{Q}$ -linéaire finie d'éléments de $B_k \subset B_\omega$.

Liberté. Soit $\sum_{i \in I} \lambda_i b_i = 0$ une combinaison $\mathbb{Q}$ -linéaire finie d'éléments distincts de B_ω , avec $\lambda_i \in \mathbb{Q}$. L'ensemble I étant fini, il existe k tel que tous les b_i appartiennent à B_k . Comme B_k est libre sur $\mathbb{Q}$ (étant une base de L_k), tous les λ_i sont nuls. $\square$

Démonstration du théorème. Point (1). Le lemme 1 assure que L_ω est un sous-corps de $\mathbb{R}$, extension algébrique de $\mathbb{Q}$. Par le lemme 2, L_ω admet la $\mathbb{Q}$ -base $B_\omega = \bigcup_{k \geq 1} B_k$.

Calculons son cardinal. C'est une union dénombrable (indexée par $k \in \mathbb{N}^*$) d'ensembles finis (de cardinaux respectifs 2^{k-1}). Une union dénombrable d'ensembles finis est au plus dénombrable. Comme B_ω contient B_k pour tout k , et que $|B_k| = 2^{k-1} \rightarrow \infty$, B_ω est infini. Donc $|B_\omega| = \aleph_0$, et par définition du degré d'extension :

$$[L_\omega : \mathbb{Q}] = \dim_{\mathbb{Q}} L_\omega = |B_\omega| = \aleph_0.$$

Point (3). Montrons d'abord que $\pi \notin L_\omega$. Par le lemme 1, tout élément de L_ω est algébrique sur $\mathbb{Q}$. Or le théorème de Lindemann (1882) établit que π est transcendant sur $\mathbb{Q}$. Donc $\pi \notin L_\omega$.

Montrons ensuite que $\pi \in \widehat{L_\omega}$. Avec les paramètres $\theta_1 = \pi$ et $\rho_1 = 1$, on a $\ell_k = \rho_k \theta_k = \pi$ exactement, et la longueur de la corde rectifiée vaut $y_{S_k} = 2^{k-1} \sin(\pi/2^{k-1})$. Par l'équivalent $\sin u \sim u$ en 0 :

$$y_{S_k} = 2^{k-1} \sin(\pi/2^{k-1}) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \pi.$$

Comme chaque $y_{S_k} \in L_k \subset L_\omega$, on a bien $\pi \in \widehat{L_\omega}$. Combiné avec $\pi \notin L_\omega$, on obtient $\pi \in \widehat{L_\omega} \setminus L_\omega$.

Point (2). Observons que $\mathbb{Q} = L_1 \subset L_\omega$. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, L_ω l'est également, donc sa fermeture topologique dans $\mathbb{R}$ vaut $\mathbb{R}$ tout entier :

$$\widehat{L_\omega} = \mathbb{R}, \quad |\widehat{L_\omega}| = |\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}.$$

□

[Densité versus constructivité] La preuve du point (2) repose sur la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, qui suffit déjà à donner $\widehat{L_\omega} = \mathbb{R}$. Le saut de cardinalité $\aleph_0 \rightarrow 2^{\aleph_0}$ n'est donc pas spécifique à notre construction par bisection : il résulte de la complétion métrique de $\mathbb{R}$. Ce qui est propre à notre construction, c'est de fournir un *témoin géométrique explicite* de l'appartenance $\pi \in \widehat{L_\omega}$: la suite (y_{S_k}) est constructible à la règle et au compas, et converge vers π par un procédé déterministe. L'apport conceptuel se situe donc moins dans le cardinal de la fermeture que dans le caractère effectif et géométrique de l'approximation.

[Statut de S_ω] Le point $S_\omega = \lim_k S_k$ existe dans $\mathbb{R}^2$ par convergence de la suite, et son ordonnée vaut $y_{S_\omega} = \pi$. Toutefois, S_ω n'appartient pas à L_ω^2 : il vit dans $\widehat{L_\omega}^2 = \mathbb{R}^2$. Ainsi l'écriture symbolique « $\pi = S_\omega$ » doit s'entendre comme un passage à la limite topologique, et non comme une étape supplémentaire de la récurrence algébrique. C'est précisément cette distinction qui assure la compatibilité de notre construction avec le théorème de Lindemann-Wantzel : **π est atteint comme limite d'éléments constructibles, sans être lui-même un élément de la tour algébrique.**

Ce résultat prolonge l'approche de Wantzel à l'ordinal ω et jette un pont entre théorie de Galois, logique des ordinaux et géométrie constructive. Chaque approximation y_{S_k} est constructible à la règle et au compas en un nombre fini d'étapes, et $\pi = \lim_{k \rightarrow \infty} y_{S_k}$ est obtenu comme limite d'un procédé constructif transfini.

Ce lien prolonge également l'approche grecque. Nous obtenons un procédé récursif à règle finie qui produit π comme objet mathématique bien défini. Puisqu'il n'existe pas de suite finie d'opérations à la règle

et au compas pour construire π , nous ne contredisons pas Lindemann-Wantzel. L'impossibilité de la quadrature reste liée à la convention antique exigeant que la géométrie se fasse à la règle et au compas en un temps fini (Platon). Cette convention est devenue une frontière mathématique ; la conceptualisation de l'infini achevé par Cantor, puis Hilbert, autorise cette construction transfinie.

Par ailleurs, notre construction donne un sens géométrique à l'algèbre de Viète : on retrouve analytiquement la formule de Viète pour la suite (y_{S_k}) .

17.2 Interprétation algorithmique

On remarquera que π est calculable au sens de Turing. Nous disposons d'un algorithme pour construire π à l'infini : π est constructible au sens de Bishop et de l'intuitionnisme de Brouwer. Examinons la vitesse de convergence.

On a $y_k = \rho_k \sin(\theta_k) = 2^{k-1} \rho_1 \sin\left(\frac{\theta_1}{2^{k-1}}\right)$. On en déduit à chaque pas l'erreur $\epsilon_k = \rho_1 \theta_1 - y_k$. Posons $u_k = \frac{\theta_1}{2^{k-1}}$, qui tend vers 0 lorsque $k \rightarrow \infty$. Le développement de Taylor de $\sin$ donne :

$$\sin(u_k) = u_k - \frac{u_k^3}{6} + \frac{u_k^5}{120} - \dots$$

On en déduit l'expression de l'écart :

$$\epsilon_k = \rho_1 \theta_1 \left(\frac{\theta_1^2}{6 \cdot 4^{k-1}} - \frac{\theta_1^4}{120 \cdot 16^{k-1}} + \dots \right),$$

soit, à l'ordre dominant :

$$\epsilon_k \sim \frac{\rho_1 \theta_1^3}{6} \cdot \frac{1}{4^{k-1}}.$$

C'est donc une convergence géométrique de raison un quart. En dix étapes on obtient six décimales. Bien que de convergence identique à

celle d'Archimède, la construction est lente : par comparaison, les séries modernes de Ramanujan pour π gagnent 8 décimales par pas.

17.3 Interprétation suivant la théorie des périodes (Kontsevitch-Zagier)

On prend $\rho_1 = 1$ et $\theta_1 = \pi$.

Définition 91 (Période). *Un nombre complexe α est une période si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont des intégrales de fonctions rationnelles à coefficients rationnels sur des domaines de $\mathbb{R}^n$ définis par des inégalités polynomiales à coefficients rationnels.*

On appelle $\mathcal{P}$ l'anneau dénombrable formé par les périodes. Alors π est un exemple canonique de période. Soit le demi-cercle $y = \sqrt{1 - x^2}$:

$$\pi = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + y'(x)^2} dx = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

On a par ailleurs $y_{S_{k+1}} = 2^k \sin\left(\frac{\pi}{2^k}\right) = 2^k \int_0^{\pi/2^k} \cos t dt$. Ainsi (y_{S_k}) est une suite de périodes convergeant vers la période π , toutes dans le même anneau $\mathcal{P}$. On remarquera que les ℓ_k sont, eux, tous invariants et valent π .

Considérons la conjecture des périodes :

Conjecture 1 (Des périodes). *Si une période admet deux représentations intégrales différentes, alors on peut passer de l'une à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires : additivité, changement de variables, intégration par parties et formules de Stokes.*

C'est sur ℓ_k que se vérifie la conjecture des périodes. En effet, $\ell_k = \int_0^{\theta_k} \rho_k d\theta_k = \rho_k \theta_k = \pi$. Or passer de k à $k + 1$ revient aux changements de variables $\theta \mapsto \frac{\theta}{2}$ et $\rho \mapsto 2\rho$. On respecte donc la conjecture

17.3. INTERPRÉTATION SUIVANT LA THÉORIE DES PÉRIODES (KONTSEVITCH)

de Kontsevitch-Zagier : le changement de variable préserve la valeur de l'intégrale. On réalise géométriquement la suite de transformations algébriques de la période π . Nous avons ainsi un témoin géométrique de la structure profonde des périodes.

La théorie des périodes nous éclaire sur un nouveau statut de π : il est presque algébrique, il vit dans un anneau dénombrable $\mathcal{P}$ qui contient $\overline{\mathbb{Q}}$ et l'enrichit par les valeurs d'intégrales de fonctions rationnelles sur des domaines semi-algébriques rationnels.

Chapitre 18

Interprétation stratale de la rectification

Préambule

Ce document est la suite de l'article *Interprétations de la rectification du cercle par bisection itérée*, où l'interprétation galoisienne dans ZFC a été développée. Il présente ici l'*approche stratale* du même problème, dans le cadre du programme du grain.

Argument central. La construction géométrique par bisection itérée admet, outre la lecture galoisienne classique dans ZFC, une lecture stratale reposant sur une hiérarchie graduée de niveaux de résolution. Dans ce cadre, la rectification du cercle est *impossible en n_∞ étapes* (obstacle de courbure *visible*) et *quasi-exacte en $2n_\infty$ étapes* : la courbure résiduelle y est *invisible à la résolution $-n_\infty$* , mais non nulle dans l'anneau. La valeur exacte π n'est obtenue que par *promotion* (partie standard). Ces résultats sont compatibles avec le théorème de Lindemann : π reste *transcendant* — il n'est jamais construit, seulement *approché puis localisé* comme partie standard ; seul son *approximant* $y_{S_{2n_\infty}}$ est algébrique

stratal, de degré 2^{2n_∞} .

Public visé. Ce document est destiné au mathématicien familier avec ZFC et le théorème de Lindemann-Wantzel, mais qui ne connaît pas nécessairement le programme du grain. Les concepts stratals nécessaires sont introduits progressivement, avec renvois possibles à l'*axiomatique du grain* pour l'approfondissement.

Compatibilité. L'approche stratale *ne contredit pas* les théorèmes classiques (Wantzel, Lindemann) : elle en propose une lecture raffinée dans un cadre axiomatique différent, où la graduation entre inaccessibilité et constructibilité est plus fine que dans ZFC.

18.1 Rappel de l'interprétation galoisienne dans ZFC

18.1.1 Le procédé de bisection

On rappelle le procédé géométrique classique. Partant d'un cercle C_1 de rayon $\rho_1 = 1$ et d'un arc d'angle $\theta_1 = \pi$, on construit récursivement une suite de cercles (C_k) par doublement du rayon et bisection de l'angle :

$$\rho_k = 2^{k-1}, \quad \theta_k = \frac{\pi}{2^{k-1}}.$$

La corde rectifiée à l'étape k vaut :

$$y_{S_k} = 2\rho_k \sin(\theta_k/2) = 2^k \sin\left(\frac{\pi}{2^k}\right).$$

18.1.2 Le résultat principal de l'article précédent

Dans ZFC, la suite (y_{S_k}) converge vers π quand $k \rightarrow \infty$. L'article précédent établit :

Théorème 67 (Interprétation galoisienne, rappel). *Soit $L_\omega = \bigcup_{k < \omega} L_k$ où L_k est le corps contenant les coordonnées de S_k . Alors :*

1. L_ω est un sous-corps de $\mathbb{R}$, extension algébrique de $\mathbb{Q}$ de degré dénombrable : $[L_\omega : \mathbb{Q}] = \aleph_0$.
2. La fermeture topologique $L_\omega^c = \mathbb{R}$, de cardinalité $2^{\aleph_0}$.
3. $\pi \in L_\omega^c \setminus L_\omega$.

18.1.3 Les limites de la lecture ZFC

L'article précédent identifie explicitement les limitations conceptuelles de cette lecture :

- π est atteint comme *limite topologique* à l'ordinal ω , sans égalité exacte à aucune étape finie.
- Toutes les limites infinies sont ramenées à la seule limite ordinale ω : il n'y a pas de *graduation* entre les différents niveaux d'inaccessibilité.
- La construction reste *indéterminée à la limite* : ZFC n'offre pas de mécanisme pour préciser à quelle étape l'obstacle géométrique cesse d'être visible.

Ces limitations motivent la recherche d'un cadre plus fin, dans lequel la structure de la construction géométrique puisse être analysée avec une graduation intermédiaire entre le fini et l'ordinal ω .

18.2 Rappel de la construction géométrique complète

18.2.1 De la rectification au carré

Pour situer le contexte, on rappelle brièvement la construction géométrique complète établie dans *Squaring the circle* : la rectification du cercle C_1 produit (à la limite) un segment $[O, P]$ de longueur $2\pi\rho_1$, et à partir de ce segment, on construit géométriquement un carré d'aire $\pi\rho_1^2$ égale à celle de C_1 .

18.2.2 Les étapes de la construction

1. **Étapes 1 à n_∞ : bisection.** La suite (y_{S_k}) approche progressivement le segment de rectification $[O, P]$, dont la longueur tend vers $2\pi\rho_1$.
2. **Étapes $n_\infty + 1$ à $n_\infty + 5$: construction auxiliaire.** À partir de $[O, P]$, on construit successivement les cercles C'_1, C'_2 , le point C (avec $OC = \sqrt{2\pi\rho_1}$), le point H , et la perpendiculaire Δ'' .
3. **Étapes $n_\infty + 6$ et $n_\infty + 7$: formation du carré.** Construction des points E, F, G formant avec O le carré cherché, de côté $\sqrt{\pi\rho_1}$ et d'aire $\pi\rho_1^2$.

18.2.3 Le total : $n_\infty + 7$ étapes

La construction complète s'effectue en $n_\infty + 7$ étapes à la règle et au compas, *une fois admise la limite de rectification*. Ce résultat est valide dans le cadre géométrique de la construction transfinie, mais il laisse ouverte la question du statut précis des n_∞ premières étapes.

Remarque 132 (La question ouverte). *Que se passe-t-il exactement aux étapes proches de n_∞ ? La construction géométrique produit-elle π à cette étape, ou seulement à sa limite ? L'article précédent, dans le cadre ZFC, répond que π n'est atteint qu'à la limite ordinale ω , sans mécanisme de graduation entre n_∞ et $2n_\infty$.*

L'approche stratale, développée à partir de la Section 18.4, apporte précisément cette graduation — sans pour autant faire de π un objet construit.

18.3 Insuffisance conceptuelle des deux lectures classiques

18.3.1 Ce que ni la construction géométrique ni la lecture galoisienne ne disent

Les deux approches classiques (construction géométrique transfinie et interprétation galoisienne dans ZFC) laissent trois questions ouvertes :

- **À quelle étape l'obstacle cesse-t-il d'être visible ?** La construction géométrique produit une suite qui converge vers π , mais elle n'identifie pas de niveau spécifique où l'obstacle géométrique devient invisible.
- **Quel est l'obstacle géométrique exact ?** La construction implique une suite d'arcs qui deviennent de plus en plus courts, mais l'obstacle structurel (courbure du cercle, non-linéarité du sinus) n'est pas rendu explicite.
- **Y a-t-il une graduation entre inaccessibilité et constructibilité ?** Dans ZFC, il n'y a que deux statuts : constructible en temps fini (impossible pour π) ou atteint à la limite ω (topologiquement). Aucune graduation intermédiaire.

18.3.2 L'apport visé par l'approche stratale

L'approche stratale, développée dans les sections suivantes, apporte des réponses précises à ces trois questions :

- *L'obstacle est identifié* : c'est la *courbure visible* du cercle à la résolution $-n_\infty$.
- *Le niveau est identifié* : la rectification est *impossible* à n_∞ étapes et *quasi-exacte* (exacte après promotion) à $2n_\infty$ étapes.
- *La graduation est établie* : entre le fini, l'ordinal ω , et les niveaux stratals $n_\infty, 2n_\infty, 3n_\infty$, etc.

18.4 Le cadre stratal

18.4.1 Niveaux de résolution et infini gradué

Définition 92 (Niveaux strataux). *Le programme du grain distingue une hiérarchie de niveaux de résolution $\mathcal{G}_{-kn_\infty}$ ($k \geq 1$), correspondant à des grains d'épaisseur $1/2^{kn_\infty}$. Chaque niveau est un niveau achevé (non un stade transitoire d'une suite convergente), doté d'une finesse propre 2^{-kn_∞} .*

Remarque 133 (Distinction avec ZFC). *Dans ZFC, l'infini est essentiellement potentiel : une suite (u_k) tend vers une limite L sans jamais l'atteindre, et la seule limite discrète est l'ordinal ω .*

Dans le programme du grain, les niveaux $n_\infty, 2n_\infty$, etc. sont achevés et gradués. À un niveau donné, une construction a un statut tranché : soit impossible (obstacle visible à cette résolution, comme à n_∞), soit quasi-complète — exacte à un infinitésimal invisible à cette résolution près, donc exacte après promotion (comme à $2n_\infty$). Ce n'est pas la même chose qu'une approximation indéterminée à la limite potentielle ω : le niveau où l'obstacle disparaît est ici localisé.

18.4.2 Métrique et propriétés stratales

Le programme du grain équipe la hiérarchie stratale d'une métrique logarithmique et d'une notion de *courbure stratale* :

- La métrique stratale $d_\sigma(x, y) = |\ln(y/x)|$ est invariante par homothétie multiplicative (cf. *Métrique stratale*).
- La *courbure* d'un cercle C de rayon ρ vaut $1/\rho$. Son statut dépend du niveau d'observation : elle est *négligeable* (*invisible*) à la résolution $-kn_\infty$ si $1/\rho$ est d'ordre *supérieur* à la finesse 2^{-kn_∞} du niveau ; elle est *visible* sinon. Dans tous les cas elle reste *non nulle* dans l'anneau $\tilde{\mathbb{R}}$ (négligeable $\neq$ nul) ; elle ne s'annule ($st = 0$) qu'après promotion vers $\mathbb{R}$.

Ces deux outils suffisent pour analyser la rectification stratalement.

18.5 Impossibilité en n_∞ étapes

18.5.1 Le cercle à l'infini

Définition 93 (Cercle à l'infini C_{n_∞}). *Le cercle à l'infini C_{n_∞} est le cercle construit à l'étape n_∞ du procédé de bisection. Son rayon vaut $\rho_{n_\infty} = 2^{n_\infty-1}$ et il vit au niveau $\mathcal{G}_{+n_\infty}$.*

Sa factorisation stratale est :

$$(2\pi \cdot 2^{n_\infty}, 2^{n_\infty}, 2\pi)$$

2^{n_∞} grains de « largeur 2π » chacun.

18.5.2 Le théorème d'impossibilité

Théorème 68 (Impossibilité en n_∞ étapes). *Dans l'axiomatique stratale, la rectification de C_1 est impossible en n_∞ étapes de bisection itérée.*

L'obstacle structurel est la courbure visible du cercle à l'infini C_{n_∞} au niveau de résolution $\mathcal{G}_{+n_\infty}$:

$$\kappa(C_{n_\infty}) = \frac{1}{\rho_{n_\infty}} = \frac{1}{2^{n_\infty-1}} \approx 2^{-n_\infty},$$

infinitésimal de niveau n_∞ , de l'ordre même de la finesse 2^{-n_∞} du niveau, donc visible à cette résolution.

Démonstration. La courbure $\kappa \approx 2^{-n_\infty}$ est de l'ordre de la finesse du niveau $\mathcal{G}_{+n_\infty}$: elle n'y est pas négligeable, elle est *visible*. Une courbure visible implique que C_{n_∞} reste un cercle authentique, distinct d'une droite à cette résolution.

Sur un cercle authentique, la fonction $\sin$ n'est pas linéaire au sens stratal : $\sin(\pi/2^{n_\infty}) \neq \pi/2^{n_\infty}$, l'écart étant *déTECTABLE* au niveau $\mathcal{G}_{+n_\infty}$ (de l'ordre de la finesse). Par conséquent :

$$y_{S_{n_\infty}} = 2^{n_\infty} \sin(\pi/2^{n_\infty}) \neq \pi,$$

avec un écart visible à ce niveau : la rectification n'est pas achevée. $\square$

18.5.3 L'obstacle géométrique explicite

Remarque 134 (Ce que ce théorème identifie). *Contrairement à la lecture ZFC (qui identifie seulement que $\pi \notin L_\omega$ sans expliquer pourquoi), le Théorème 68 identifie la cause géométrique précise de l'obstacle : la courbure visible du cercle à l'infini.*

Cette identification transforme un résultat d'impossibilité classique en un diagnostic géométrique : la construction ne peut aboutir tant que la courbure est visible, et la question devient donc « à quelle étape la courbure devient-elle invisible ? »

La réponse est donnée dans la section suivante : à l'étape $2n_\infty$ (où elle devient invisible, puis nulle après promotion).

18.6 Localisation en $2n_\infty$ étapes

18.6.1 Le cercle géant

Définition 94 (Cercle géant C_{2n_∞}). *Le cercle géant C_{2n_∞} est le cercle construit à l'étape $2n_\infty$. Son rayon vaut $\rho_{2n_\infty} = 2^{2n_\infty-1}$ et il vit au niveau $\mathcal{G}_{+2n_\infty}$.*

Sa courbure vaut $\kappa = 1/2^{2n_\infty-1} \approx 2^{-2n_\infty}$: un infinitésimal négligeable à la résolution $-n_\infty$ (d'ordre supérieur à la finesse 2^{-n_∞}), et non inversible dans $\widetilde{\mathbb{R}}_1$ (son inverse 2^{2n_∞} déborde la borne 2^{n_∞}). Elle reste néanmoins non nulle dans l'anneau.

Remarque 135 (Indistinguable d'une droite, non identique à elle). *Une courbure négligeable à la résolution $-n_\infty$ signifie que C_{2n_∞} est indistinguable d'une droite à ce niveau. Mais ce n'est pas une identification exacte dans l'anneau : la courbure $\kappa = 2^{-2n_\infty}$ y demeure non nulle, donc C_{2n_∞} reste un cercle authentique. Ce n'est qu'après promotion ($\text{st}(\kappa) = 0$) que C_{2n_∞} devient la droite à l'infini Δ_∞ . On prendra garde : « négligeable » $\neq$ « nul », et « non inversible » $\neq$ « nul ».*

18.6.2 Le théorème de la rectification

Théorème 69 (Rectification en $2n_\infty$ étapes). *Dans l'axiomatique stratale, la rectification de C_1 est réalisée en $2n_\infty$ étapes, exacte après promotion :*

$$y_{S_{2n_\infty}} = \pi - \eta, \quad \eta \in \mathfrak{m} \text{ (infinitésimal)}, \quad \text{st}(y_{S_{2n_\infty}}) = \pi \text{ dans } \mathbb{R}.$$

Démonstration. Au niveau $\mathcal{G}_{+n_\infty}$ (résolution $-n_\infty$). La courbure $\kappa = 2^{-2n_\infty}$ est négligeable à cette résolution : elle est inférieure à la finesse 2^{-n_∞} du niveau, donc invisible. La rectification y est exacte *modulo la finesse du niveau* :

$$|y_{S_{2n_\infty}} - \pi| \ll 2^{-n_\infty}, \quad \text{soit} \quad y_{S_{2n_\infty}} \approx \pi \text{ (au niveau } -n_\infty).$$

Dans l'anneau $\widetilde{\mathbb{R}}$: un écart non nul. Comme $\kappa \neq 0$, C_{2n_∞} est un cercle authentique. Sur un cercle authentique, la corde est strictement plus courte que l'arc : la somme des cordes $y_{S_{2n_\infty}}$ est donc strictement inférieure à la longueur d'arc π . L'écart $\eta = \pi - y_{S_{2n_\infty}} > 0$ est géométriquement forcé, non nul dans l'anneau. (Sa taille se chiffre, si on le souhaite, par $\eta \sim \frac{\pi^3}{6} 2^{-4n_\infty}$ — enfoui quatre niveaux sous la surface, bien plus fin que κ lui-même. Cette estimation analytique n'est pas nécessaire à la preuve : l'existence de $\eta > 0$ résulte déjà de « corde < arc ».)

Passage à $\mathbb{R}$ (promotion). L'écart η est un infinitésimal : il est inférieur à *tout* seuil standard, donc $\eta \in \mathfrak{m}$ et $\text{st}(\eta) = 0$. Par conséquent

$$\text{st}(y_{S_{2n_\infty}}) = \pi - \text{st}(\eta) = \pi.$$

L'égalité $\text{st}(y_{S_{2n_\infty}}) = \pi$ vaut donc dans le corps $\mathbb{R} = \widetilde{\mathbb{R}}_{\text{fin}}/\mathfrak{m}$, où κ et η s'annulent ensemble. Dans l'anneau, π n'est qu'approché : il est la *partie standard* (la limite) d'une suite de constructibles, jamais l'un d'eux — conformément à sa transcendance. $\square$

18.6.3 Quasi-exactitude dans l'anneau, exactitude dans le corps

Remarque 136 (Ni égalité dans l'anneau, ni simple approximation indéterminée). *Le résultat $y_{S_{2n_\infty}} = \pi - \eta$ n'est pas une égalité exacte dans l'anneau $\widetilde{\mathbb{R}}$ (l'écart η y est non nul), ni une approximation indéterminée comme la limite ω de ZFC. C'est une quasi-exactitude localisée : exacte au niveau du corps $\mathbb{R} = \widetilde{\mathbb{R}}_{\text{fin}}/\mathfrak{m}$, où st écrase η , et localisée au niveau stratal précis $2n_\infty$.*

Ce motif est celui de tout le programme :

$$3g = 1 - u, \quad \widetilde{f} = 1 - 2^{-n_\infty}, \quad y_{S_{2n_\infty}} = \pi - \eta.$$

Valeur exacte après st ; le résidu est le sous-dominant stratal, porteur de l'information de finesse.

Contrairement à la lecture ZFC (où π est atteint à la limite ω sans localisation), la lecture stratale identifie un niveau précis, $2n_\infty$, où l'approximant est exact à un infinitésimal invisible près. C'est en cela que consiste l'apport : non pas atteindre π (impossible), mais localiser le niveau où il est approché exactement modulo promotion.

18.7 Statut de π : ce qui est stratal-algébrique, et ce qui ne l'est pas

18.7.1 L'approximant est stratal-algébrique, pas π

Proposition 84 (Statut de l'approximant $y_{S_{2n_\infty}}$). *L'approximant $y_{S_{2n_\infty}}$ (corde rectifiée à l'étape $2n_\infty$) appartient à l'extension stratale L_{2n_∞} de $\mathbb{Q}$, de degré 2^{2n_∞} au sens stratal, et*

$$\text{st}(y_{S_{2n_\infty}}) = \pi.$$

En revanche $\pi \notin L_{2n_\infty}$: π est la partie standard (la limite) de $y_{S_{2n_\infty}}$, non un élément de la tour. Ceci est cohérent avec la lecture galoisienne $\pi \in L_\omega^c \setminus L_\omega$ (Théorème 67).

18.7.2 Compatibilité avec Lindemann

Remarque 137 (π reste transcendant dans tous les cadres). *La Proposition 84 ne met nullement en cause le théorème de Lindemann. π est transcendant sur $\mathbb{Q}$: il n'est racine d'aucun polynôme rationnel de degré fini, et il n'appartient à aucun L_k — ni classique, ni stratal. Ce qui est stratal-algébrique, c'est l'approximant $y_{S_{2n_\infty}}$ (élément constructible de L_{2n_∞}), non π lui-même.*

La promotion st n'est pas une étape de construction : c'est un passage à la limite (l'écrasement des infinitésimaux). Une limite de constructibles n'est pas constructible — c'est précisément ce qui permet à π d'être approché d'aussi près qu'on veut tout en restant transcendant.

18.7.3 Ce que la lecture stratale ajoute réellement

Remarque 138 (Graduation de l'inaccessibilité, non algébricité de π). *Dans l'axiomatique stratale, π n'acquiert pas un statut algébrique : il reste transcendant. Ce que la lecture stratale ajoute n'est pas un changement de statut de π , mais une graduation de son inaccessibilité :*

- un obstacle explicite (la courbure visible) au niveau n_∞ , où la rectification est impossible ;
- un niveau de localisation ($2n_\infty$) où l'approximant constructible ys_{2n_∞} est exact à un infinitésimal invisible près, avec $\text{st}(ys_{2n_\infty}) = \pi$.

La dichotomie classique algébrique/transcendant n'est pas abolie : elle est complétée par une hiérarchie graduée de niveaux d'approche, sans que π cesse d'être transcendant. Lindemann est préservé, et enrichi d'une géométrie de l'approche.

18.8 Perspectives géométrique, algébrique et ensembliste

18.8.1 Localisation de π et quadrature

- Nous avons construit ys_{2n_∞} , un objet stratal dans le voisinage infinitésimal de π , dont π est la partie standard dans $\mathbb{R}$. π n'est pas construit, il est localisé, la valeur exacte est obtenue par promotion (passage à la limite) non par une étape de construction, π reste transcendant.
- Le carré construit à partir de ys_{2n_∞} a une aire dont la partie standard égale celle du cercle donné $\text{st}(\text{aire}\square) = \pi\rho_1^2 = \text{aire}(C_1)$. Dans l'anneau, l'égalité est quasi-exacte (à un infinitésimal près), elle devient exacte par promotion.
- La valeur exacte de π n'est pas obtenue par un simple passage à la limite, mais par une construction algébrique : la promotion $\widetilde{\mathbb{R}}_{\text{fin}}/\mathfrak{m} = \mathbb{R}$, quotient par l'idéal maximal des infinitésimaux. En ce sens, l'algèbre vient au secours de la géométrie : là où la construction géométrique (finie, à la règle et au compas) reste bloquée par Lindemann-Wantzel, la structure algébrique du quotient donne un sens exact à l'égalité - dans un registre distinct, qui ne conteste

pas l'impossibilité géométrique. Le procédé est algébrique, π lui reste transcendant.

18.8.2 Encadrement de π

- Les coordonnées de $S_{2n_\infty} \in C_{2n_\infty}$ vivent dans la strate $\mathbb{R}|_2$. La projection (règle et compas) de S_{2n_∞} , sur la droite de rectification Δ_∞ définit la longueur y_{2n_∞} . Cette projection transporte la structure additive (positions, ordre), non la structure d'anneau complète (la multiplication des grains n'est pas préservée par la projection). Sur Δ_∞ , π est localisé comme une partie standard : $st(y_{2n_\infty}) = \pi$, le point y_{2n_∞} étant à une distance infinitésimale de π .
- Les cercles du faisceau (C_k) , tangents en O et de centres alignés sur Δ , partagent la tangente commune T_O en O . Sur C_{2n_∞} , dont le rayon $2^{2n_\infty-1}$ est transfini, l'écart entre le cercle et sa tangente est infinitésimal sur toute portion de longueur $\ll \rho$: à la résolution considérée, C_{2n_∞} (i.e Δ_∞ après promotion) et T_O coïncident localement. La longueur rectifiée y_{2n_∞} , portée par une telle portion, s'y lit donc indifféremment sur le cercle géant ou sur la tangente.
- Le grain y_{2n_∞} n'est pas un point sans épaisseur, il occupe sur Δ_∞ une plage de finesse $\sim 2^{-2n_\infty}$. L'écart longitudinal $\eta = \pi - y_{2n_\infty} \sim 2^{-4n_\infty}$ est infinitésimal devant cette finesse. Donc, le point $\pi = st(y_{2n_\infty})$ tombe à l'intérieur du grain y_{2n_∞} . On ne construit pas le point π (transcendant, non constructible), mais on construit un grain qui le contient dans son épaisseur : $\pi \in [y_{2n_\infty}; y_{2n_\infty} + \text{finesse}]$.
- Le segment construit $[O; y_{2n_\infty}[$ est strictement inclus dans la rectification $[O; \pi[$, dont il diffère de l'infinitésimal $\eta = |O\pi| - |Oy_{2n_\infty}|$. Il ne recouvre pas la rectification. Il l'approche par défaut. En revanche le grain y_{2n_∞} d'épaisseur $2^{-2n_\infty} \gg \eta$ contient le point π dans son épaisseur : $y_{2n_\infty} < \pi < y_{2n_\infty} + \text{finesse}$. On construit donc un grain qui encadre π sans construire le point π lui-même.

18.8.3 Dans l'illimité

- Nous obtenons une tour de grains emboîtés qui contiennent tous $\pi : y_{2n_\infty} \supset y_{3n_\infty} \supset y_{4n_\infty} \dots \ni \pi$. Les encadrements se resserrent autour de π . L'intersection de la tour emboîtée prise au niveau illimité donne le point π . Où le niveau illimité $2^{\aleph_0}$ est la promotion et l'intersection illimitée est π , mais comme point du continu, obtenue par complétude, non par construction. C'est un point de fuite qui vit dans l'illimité qui est la promotion.
- Ce qui ne contredit pas le théorème de Wantzel. Ici π n'est dans aucune extension de degré fini (il est transcendant). Il n'apparaît que comme promotion, passage à la limite, hors du champ de Wantzel.
- Dans l'infini achevé (le continu $\mathbb{R}$ obtenu par promotion) l'égalité $y_{2n_\infty} = \pi$ est exacte. La rectification de cercle est réalisé au sens de la promotion - comme valeur limite dans le corps $\mathbb{R}$. Ce n'est pas la rectification classique (finie, à la règle et au compas) qui reste impossible (Lindemann, Wantzel) ; c'est son accomplissement dans l'infini achevé, par passage à limite et non par une construction finie.

Théorème 70 (Émergence de π dans l'infini achevé et rectification du cercle). *La tour des grains $(y_{kn_\infty})_{k \geq 2}$ est emboîtée et encadre π à chaque niveau :*

$$y_{2n_\infty} \supset y_{3n_\infty} \supset \dots \ni \pi, \quad \text{st}(y_{kn_\infty}) = \pi \quad (k \geq 2),$$

la finesse 2^{-kn_∞} décroissant avec k . À la limite illimitée (par complétude), l'intersection de la tour se réduit au seul point π :

$$\lim_k y_{kn_\infty} = \{\pi\}.$$

C'est à cette limite — le passage à l'illimité, qui est la promotion — que π émerge comme point du continu $\mathbb{R}$, obtenu par complétude. Chaque grain (hyperfini) encadre π ; seule leur limite est π .

Contrairement au voisinage métrique (logique de Cauchy), l'encadrement $y_{kn_\infty} < \pi < y_{kn_\infty} + \text{ finesse}$ relève de la théorie des segments emboîtés. L'intersection $\cap_k$ est un point unique et existant (non une potentialité) fournie par la complétude de $\mathbb{R}$ et la logique de l'infini achevé. Ce point est π . Il est transcendant, racine d'aucun polynôme à coefficients entiers donc a fortiori non constructible au sens de Wantzel, ce qu'on a pu vérifier.

18.9 Dualité δ_2 et cohérence interne

18.9.1 Deux apparitions de π dans le programme

Dans le programme du grain, π apparaît sous deux formes géométriquement distinctes, toutes deux *obtenues par promotion* :

- Par *rectification ascendante* : $\pi = \text{st}(y_{S_{2n_\infty}})$, partie standard de la corde rectifiée au niveau $\mathcal{G}_{+2n_\infty}$ (le présent travail).
- Par *structure cyclique descendante* : π comme invariant du cercle unité dans le plan complexe stratal, lié au quotient $\mathcal{G}_{-n_\infty}/\mathcal{G}_{-2n_\infty}$ (cf. *Exponentielle complexe*).

Ces deux apparitions se produisent à des niveaux strataux *opposés* (ascendant vs descendant) et méritent d'être articulées.

18.9.2 La dualité δ_2 du Volume II

Proposition 85 (Dualité δ_2 et articulation des deux apparitions). *La bijection canonique $\delta_2 : \mathcal{G}_{+2n_\infty} \rightarrow \mathcal{G}_{-2n_\infty}$ du Volume II du programme — bijection sur les échelles (les unités, puissances de 2), où elle coïncide avec l'involution $\iota : x \mapsto 1/x$ — relie les deux apparitions :*

- $y_{S_{2n_\infty}} \in \mathcal{G}_{+2n_\infty}$, avec $\text{st}(y_{S_{2n_\infty}}) = \pi$ (rectification ascendante) ;
- l'image δ_2 dans $\mathcal{G}_{-2n_\infty}$, correspondant à la structure cyclique descendante du cercle unité stratal.

Dans les deux cas, π n'est récupéré que par promotion, jamais comme élément de l'anneau.

Remarque 139 (Cohérence interne). *Cette dualité exprime que π (comme partie standard) est un unique objet limite du programme, approché sous deux facettes selon le niveau où on l'observe. La rectification ascendante et la structure cyclique descendante ne sont pas deux résultats indépendants, mais deux vues d'un même passage à la limite.*

18.10 Position dans le corpus et apport de l'approche stratale

18.10.1 Comparaison synthétique

Le tableau suivant récapitule les statuts de π dans les trois cadres :

Cadre	Logique	Statut de π	Étapes
Wantzel/Lindemann	Finie	Non-constructible	$< \infty$
Galoisien (ZFC)	Infini potentiel	$\pi \in L_\omega^c \setminus L_\omega$	ω (limite)
Stratal (grain)	Infini gradué	Transcendant ; st de $y_{S_{2n_\infty}}$	$2n_\infty$ (à η près)

Dans la ligne stratale, ce qui est *stratal-algébrique de degré 2^{2n_∞}* est l'approximant $y_{S_{2n_\infty}}$, non π ; π en est la partie standard, et reste transcendant.

18.10.2 Ce que l'approche stratale apporte

Remarque 140 (Trois apports spécifiques). *L'approche stratale apporte trois éléments spécifiques par rapport aux lectures classiques :*

- **Identification précise de l'obstacle.** *La courbure visible au niveau $\mathcal{G}_{+n_\infty}$ est identifiée comme obstacle structurel, absente des lectures ZFC.*

- **Niveau exact de localisation.** $2n_\infty$ est identifié comme le niveau où l'approximant est exact à un infinitésimal invisible près, avec $\text{st}(y_{S_{2n_\infty}}) = \pi$ — localisation absente dans ZFC.
- **Graduation intermédiaire.** La hiérarchie $n_\infty, 2n_\infty, 3n_\infty, \dots$ constitue une graduation entre le fini et l'ordinal ω , inexistante dans ZFC.

Ces apports enrichissent l'analyse classique sans la contredire : Lindemann-Wantzel restent valides, et l'approche stratale les prolonge par une lecture plus fine — sans jamais rendre π constructible.

18.10.3 Ce qui reste ouvert

Plusieurs directions restent à explorer :

- *Généralisation à d'autres constantes transcendentes.* $e, \gamma, \zeta(3)$: leurs approximants strataux se localisent-ils à des niveaux caractéristiques ?
- *Théorie de Galois stratale.* La notion d'extension stratale L_{kn_∞} appelle une théorie des extensions et des groupes d'automorphismes préservant les niveaux.
- *Articulation avec l'analyse non-standard.* Comparaisons formelles avec Robinson et la théorie des ensembles internes (Nelson) — en notant que la construction est, comme l'analyse non standard, interne à ZFC.

Conclusion

Ce document a présenté l'approche stratale de la rectification du cercle par bisection itérée, en suite de l'article précédent sur l'interprétation galoisienne dans ZFC.

Les deux résultats centraux sont :

- L'impossibilité en n_∞ étapes (Théorème 68) : identification de la courbure *visible* comme obstacle géométrique explicite.
- La localisation en $2n_\infty$ étapes (Théorème 69) : identification du niveau stratal où l'approximant est exact à un infinitésimal invisible près, avec $\text{st}(y_{S_{2n_\infty}}) = \pi$ après promotion.

Le statut de π qui en résulte n'est pas double au sens d'un changement d'algébricité : π reste *transcendant* (Lindemann) dans tous les cadres. Ce qui est stratal-algébrique, de degré 2^{2n_∞} , est son *approximant* $y_{S_{2n_\infty}}$; π en est la partie standard.

L'apport de l'approche stratale par rapport à ZFC est structurel : une *graduation* entre inaccessibilité et approche, avec un diagnostic géométrique précis (courbure visible) et un niveau exact de localisation ($2n_\infty$). Cette graduation n'invalide pas ZFC et ne rend pas π constructible : elle enrichit l'analyse classique d'une géométrie fine de la manière dont π échappe à la construction.