

Recherche

Hugues Genvrin

Septembre 2025

Table des matières

I	Mathématique	11
1	Formes à supports circulaire	13
1.1	Une collection de formes à supports circulaires . . .	13
1.1.1	Description	13
1.1.2	Le cas de base	19
1.1.3	La famille $(B_k)_{k \in \mathbb{Z}}$	34
2	Réciproque de la rectification	41
3	$0,99\dots 9 \neq 1$	45
4	Cardinal du continu	47
4.1	Cardinal du continu	47
4.2	Généralisation à tous les types de bornes du continu linéaire	48
5	Construction des entiers	51
5.1	Ordinaux	52
5.2	L'infini actuel	52
5.3	Les nombres cardinaux	53

6	Topologie du grain	55
6.1	Le grain	55
6.1.1	Origine du grain	55
6.1.2	Structure	56
6.1.3	Relation entre les grains	57
6.1.4	Terminologie	58
6.2	Autosimilarité et fractalisation	60
6.2.1	Autosimilarité et polymorphisme	60
6.2.2	Fractalisation	60
6.2.3	Pseudo-identité entre les grains circulaires et les zéros.	61
6.3	Contraction et dilatation	62
6.3.1	La contraction : τ_{di}^{-1}	62
6.3.2	Les dilatations τ_{di}	62
6.3.3	La dilatation de l'échelle	62
6.3.4	La dilatation par paliers finis	63
6.3.5	Contraction et dilatation du cercle unité com- plexe	64
6.3.6	Dilatation du continu	66
7	Construction des réels	69
7.1	L'unité est équivalente à 2^{n_∞}	69
7.2	Numérotation d'une forme $\mathcal{F}_3 = [0; 2^{n_\infty}[$	70
8	Théorie des ensembles	75
8.1	Un continu dénombrable	75
8.2	Axiomatique de Zermelo-Fraenkel	77
8.3	Réflexivité	80
8.4	Encapsulation	82
8.5	L'hypothèse du continu	82

<i>TABLE DES MATIÈRES</i>	5
8.6 Méthode d'individuation des réels	83
9 Construction des nombres transfinis	89
10 Infinis en acte	91
11 Construction des nombres complexes	93
11.1 La construction	93
11.1.1 Relation de mise en correspondance de Hamilton entre $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$	93
11.1.2 Quelques calculs élémentaires et identités dans F	95
11.2 Création d'un espace vectoriel F opérant sur un ensemble de nombres K_F	96
11.2.1 Deux structures de groupes commutatifs . .	96
11.2.2 Une structure d'anneaux	98
11.2.3 L'anneau F définit une structure d'espace vectoriel	99
11.3 La construction du plan complexe $\mathbb{C}$	103
11.4 Construction de $\imath$	105
12 Du plan réel vers le plan complexe	107
13 Que le plan complexe est l'expression du zéro	109
13.1 Construction de mesures	109
13.1.1 Construction des tribus borélienne	109
13.1.2 Construction de mesures définies positives .	110
13.2 Applications	110
13.2.1 $\mathcal{P}_{\mathbb{C}} \rightarrow 0$	110
13.2.2 $0 \rightarrow \mathcal{P}_{\mathbb{C}}$	111

14	Constante d'Euler-Mascheronni	113
15	L'exponentielle réelle	115
16	Quadrature du cercle	117
16.1	Rectification d'un cercle donné	118
16.1.1	Principe	118
16.1.2	Conséquence du mécanisme récursif	119
16.2	Le cercle à l'infini	120
16.2.1	Le cercle à l'infini	120
16.2.2	$C_\infty = \Delta_\perp = (OP)$	120
16.3	La quadrature	121
17	Formules	125
17.1	Définitions	125
17.2	De l'infini potentiel vers l'infini actuel	126
17.3	De l'infini actuel vers l'infini potentiel	126
18	Arrangements et combinaisons	129
18.1	Arrangements	129
18.2	Combinaisons	131
19	Une intégrale impropre	135
19.1	Introduction	135
19.2	La fonction $\ln$	135
20	Intégrale impropre par la réciproque	137
21	L'information de Reny	141
21.1	Cas où $\mathcal{I}$ est entière	141
21.2	Cas fini, réel	142

21.3	Remarque	142
21.4	La néguentropie de composition	143
21.5	Démonstration que $\mathcal{I} = \log_2 N$	144
22	L'entropie de Shannon	145
22.1	Introduction	145
22.2	Entropie de Shannon	146
22.3	Interprétation	147
23	Processus d'intégration transfini	149
23.1	Intégration	150
23.2	Application à la fonction inverse	151
23.3	Autres Applications	152
24	Théorème du réarrangement de Riemann	157
24.1	Démonstration pour le cas de f	158
24.2	Implications	159
25	Convergence asymptotique	161
26	À propos de deux séries divergentes	165
26.1	Sommations infinies	165
II	Physique	167
27	L'inertie	169
27.1	De la relation fondamentale de la dynamique à l'inertie	169
27.2	Deux formes d'inertie	170
27.3	Corps libre	171
27.4	Corps non libre	172

28 Relation Fondamentale de la dynamique	173
28.1 Le système formel	173
28.2 La dynamique	174
28.2.1 La force résultante	174
28.2.2 Équation aux dimensions	174
28.2.3 Le cas de base $\mathbf{F}_r > \mathbf{0}$	175
28.2.4 Situation d'équilibre	175
28.2.5 Retournement de la force $\mathbf{F}$	175
28.3 Extension du domaine d'application de la RFD . .	176
29 Forme de l'espace	177
29.1 Les plans	177
29.1.1 Structures planaires	177
29.1.2 Plan complexe Recto-verso	181
29.1.3 Généralisation de la superposition	183
29.2 Passage à l'hypertore et à l'hypersphère	185
29.3 Enjeu de la fibration	186
29.4 Création de mondes intriqués et parallèles	186
30 La réalité	189
30.1 Approche épistémologique	189
30.1.1 Qu'est-ce que la réalité?	189
30.1.2 La réalité d'un système physique	189
30.2 Approche physique	190
30.2.1 L'enchevêtrement quantique	190
30.2.2 L'intrication physique	190
30.3 Approche mathématique	191
30.3.1 Base de dimension un pour espace de dimension 2	191
30.3.2 Construction de $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}^*$ (plan complexe prolongé)	192

30.3.3 Pseudo-identité	192
30.3.4 Accès à l'information	194

Bordeaux, le 17 Septembre 2025

Première partie

Mathématique

Chapitre 1

Formes à supports circulaire

1.1 Une collection de formes à supports circulaires

On appelle support circulaire un cercle sur lequel va se déployer partiellement ou totalement une forme. Nous allons nous intéresser plus particulièrement à la famille $B_{k,2^{-k+1}}^{\rho_0}$ ou $k \in \mathbb{Z}$ et $\rho_0 \in \mathbb{R}_*^+$. Ici, k est un indice pour désigner les éléments de la collection, ρ_0 est un paramètre fixe pour tout k . Pour simplifier les notations, $(B_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ désignera la famille de formes.

1.1.1 Description

Notations

On travaille dans le plan Euclidien muni d'un repère cartésien $R=(O, \vec{i}, \vec{j})$. On notera les éléments de la famille $(B_k)_{k \in \mathbb{Z}} : B_k$.

Définition. $\forall k \in \mathbb{Z}$ C_k est le cercle de centre $O_k(-2^k \rho_0, 0)$, de rayon $\rho_k = 2^k \rho_0$. On le désignera également sous la forme $C_k(O_k, \rho_k)$

Définition. $\forall k \in \mathbb{Z}$ B_k désigne la forme qui a pour support circulaire C_k . L'origine du brin est en O , l'extrémité finale en S_k , qui n'appartient pas à la boucle. Comme on est susceptible de parcourir plusieurs fois le cercle support, on affecte l'origine d'un indice de recouvrement qui vaut 1, on note O^1 . On pourra noter le segment curviligne constituant la boucle $(O^1; \bar{S}_k)$. On précise qu'on oriente définitivement le sens positif sur C_k conformément au sens positif trigonométrique. Dans l'expression $B_{k, 2^{-k+1}}^{\rho_0}$ l'indice 2^{-k+1} nous renseigne sur la position de S_k sur C_k .

En effet, B_k parcourt 2^{-k+1} fois son cercle support. Cela nous suggère de noter également $B_k = 2^{-k+1} \{C_k\}$.

Comme les boucles peuvent parcourir plusieurs fois leurs cercles supports, on va affecter tous les points d'indices de recouvrement pour clairement repérer leurs positions.

Ainsi on aboutit à une classification géométrique tripartite des B_k .

1° Le cas trivial pour $k=1$ Ici $B_1 = C_1(O_1(-2\rho_0, 0); 2\rho_0)$ et $S_1 = O^2$ ou O affecté d'un indice de recouvrement d'ordre 2.

2° Pour $k < 0$; des boucles circulaires qui se superposent.

On parlera alors de $2^{|k|+1}$ -boucles. Par exemple pour $k=0, -1, -2, \dots, -k_0$ ($k_0 \in \mathbb{N}$) B_k balaie respectivement $2, 4, 8, \dots, 2^{|k_0|+1}$ fois C_k pour former $B_0, B_{-1}, B_{-2}, \dots, B_{-k_0}$.

Dans ces cas, $\forall k \in \mathbb{Z}$ S_k est le point O , plus exactement c'est O affecté d'un indice de recouvrement $2^{|k_0|+1}+1$ qu'on note $O^{2^{|k_0|+1}+1}$.

3° Pour $k > 0$, des arcs de cercles. On pourrait se risquer à les qualifier de boucles partielles. B_k est un arc de cercle dont l'origine est en O , qui parcourt $1/2^{k-1}$ -ième du cercle support C_k .

Par exemple, pour $k=2,3,4,\dots,k_0$, B_k balaie respectivement $1/2, 1/4, 1/8, \dots, 1/2^{k_0-1}$ de partie du cercle C_k pour former respectivement $B_2, B_3, B_4, \dots, B_{k_0}$.

4° Convention sur les éléments de B_k . Par rapport au cadre géométrique Euclidien, on s'autorise de recouvrir plusieurs fois cercles et points. La variable β va servir à distinguer les différents recouvrements pour un même point. On note T_k^β les éléments de B_k où $\beta \in \mathbb{N}$ est tel que $\beta \leq 2^{|k|+1}$. La notation T_k^β indique donc que T_k est affecté de l'indice de recouvrement β . Cette notation sera très utile lorsque les B_k parcourront plusieurs fois le cercle support. Cependant T_k désignera un point en général de B_k .

Entre les éléments de B_k il existe une relation qu'on note $\perp$, qui est d'être consignée graphiquement par un point géométrique précis du support de B_k . Montrons que c'est une relation d'équivalence .

$\perp$ est évidemment réflexive : $\forall T_{k_0}^\beta \in B_k$ $T_{k_0}^\beta$ sera représenté graphiquement par T_{k_0} , soit nous avons $T_{k_0}^\beta \perp T_{k_0}^\beta$

$\perp$ est symétrique : $\forall T_{k_0}^\beta, \forall T_{k'_0}^{\beta'} \in B_k$, si $T_{k_0}^\beta \perp T_{k'_0}^{\beta'}$ les 2 éléments sont graphiquement consignés sous le même point T_{k_0} donc $k_0 = k'_0$, et on a aussi $T_{k'_0}^{\beta'} \perp T_{k_0}^\beta$, soit $\perp$ est symétrique.

$\perp$ est transitive : Soient $T_{k_0}^\beta, T_{k'_0}^{\beta'}, T_{k''_0}^{\beta''}$ trois éléments de B_k . On suppose $T_{k_0}^\beta \perp T_{k'_0}^{\beta'}$ et $T_{k'_0}^{\beta'} \perp T_{k''_0}^{\beta''}$, alors $T_{k_0}^\beta$ et $T_{k'_0}^{\beta'}$ sont consignés sous un même point, $T_{k_0}^\beta$ et $T_{k''_0}^{\beta''}$ également. On en déduit alors que $T_{k'_0}^{\beta'}$ et $T_{k''_0}^{\beta''}$ sont consignés sous le même point géométrique. La relation étudiée est transitive.

On en conclut ainsi que $\perp$ est une relation d'équivalence.

On se propose de noter $\widetilde{T_{k_0}}$ la classe d'équivalence de $T_{k_0}^\beta$. Elle est constituée de l'ensemble des éléments qui graphiquement recouvrent T_{k_0} . Pour $k_0 > 0$, la classe est un singleton : $T_{k_0}^1$. Pour $k_0 \leq 0$ la classe est constituée d'un $2^{|k_0|+1}$ -uplet, plus exactement, $\widetilde{T_{k_0}} = \{T_{k_0}^1, T_{k_0}^2, \dots, T_{k_0}^{2^{|k_0|+1}}\}$.

Caractéristiques géométriques des trois ensembles de B_k

On passe rapidement sur le cas trivial $k=1$ pour lequel B_1 est un cercle.

1° Pour $k > 1$, une gerbe d'arcs de cercles. $\forall k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, (B_k) décrit une gerbe d'arcs de cercles tangents en O .

a) On appelle θ_k l'angle au centre $\widehat{OO_kS_k}$, alors $\theta_k = 2\pi^{-k+1} = \frac{\pi}{2^{k-2}}$. Soit $(\theta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite formée par les θ_k sur chaque C_k , nous avons $\theta_{k+1} = \frac{1}{2}\theta_k$. Comme $\theta_1 = 2\pi$ et $\forall k \in \mathbb{N} \theta_k > 0$ donc (θ_k) est bornée. De plus elle est strictement décroissante, alors elle converge. Par ailleurs $\lim_{k \rightarrow \infty} \theta_k = 0$ d'où on en déduit que (θ_k) converge vers 0 par valeurs décroissantes.

b) On appelle α_k l'angle à l'origine $\widehat{O_kOS_k}$. En remarquant que (O_k, O, S_k) forme un triangle isocèle en O , il vient $2\alpha_k + \theta_k = \pi$, soit $\alpha_k = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta_k}{2}$ ou encore $\alpha_k = \frac{\pi}{2}(1 - \frac{1}{2^{k-2}})$.

Si on note $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite des termes en α_k , on a (α_k) qui est majorée par $\frac{\pi}{2}$.

$\forall k \in \mathbb{N}$, $\alpha_{k+1} - \alpha_k = \frac{\theta_k}{4}$. Comme $\theta_k > 0$ pour tout k , il s'en suit que $\alpha_{k+1} > \alpha_k$, donc (α_k) est strictement croissante. De plus elle est majorée, donc elle est convergente.

$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = \frac{\pi}{2}$ implique que (α_k) converge vers $\frac{\pi}{2}$ par valeurs croissantes.

c) Voyons les supports circulaires. Soit $O_k(x_k, y_k)$ le centre de C_k . Évidemment $\forall k \in \mathbb{Z} \ y_k = 0$. Avec $x_k = -2^k \rho_0$, $x_{k+1} = 2x_k$ pour tout k , donc on obtient le centre du cercle support qui succédera à C_k en prenant l'extrémité O_{k+1} du diamètre $[O; O_{k+1}]$ de C_k . Alors, il ne reste plus qu'à tracer le cercle C_{k+1} de centre O_{k+1} et de rayon $[O; O_{k+1}]$.

d) Considérons maintenant la boucle $(O; \bar{S}_k)$. $\forall k \in \mathbb{Z} \ \mu(O; \bar{S}_k) = \theta_k \rho_k = \frac{\pi}{2^{k-2}} 2^k \rho_0 = 4\pi \rho_0$ ou encore $\mu(O; \bar{S}_k) = 2\pi \rho_1$. On retient que tous les éléments de $(B_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ ont même longueur.

e) Soit la corde géométrique sous tendue par l'arc B_k lorsque $k > 1$. On sait déjà que lorsque $k \rightarrow +\infty \ \lim(\widehat{O_k O S_k}) = \frac{\pi}{2}$. Alors, la forme $[O; S_k]$ tend vers un segment colinéaire à $\vec{j}$. Soit ℓ_k la mesure de longueur du segment $[O; S_k]$. $\forall k \in \mathbb{N} \ \ell_k = 2 \sin(\frac{\pi}{2^{k-1}}) \rho_k$. Alors $\forall k \in \mathbb{N} \ \ell_k = \cos \frac{\pi}{2^k} \ell_{k+1}$ soit pour $k > 1 \ \ell_{k+1} > \ell_k$, ou encore (ℓ_k) forme une suite croissante. Par ailleurs $\ell_k = \frac{\sin(\frac{\pi}{2^{k-1}})}{\frac{\pi}{2^{k-1}}} 4\pi \rho_0$, or nous savons que la première partie du terme précédent tend vers 1 lorsque $k \rightarrow +\infty$. On peut donc en conclure que (ℓ_k) converge vers $4\pi \rho_0$. Si on appelle P le point de l'axe des ordonnées de coordonnées $(0, 2\pi \rho_1)$, alors on peut dire que $[O; S_k]$ converge vers $[O; P]$.

2° Des boucles en forme de cercles se superposant pour $k \leq 0$. Par définition on rappelle que $\forall k \in \mathbb{Z}^- \ B_k = 2^{|k|+1} \{C_k\}$ ou encore B_k est exactement C_k parcouru $2^{|k|+1}$ fois.

a) On rappelle que $\forall k \in \mathbb{Z}^- \ S_k = O^{2^{|k|+1}+1}$ qui est hors du do-

maine de définition de B_k .

b) On conserve la propriété : $\forall k \in \mathbb{Z}^- \quad \mu(O; S_k) = 2\pi\rho_1$.

c) Si on appelle D_k le disque formé par la boucle B_k , $\forall k \in \mathbb{Z}^-$ $D_k \subset D_{k+1}$, cela découle du fait qu'on forme B_{k+1} à partir du diamètre de B_k .

On perçoit une tendance sur laquelle on reviendra plus tard : $\lim_{k \rightarrow -\infty} B_k = O$. C'est évident avec $\lim_{k \rightarrow -\infty} \rho_k = 0$ et $\lim_{k \rightarrow -\infty} O_k = O$.

3° Approximation de π par la méthode de Viète. On va revenir à S_k pour calculer ses coordonnées d'un point de vue analytique. Ensuite on retrouvera une formule pour accéder à un résultat du mathématicien François Viète.

a) Pour $k > 0$, par une translation de $\vec{u} = 2^k \rho_0 \vec{i}$ on transforme C_k en C'_k de centre O . On appelle S'_k l'image de S_k par cette translation. En notant (x_k, y_k) les coordonnées de S_k , et (x'_k, y'_k) celles de S'_k , on obtient :

$$\begin{cases} x'_k = 2^k \rho_0 \cos(\frac{\pi}{2^{k-2}}) \\ y'_k = 2^k \rho_0 \sin(\frac{\pi}{2^{k-2}}) \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} x_k = x'_k - 2^k \rho_0 \\ y'_k = y'_k \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} x_k = 2^k \rho_0 \cos(\frac{\pi}{2^{k-2}}) \\ y_k = 2^k \rho_0 \sin(\frac{\pi}{2^{k-2}}) \end{cases}$$

Définissons (y_k) de façon récursive : $\forall k \in \mathbb{N} \quad y_{k+1} = 2^{k+1} \rho_0 \sin(\frac{\pi}{2^{k+1}}) = 2^{k+2} \rho_0 \sin(\frac{\pi}{2^k}) \cos(\frac{\pi}{2^k}) = y_{k+2} \cos(\frac{\pi}{2^{k+1}})$.

Soit $\forall k \geq 3 \quad y_{k+1} = y_k \frac{1}{\cos \frac{\pi}{2^{k-1}}}$.

En réitérant la formule de $k=3$ à p entier quelconque supérieur à 3, il vient : $y_{p+1} = \prod_{k=3}^p y_3 \frac{1}{\cos \frac{\pi}{2^{k-1}}}$.

1.1. UNE COLLECTION DE FORMES À SUPPORTS CIRCULAIRES 19

Or $y_3 = 4\rho_1$ et $\lim_{p \rightarrow \infty} y_{p+1} = 2\pi\rho_1$ donc $\lim_{p \rightarrow \infty} \prod_{k=3}^p \frac{1}{\cos \frac{\pi}{2^{k-1}}} = \frac{\pi}{2}$.

Ou encore : $\lim_{p \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{8} \dots \cos \frac{\pi}{2^{p-1}} \right) = \frac{2}{\pi}$.

b) Formule de Viète. En posant $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par
$$\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n+1}{2}} \\ u_0 = 0 \end{cases}$$

on va démontrer par récurrence que $\forall n \geq 1 \quad u_n = \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}$.

Pour $n=1$, il est clair que $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

On suppose la relation vraie à partir d'un certain rang $p \in \mathbb{N}$. On

a : $u_{p+1} = \sqrt{\frac{\cos(\frac{\pi}{2^{p+1}})+1}{2}}$ soit $u_{p+1} = \sqrt{\frac{\cos(\frac{2\pi}{2^{p+2}})+1}{2}}$ qui nous conduit à $u_{p+1} = \left| \cos \frac{\pi}{2^{p+2}} \right|$. Or $\forall p > 0 \quad \cos \frac{\pi}{2^{p+2}} > 0$ ce qui implique $\forall p > 0 \quad u_{p+1} = \cos \frac{\pi}{2^{(p+1)+1}}$. La relation est alors vérifiée au rang $p+1$.

Par récurrence, la propriété $u_n = \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}$ est vraie pour tout $n \geq 1$.

Comme on sait que $\prod_{p=1}^{\infty} u_p \rightarrow \frac{2}{\pi}$, en revenant à l'expression

initiale des u_p , on peut écrire $\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}} \dots$ qui est un résultat de Viète de 1579.

1.1.2 Le cas de base

Notre objectif est d'explicitier une fonction qui permette de passer d'un élément quelconque d'un cercle support C_k à un élément précis du cercle support précédent C_{k-1} . Cette transformation devant être biunivoque.

Les cercles supports C_k et C_{k-1}

1° Terminologie. Soient $C_k(O_k, \rho_k)$ et $C_{k-1}(O_{k-1}, \rho_{k-1})$ les cercles supports. On appelle $\vec{e}_r^k$ et $\vec{e}_r^{k-1}$ les vecteurs unitaires des composantes radiales, des repères mobiles d'origine O_k et O_{k-1} respec-

tivement qui permettent de repérer sur $C_k : T_k$, sur $C_{k-1} : T_{k-1}$ respectivement.

De façon similaire, à tout point de C_k et C_{k-1} on associe un vecteur unitaire $\overrightarrow{e_n^k}$ et $\overrightarrow{e_n^{k-1}}$ qui se trouvent sur la composante radiale $\overrightarrow{T_k O_k}$ et $\overrightarrow{T_{k-1} O_{k-1}}$ respectivement avec T_k et T_{k-1} comme origine.

Rappelons que $\alpha\{C_k\}$ désigne C_k recouvert α fois ($\alpha \in R_*^+$). Précisons qu'à chaque élément T_k^β de $\alpha\{C_k\}$ on associe sa mesure d'angle $\theta_k^\beta = \widehat{OO_k T_k^\beta}$ avec $\theta_k^\beta \in [0; 2\pi\alpha[$.

Passages aux précédents

1° Image par une certaine fonction ψ . On souhaite déterminer l'ensemble des points (M_k) du plan qui vérifient $\overrightarrow{O_k M_k} = \cos(\theta_k) \overrightarrow{O_k T_k}$ pour $T_k \in C_k$.

Alors $\overrightarrow{O_k M_k} = \rho_k \cos(\theta_k) \overrightarrow{e_r^k}$. En décomposant $\overrightarrow{e_r^k}$ en fonction de ses coordonnées cartésiennes, il vient $\overrightarrow{O_k M_k} = \rho_{k-1}(\cos 2\theta_k \vec{i} + \sin 2\theta_k \vec{j}) + \rho_{k-1} \vec{i}$.

Par ailleurs $\overrightarrow{O_{k-1} O_k} = -2^{k-1} \rho_0 \vec{i} = -\rho_{k-1} \vec{i}$.

Soit $\overrightarrow{O_{k-1} M_k} = \rho_{k-1}(\cos 2\theta_k \vec{i} + \sin 2\theta_k \vec{j})$. Procédons à un changement de variable en posant $\theta'_k = 2\theta_k$. Ainsi le domaine de définition des θ'_k s'en trouve légèrement modifié par rapport à celui des θ_k , puisque évidemment $\theta'_k \in [0; 4\pi[$.

En posant $\overrightarrow{u'_{\theta k}} = \cos \theta'_k \vec{i} + \sin \theta'_k \vec{j}$ qui est un vecteur tournant d'origine en O_{k-1} qui est défini pour $\theta'_k \in [0; 4\pi[$, on obtient $\overrightarrow{O_{k-1} M_k} = \rho_{k-1} \overrightarrow{u'_{\theta k}}$.

Donc (M_k) va décrire un cercle C_{k-1} balayé deux fois.

On peut remarquer que $\overrightarrow{u'_{\theta k}} = \overrightarrow{e_{k-1}^r}$, nous avons alors $\overrightarrow{O_{k-1} M_k} = \rho_{k-1} \overrightarrow{e_{k-1}^r}$ pour $\theta_{k-1} \in [0; 4\pi[$. Comme $M_k \in C_{k-1}$ on va dès lors

1.1. UNE COLLECTION DE FORMES À SUPPORTS CIRCULAIRES 21

le noter T_{k-1} , on le définit par sa mesure d'angle $\widehat{OO_{k-1}T_{k-1}}$ qui vaut le double de celle de $\widehat{OO_kT_k}$

Dans l'hypothèse où nous aurions retenu comme domaine de définition des T_k le demi-cercle supérieur de C_k en excluant l'extrémité finale, soit $\frac{1}{2}\{C_k\}$, on aurait obtenu comme domaine de définition des $\theta_{k-1} : [0; 2\pi[$, et donc (M_k) aurait balayé le cercle C_{k-1} une seule fois.

Plus généralement, $\forall \alpha \in \mathbb{R}_*^+$ si le domaine de définition initial des T_k avait été $\alpha\{C_k\}$ alors le domaine de définition des T_{k-1} aurait été $2\alpha\{C_{k-1}\}$. Le domaine de définition des θ_{k-1} aurait été $[0; 2\alpha\pi[$ sur C_{k-1} . On obtiendra des boucles partielles ou totales recouvrant une ou plusieurs fois le cercle C_{k-1} .

Revenons sur la notation utilisée : par exemple, si $\alpha = 1$ on a $\{C_k\}$ qui désigne C_k dans sa totalité, si $\alpha = 2$ alors $2\{C_k\}$ désigne C_k parcouru deux fois, si $\alpha = \frac{1}{3}$ alors $\frac{1}{3}\{C_k\}$ désigne C_k parcouru un tiers de fois.

Pour repérer de manière univoque tout élément de $\alpha\{C_k\}$, il faudra associer à tout point T_k un indice de recouvrement $\beta \in \mathbb{N}^*$ tel que $\beta \leq [\alpha] + 1$ (ou $[\alpha]$ désigne la partie entière de α) si $\alpha \notin \mathbb{N}$, sinon $\beta \leq \alpha$.

En appliquant la méthode utilisée plus haut pour le cas $\alpha = 1$; on peut généraliser et décrire l'ensemble (M_k) tel que pour $T_k \in \alpha\{C_k\}$ $\overrightarrow{O_kT_{k-1}} = \cos \theta_k \overrightarrow{O_kT_k}$.

On aboutira toujours à l'expression analytique : $\overrightarrow{O_{k-1}T_{k-1}} = \rho_{k-1} \overrightarrow{e_r^{k-1}}$.

En définitive on ne travaille que sur des domaines de définition modifiés. Soit (M_k) décrira la partie du cercle C_{k-1} parcourue 2α fois : $2\alpha\{C_{k-1}\}$. On appelle ψ la fonction ainsi constituée.

2° Définition et propriétés de ψ . On définit l'application $\psi : \alpha\{C_k\} \rightarrow 2\alpha\{C_{k-1}\} ; T_k^\beta \mapsto T_{k-1}^{\beta'}$.
 β et β' représentant les indices de recouvrement sur $\alpha\{C_k\}$ et $2\alpha\{C_{k-1}\}$

ou si $\alpha \notin \mathbb{N} \begin{cases} \beta \leq [\alpha] + 1 & \text{avec } \beta, \beta' \in \mathbb{N} \\ \beta' \leq [2\alpha] + 1 \end{cases}$

et si $\alpha \in \mathbb{N} \begin{cases} \beta \leq \alpha & \text{avec } \beta, \beta' \in \mathbb{N} \\ \beta' \leq 2\alpha \end{cases}$

Nous insistons sur le fait que le point T_k consigne l'ensemble des T_k^β . Par exemple $T_k^{\beta_1}$ et $T_k^{\beta_2}$ avec $\beta_1 \neq \beta_2$ sont deux éléments distincts de l'ensemble de départ, et cela bien qu'ils apparaissent confondus. En dernier lieu, ψ a pour domaine de définition $D_\psi = \alpha\{C_k\}$ où on exclut l'extrémité finale S_k , soit $\alpha\{C_k\} = (O^1; \bar{S}_k)$.

3° L'application ψ . A chaque élément T_k^β de $\alpha\{C_k\}$ on fait correspondre un élément et un seul de $2\alpha\{C_{k-1}\}$; c'est $T_{k-1}^{\beta'}$ dont la mesure angulaire associée sur $2\alpha\{C_{k-1}\}$ vaut exactement deux fois celle de son antécédent sur $\alpha\{C_k\}$.

Il s'en suit que ψ est une application.

4° Passage d'un élément de C_k à son image sur C_{k-1} par ψ d'un point de vue géométrique. Soit $\tilde{T}_k$ la classe des éléments de C_k susceptibles d'être représentés par T_k sur le graphique. La méthode pour passer de T_k^β à $T_{k-1}^{\beta'}$ est identique à celle utilisée pour passer du point T_k au point T_{k-1} .

C'est assez évident, à partir de C_k on détermine O_{k-1} milieu de $[O_k; O]$. On trace le cercle C_{k-1} avec $\rho_{k-1} = \frac{1}{2}\rho_k$. Alors T_{k-1} est un point d'intersection de la droite $(O_k T_k)$ et du cercle C_{k-1} . On

élimine O_k quand il existe deux points distincts.

5° Surjection. Comme l'ensemble d'arrivée a été défini à partir du domaine de définition de D_ψ , on a $\psi[\alpha\{C_k\}] = 2\alpha\{C_{k-1}\}$, donc ψ est surjective. En d'autres termes, c'est la conséquence du changement de variable $\theta_{k-1} = 2\theta_k$ pour $\theta_k \in [0, 2\alpha\pi[$. Alors, θ_{k-1} est définie sur $[0, 4\alpha\pi[$.

6° Injection. Nous pouvons montrer que ψ est injective. Supposons qu'il existe $T_{k_1}^{\beta_1}$ et $T_{k_2}^{\beta_2}$ deux éléments de $\alpha\{C_k\}$ tels que $\psi(T_{k_1}^{\beta_1}) = \psi(T_{k_2}^{\beta_2})$.

Alors $\cos \widehat{OO_k T_{k_1}^{\beta_1}} \cdot \overrightarrow{OT_{k_1}^{\beta_1}} = \cos \widehat{OO_k T_{k_2}^{\beta_2}} \cdot \overrightarrow{OT_{k_2}^{\beta_2}}$. Une condition nécessaire pour que cette équation soit satisfaite est que $\overrightarrow{OT_{k_1}^{\beta_1}}$ et $\overrightarrow{OT_{k_2}^{\beta_2}}$ soient colinéaires ou encore que $O, T_{k_1}^{\beta_1}, T_{k_2}^{\beta_2}$ soient alignés. En notant $\theta_{k_1}^{\beta_1} = \widehat{OO_k T_{k_1}^{\beta_1}}$ et $\theta_{k_2}^{\beta_2} = \widehat{OO_k T_{k_2}^{\beta_2}}$, on doit donc avoir $\theta_{k_1}^{\beta_1} \equiv \theta_{k_2}^{\beta_2} \pmod{\pi}$.

De même, si on note $\theta_{k_1-1}^{\beta_1}$ la mesure angulaire associée à $\psi(T_{k_1}^{\beta_1})$ sur $2\alpha\{C_{k-1}\}$ et $\theta_{k_2-1}^{\beta_2}$ la mesure angulaire associée à $\psi(T_{k_2}^{\beta_2})$ sur $2\alpha\{C_{k-1}\}$. La dernière relation implique $\theta_{k_1-1}^{\beta_1} \equiv \theta_{k_2-1}^{\beta_2} \pmod{2\pi}$.

Mais la congruence modulo 2π implique que $\psi(T_{k_1}^{\beta_1})$ et $\psi(T_{k_2}^{\beta_2})$ ont une mesure d'angle associée décalée de $2k\pi$ ($k \in \mathbb{N}$), ou pour parler plus intuitivement, ils se superposent mais sont décalés d'un nombre entier de tours. Et dans ce cas $\psi(T_{k_1}^{\beta_1})$ sera affecté d'un indice de recouvrement différent de $\psi(T_{k_2}^{\beta_2})$. Ainsi $\psi(T_{k_1}^{\beta_1}) \neq \psi(T_{k_2}^{\beta_2})$.

On ne peut donc retenir pour que l'équation soit satisfaite que $\theta_{k_1-1}^{\beta_1} = \theta_{k_2-1}^{\beta_2}$ qui est équivalent à $\theta_{k_1}^{\beta_1} = \theta_{k_2}^{\beta_2}$. Soit $\forall T_{k_1}^{\beta_1} T_{k_2}^{\beta_2} \in \alpha\{C_k\}$, $\psi(T_{k_1}^{\beta_1}) = \psi(T_{k_2}^{\beta_2}) \Rightarrow k_1 = k_2$ et $\beta_1 = \beta_2$. Donc ψ est injectif.

tive.

7° La continuité de ψ . On se propose d'étudier la continuité de ψ en 4 temps. Tout d'abord, nous allons définir certains termes, puis on montrera la continuité de ψ sur $D_\psi^* = D_\psi \setminus \{O^1 \cup S_k\}$, puis en O^1 et en dernier temps en S_k par prolongement de ψ .

Au niveau des notations, $\forall K, K' \in \alpha\{C_k\}$ ($K; K'$) désigne l'arc curviligne délimité par K et K' . Dans le même sens, $(\bar{K}; \bar{K}')$ désigne l'arc ($K; K'$) privé de K et de K' : c'est un arc ouvert.

Par cette notation, on se permet de définir le voisinage d'arc de $T_{k_0}^\beta \in D_\psi^*$. C'est à dire qu'il existe un réel non nul strictement positif ϵ qui permet de définir deux points $R_{-\frac{\epsilon}{2}}$ et $R_{+\frac{\epsilon}{2}}$ tels que $T_{k_0}^\beta$ soit le centre de $(\bar{R}_{-\frac{\epsilon}{2}}; \bar{R}_{\frac{\epsilon}{2}})$ avec la mesure de longueur de l'arc qui vaut ϵ .

Il est évident que dans l'optique d'étudier la continuité, on puisse choisir ϵ réel strictement positif aussi petit qu'on le veuille. Aussi on passe rapidement sur une condition quasi-évidente imposée par $T_{k_0}^\beta$ sur la valeur de ϵ . En effet, on sous-entendra toujours $\epsilon < \min(2^{k_0} \rho_0 \theta_{k_0}^\beta, 2\pi \alpha 2^{k_0} \rho_0)$. Condition qui non vérifiée impliquerait que $R_{-\frac{\epsilon}{2}}$ ou $R_{\frac{\epsilon}{2}}$ sortent du domaine de définition.

On peut définir pour O^1 (l'origine de tout brin) des intervalles d'arcs semi-ouverts $(O^1; \bar{M})$ avec $M \in D_\psi$. On définit ainsi un voisinage d'arc par le haut qu'on notera $\downarrow$.

On peut également définir un voisinage d'arc par le bas. Par exemple en prolongeant par continuité ψ en S_k , on peut construire $(\bar{M}; S_k)$. On notera ce type de voisinage $\uparrow$.

On rappelle que $\forall T_k^\beta$ de $\alpha\{C_k\}$ on associe une mesure d'angle θ_k^β telle que $\theta_k^\beta < 2\pi\alpha$. Le terme de droite désignant la mesure d'angle associée à $\bar{S}_k$ sur $\alpha\{C_k\}$. θ_k^β est une fonction linéaire croissante de

la position de T_k^β sur $\alpha\{C_k\}$. Si $T_{k'}^{\beta'}$ succède à T_k^β , cela équivaut à dire que $\theta_{k'}^{\beta'} > \theta_k^\beta$.

Rappelons qu'on ne travaille pas modulo 2π . Les mesures d'angles peuvent être largement supérieures à 2π .

Maintenant tous nos outils sont en place pour étudier la continuité de ψ .

a) Continuité sur D_ψ . En premier lieu, on souhaite montrer que $\forall T_{k_0-1}^{\beta'} \in (\bar{O}^1; \bar{S}_{k-1})$, $\forall \epsilon$ réel strictement positif aussi petit qu'on le souhaite, on construit W_ϵ voisinage d'arc ouvert de $T_{k_0-1}^{\beta'} = \psi(T_{k_0}^\beta)$ tel qu'il existera toujours un voisinage correspondant V de $T_{k_0}^\beta$ inclus dans D_ψ^* vérifiant $\psi(V) \subset W_\epsilon$.

Soit, considérons le voisinage d'arc ouvert centré en $T_{k_0-1}^{\beta'}$ de longueur ϵ . Notons le W_ϵ , on définit de part et d'autre de $T_{k_0-1}^{\beta'}$ deux points $R'_{-\frac{\epsilon}{2}}$ et $R'_{\frac{\epsilon}{2}}$ qui auront respectivement pour mesure d'angle associée θ'_1 et θ'_2 .

En notant θ'_3 la mesure d'angle associée à $T_{k_0-1}^{\beta'}$ on est conduit à l'inégalité : $\theta'_1 < \theta'_3 < \theta'_2$.

Par ailleurs, nous avons montré que θ la mesure d'angle associée à T_k^β élément de D_ψ et θ' la mesure d'angle de $\psi(T_k^\beta)$ sur $\psi(D_\psi)$ étaient reliées de façon biunivoque par la relation $\theta' = 2\theta$ qui est strictement croissante.

En construisant les antécédents de $R'_{-\frac{\epsilon}{2}}, R'_{\frac{\epsilon}{2}}$ et de $T_{k_0-1}^{\beta'}$ par ψ qui seront respectivement $R_{-\frac{\epsilon}{2}}, R_{\frac{\epsilon}{2}}$ et $T_{k_0}^\beta$ auxquels on associe les mesures d'angles θ_1, θ_2 et θ_3 ; on obtient les relations :

$$\begin{cases} \theta_1 = \frac{1}{2}\theta'_1 \\ \theta_3 = \frac{1}{2}\theta'_3 \\ \theta_2 = \frac{1}{2}\theta'_2 \end{cases}$$

En conséquence : $\theta_1 < \theta_3 < \theta_2$.

On peut construire le voisinage d'arc ouvert $V_\epsilon = (\bar{R}_{-\frac{\epsilon}{2}}; \bar{R}_{\frac{\epsilon}{2}})$ qui est de longueur ϵ .

En effet, $\mu(\bar{R}_{-\frac{\epsilon}{2}}; \bar{R}_{\frac{\epsilon}{2}}) = (\theta_2 - \theta_1)\rho_k = \frac{1}{2}(\theta'_2 - \theta'_1)2\rho_{k-1} = \mu(\bar{R}'_{-\frac{\epsilon}{2}}; \bar{R}'_{\frac{\epsilon}{2}}) = \epsilon$. On a alors $\psi(V_\epsilon) = W_\epsilon$.

Soit V un voisinage centré en $T_{k_0}^\beta$ inclus dans V_ϵ . On peut toujours construire un tel voisinage. Alors $\psi(V) \subset W_\epsilon$, donc ψ est continue sur D_ψ^* .

b) La continuité en O^1 qui ne peut s'étudier que par le haut est évidente.

Suivant un principe quasi-analogue au précédent, on considère W_ϵ un voisinage par le haut en O^1 sur $2\alpha\{C_{k-1}\}$, avec ϵ réel strictement positif aussi petit qu'on le souhaite tel que $\mu(W_\epsilon) = \epsilon$.

Alors, il existe $(O^1; \bar{R}_\epsilon)$ de $\alpha\{C_k\}$ tel que $\psi(R_\epsilon) = R'_\epsilon$ et $\forall V \subset (O^1; \bar{R}_\epsilon)$ on aura $\psi(V) \subset W_\epsilon$.

Donc ψ est continue en O^1 .

c) La continuité en S_k peut s'étudier en prolongeant ψ par continuité.

On pose $\psi : O^1 S_k \rightarrow O^1 S_{k-1}; T_k^\beta \mapsto T_{k-1}^{\beta'}$

$\forall T_k^\beta \in D_\psi : \psi(T_k^\beta) = \psi(T_k^\beta)$ et $\psi(S_k) = S_{k-1}$.

Maintenant, considérons W_ϵ un voisinage par le bas en S_{k-1} de longueur ϵ avec ϵ réel strictement positif aussi petit qu'on le souhaite : $W_\epsilon = (\bar{R}'_\epsilon; S_{k-1})$.

Par un raisonnement analogue aux précédents, on peut construire R_ϵ tel que $\psi(R_\epsilon) = R'_\epsilon$ et $\forall V \subset (\bar{R}_\epsilon; S_k)$ $\psi(V) \subset W_\epsilon$.

Donc ψ est continue en S_k , ou encore ψ est continue en S_k par prolongement.

On peut donc conclure que ψ est continue sur D_ψ .

Passage aux successeurs

1° La fonction réciproque de $\psi : \psi^{-1}$. ψ définissait le passage d'un élément quelconque de $\{C_k\}$ à un élément précis de $2\alpha\{C_{k-1}\}$. On va dès lors définir ψ^{-1} la fonction réciproque de ψ . ψ^{-1} doit nous permettre de passer d'un élément quelconque de $2\alpha\{C_{k-1}\}$ à un élément précis de $\alpha\{C_k\}$.

Nous avons $\psi^{-1} : 2\alpha\{C_{k-1}\} \rightarrow \alpha\{C_k\}; T_{k-1}^{\beta'} \mapsto T_k^\beta$.

On insiste à nouveau sur le fait que $T_{k-1}^{\beta'}$ est un élément de $2\alpha\{C_{k-1}\}$, soit un point géométrique de $2\alpha\{C_{k-1}\}$ affecté d'un indice de re-

couvrement β' où $\begin{cases} \text{si } 2\alpha \notin \mathbb{N}, \beta' \in 1, \dots, [2\alpha] + 1 \\ \text{si } 2\alpha \in \mathbb{N}, \beta' \in 1, \dots, [2\alpha]. \end{cases}$

Avec ces précisions, on conçoit clairement que ψ^{-1} est une application; où chaque élément de l'ensemble de départ a une image et une seule dans l'ensemble d'arrivée $\alpha\{C_k\}$. C'est l'élément de $\alpha\{C_k\}$ qui aura une mesure angulaire associée égale à la moitié de celle associée à l'élément d'origine.

2° Une Bijection. Mieux encore, comme ψ est une application bijective, par théorème ψ^{-1} est une application bijective.

3° Passage de $T_{k-1}^{\beta'}$ à T_k^β d'un point de vue géométrique.

A partir du cercle support C_{k-1} de diamètre $[O; O_k]$, on trace le cercle C_k de centre O_k , de rayon $[O_k; O]$. Pour tout point $T_{k-1}^{\beta'}$ de C_{k-1} on trace la droite $(T_{k-1}^{\beta'} O_k)$ qui intercepte C_k en deux points : $T_k^{\beta_1}$ et $T_k^{\beta_2}$ de mesures d'angle associées sur C_k : θ_1 et $\theta_1 + \pi$, puisque O_k milieu de $[T_k^{\beta_1}; T_k^{\beta_2}]$.

Si β' est impair, l'élément recherché est $T_k^{\beta_1}$, tandis que si β' est pair, l'élément recherché est $T_k^{\beta_2}$.

4° La continuité de ψ^{-1} qui est définie sur $D_{\psi^{-1}} = (O^1; \bar{S}_{k-1})$ peut-être étudiée en trois temps : sur $\begin{cases} D_{\psi^{-1}*} = D_{\psi^{-1}} \setminus \{O^1\}, \\ \text{en } O^1, \\ \text{en } S_{k-1} \text{ par prolongement.} \end{cases}$

a) La continuité de ψ^{-1} sur $D_{\psi^{-1}*}$. Soit $T_{k_0}^\beta$ un élément quelconque de $(\bar{O}_1; \bar{S}_k)$, on se donne ϵ réel aussi petit qu'on le souhaite, strictement positif. On construit un voisinage d'arc ouvert centré en $T_{k_0}^\beta$ de longueur ϵ , on le note W_ϵ .

Il est alors délimité à ses extrémités par $R_{-\frac{\epsilon}{2}}$ et $R_{\frac{\epsilon}{2}}$, soit $W_\epsilon = (\bar{R}_{-\frac{\epsilon}{2}}; \bar{R}_{\frac{\epsilon}{2}})$. On peut rattacher à $R_{-\frac{\epsilon}{2}}$ et $R_{\frac{\epsilon}{2}}$, leur mesure d'angle associée sur $\alpha\{C_k\}$, qui sont respectivement θ_1 et θ_2 . De même, la mesure d'angle associée à $T_{k_0}^\beta$ valant θ_3 .

On a bien sûr : $\theta_1 < \theta_3 < \theta_2$.

Les images de $R_{-\frac{\epsilon}{2}}$, $T_{k_0}^\beta$, et $R_{\frac{\epsilon}{2}}$ par ψ sont respectivement $R'_{-\frac{\epsilon}{2}}$, $T_{k_0-1}^{\beta'}$, et $R'_{\frac{\epsilon}{2}}$. Elles ont pour mesures angulaires associées θ'_1 , θ'_3 et θ'_2 respectivement.

Il est clair qu'on a les relations : $\begin{cases} \theta'_1 = 2\theta_1 \\ \theta'_3 = 2\theta_3 \\ \theta'_2 = 2\theta_2 \end{cases}$

On déduit la relation $\theta'_1 < \theta'_3 < \theta'_2$. On peut donc construire le voisinage d'arc ouvert de $\psi(T_{k_0}^\beta)$ qu'on note $V_\epsilon = (\bar{R}'_{-\frac{\epsilon}{2}}; \bar{R}'_{\frac{\epsilon}{2}})$. On retrouve ici $\mu(\bar{R}'_{-\frac{\epsilon}{2}}; \bar{R}'_{\frac{\epsilon}{2}}) = \epsilon$, et V_ϵ est centré en $\psi(T_{k_0}^\beta)$. Nous avons également $\psi^{-1}(V) = W_\epsilon$. Donc tout voisinage d'arc ouvert centré

1.1. UNE COLLECTION DE FORMES À SUPPORTS CIRCULAIRES 29

en $T_{k_0-1}^{\beta'}$ inclus dans V_ϵ sera tel que $\psi^{-1}(V) \subset W_\epsilon$. Alors on obtient la continuité sur $D_{\psi^{-1}}^*$.

b) La continuité en O^1 . On va étudier la continuité par le haut. On construit un voisinage $W_\epsilon = (O^1; \bar{R}_\epsilon)$ sur $\alpha\{C_k\}$, avec ϵ réel strictement positif aussi petit qu'on le souhaite, tel que $\mu(W_\epsilon) = \epsilon$. On associe à R_ϵ sa mesure d'angle θ_1 . On peut construire l'élément image de R_ϵ par ψ , on le note R'_ϵ , affecté de la mesure d'angle associée θ'_1 .

Soit $T_{k-1}^{\beta'}$ un élément de $2\alpha\{C_{k-1}\}$ tel que $T_{k-1}^{\beta'} \in (O^1; \bar{R}'_\epsilon)$. On note sa mesure d'angle associée θ'_2 qui vérifie : $0 \leq \theta'_2 < \theta'_1$.

Soit T_k^β son image par ψ^{-1} , alors θ_2 la mesure d'angle associée à T_k^β sur $\alpha\{C_k\}$ est telle que $\theta_2 = \frac{1}{2}\theta'_2$.

Et donc $0 \leq \theta_2 < \theta_1$. Ainsi $\psi^{-1}(T_{k-1}^{\beta'}) \in W_\epsilon$. Plus généralement, tout voisinage de la forme $(O^1; \bar{T}_{k-1}^{\beta'})$ est tel que $\psi^{-1}(O^1; \bar{T}_{k-1}^{\beta'}) \subset W_\epsilon$.

Donc ψ^{-1} est continue en O^1 .

c) La continuité en S_{k-1} . On pose ψ^{-1} la fonction de $(O^1; S_{k-1}) \rightarrow (O^1; S_k); T_{k-1}^{\beta'} \mapsto T_k^\beta$ telle que $\forall T_{k-1}^{\beta'} \in (O^1; \bar{S}_{k-1}) : \psi^{-1}(T_{k-1}^{\beta'}) = \psi^{-1}(T_{k-1}^{\beta'})$ et $\psi^{-1}(S_{k-1}) = S_k$.

Montrons que ψ^{-1} est continue en S_{k-1} . Soit ϵ un réel strictement positif aussi petit qu'on le souhaite, on construit le voisinage d'arc par le bas $W_\epsilon = (\bar{R}_\epsilon; S_k)$ sur $\alpha\{C_k\}$. On peut repérer R_ϵ par sa mesure d'angle associée : θ_1 .

Les antécédents de R_ϵ et S_{k-1} par ψ^{-1} sont respectivement R'_ϵ et S_k sur $2\alpha\{C_{k-1}\}$. On peut repérer R'_ϵ par sa mesure angulaire associée sur $2\alpha\{C_{k-1}\} : \theta'_1 = 2\theta_1$.

Nous pouvons construire $V_\epsilon = (\bar{R}'_\epsilon; S_{k-1})$ avec $\psi^{-1}(V_\epsilon) = W_\epsilon$ tel

que $\forall V \subset V_\epsilon \ \psi^{-1}(V) \subset W_\epsilon$.

On déduit que ψ^{-1} est continue en S_{k-1} , ou encore ψ est continue en S_{k-1} par prolongement.

Nous concluons que ψ^{-1} est continue sur $D_{\psi^{-1}}$. Soit ψ est un homéomorphisme.

La fonction ψ légèrement modifiée : ψ^*

On va définir ψ^* sur $D_{\psi^*} = (\bar{O}^1; S_k) = \frac{1}{2}\{C_1^*\}$ où S_k est cette fois fixé pour tout ce qui va suivre. S_k est le point dont la mesure angulaire associée sur $\frac{1}{2}\{C_1^*\}$ vaut π . Par rapport à ψ , on travaille sur $\frac{1}{2}\{C_1^*\}$, l'ensemble image étant $\{C_0^*\} = (\bar{O}^1; O^2)$; nous enlevons un point de D_ψ , en contrepartie on a rajouté un nouveau point qui n'appartenait pas à $D_\psi : S_k$. Il a pour image O^2 .

Nous avons $\psi^* : \frac{1}{2}C_1^* \rightarrow C_0^*; T_1 \mapsto T_0$ avec $\forall T_1 \in (\bar{O}^1; \bar{S}_k) \ \psi^*(T_1) = \psi(T_1)$ et $\psi^*(S_k) = O^2$.

1° Une application bijective. Comme le nouveau point a pour image précisément O^2 , élément n'appartenant pas à l'image de $\psi(\frac{1}{2}\{C_1\})$ on peut dire qu'on a une application bijective.

2° La continuité de ψ^* sur D_{ψ^*} .

a) Continuité sur $D_{\psi^*} \setminus \{S_k\}$. Sur cet ensemble, la restriction de ψ^* est exactement ψ qui est continue.

b) Continuité en O^1 . On considère ψ^* la fonction ψ^* prolongée par continuité en O^1 . On pose $\psi^*(O^1) = O^1$. On rappelle que $\psi^*(S_k) = O^2 \neq O^1$

Soit ϵ un élément réel strictement positif, aussi petit qu'on le souhaite. On construit un voisinage semi-ouvert par le haut en O^1 sur C_0^* . On le note $W_\epsilon = (O^1; \bar{R}'_\epsilon)$, il est de longueur ϵ . On peut lier à R'_ϵ sa mesure d'angle associée sur $\{C_0^*\} : \theta'_1$.

Alors construisons l'antécédent de R'_ϵ sur $\frac{1}{2}\{C_1^*\}$, on le note R_ϵ . Il aura pour mesure d'angle associée sur $\frac{1}{2}\{C_1^*\} : \theta_1 = \frac{1}{2}\theta'_1$. Soit $T_1 \in (O^1; \bar{R}_\epsilon)$; alors $\psi^*(T_1) \in W_\epsilon$, et même $\psi^*(O^1; T_1) \subset W_\epsilon$. Donc ψ^* est continue en O^1 par le haut.

c) Continuité en S_k . Soit ϵ un réel strictement positif aussi petit qu'on le souhaite; on construit W_ϵ voisinage semi-ouvert de O_2 par le bas sur $\{C_0^*\}$. Il est donc délimité naturellement par O_2 et R'_ϵ , a pour longueur ϵ .

R'_ϵ a pour mesure d'angle associée sur $\{C_0^*\} : \theta'_1$. Donc son antécédent par ψ^* qui sera R_ϵ aura pour mesure d'angle associée $\theta_1 = \frac{1}{2}\theta'_1$. Quelque soit $T_1 \in (R_\epsilon; S_k)$, $\psi^*(T_1) \in (R'_\epsilon; O^2)$ et même $\psi^*(\bar{T}_1; S_k) \subset W_\epsilon$. Donc ψ^* est continue en S_k par le bas. On en conclut que ψ^* est continue sur D_{ψ^*} .

3° La continuité de ψ^{*-1} . On considère $\psi^{*-1} : (\bar{O}^1; O^2) \rightarrow (\bar{O}^1; S_k); T_0 \mapsto T_1$
 $\forall T_0 \in \{C_0\} \setminus \{O^1 \cup O^2\} \psi^{*-1}(T_0) = \psi^{-1}(T_0)$ et $\psi^{*-1}(O^2) = S_k$.

On va toujours étudier la continuité en 3 temps :
$$\begin{cases} \text{sur } D_{\psi^{*-1}}^* = \{C_0\} \setminus \{O^1 \cup O^2\}, \\ \text{en } O^1, \text{ par prolongement,} \\ \text{en } O^2, \text{ par le bas.} \end{cases}$$

a) La continuité sur $D_{\psi^{*-1}}^*$ va de soi, sur cet ensemble, ψ^{*-1} vaut exactement ψ^{-1} qui est continue. Donc ψ^{*-1} est continue sur $D_{\psi^{*-1}}^*$.

b) La continuité en O^1 . Soit ψ^{*-1} la fonction qui prolonge ψ^{*-1} en O^1 . Posons $\psi^{*-1}(O^1) = O^1$. Soit ϵ un réel strictement positif aussi petit qu'on le souhaite. Construisons le voisinage d'arc par le haut en O^1 sur $\frac{1}{2}\{C_1^*\}$. On le nomme W_ϵ , donc il existe R_ϵ tel que $W_\epsilon = (O^1; \bar{R}_\epsilon)$ avec $\mu(O^1; \bar{R}_\epsilon) = \epsilon$. Nous pouvons toujours ici joindre à R_ϵ sa mesure d'angle associée qui vaut θ_1 .

On peut alors déterminer l'antécédent de R_ϵ par l'application ψ^{*-1} : c'est R'_ϵ sur $\{C_0\}$. La mesure d'angle associée à R'_ϵ valant $\theta'_1 = 2\theta_1$.

Quelque soit $T_0 \in (O^1; \bar{R}'_\epsilon)$, sa mesure d'angle associée sur $\{C_0\}$: θ' est strictement inférieure à celle de θ'_1 . Soit son image par ψ^{*-1} sera T_1 dont la mesure angulaire associée vaudra $\frac{1}{2}\theta'$, sera strictement inférieure à θ_1 .

Soit $\psi^{*-1}(O^1; \bar{T}_1) \subset W_\epsilon$, ou encore ψ^{*-1} est continue en O^1 par le haut, soit ψ^{*-1} est continue en O^1 par le haut par prolongement.

c) La continuité en O^2 par le bas. Soit ϵ , un réel strictement positif aussi petit qu'on le souhaite. On construit W_ϵ voisinage de S_k par le bas, alors $W_\epsilon = (\bar{R}_\epsilon; S_k)$. R_ϵ a pour mesure d'angle associée sur $\frac{1}{2}\{C_1^*\}$: θ_1 . Son antécédent par ψ^{*-1} est R'_ϵ de $\{C_0^*\}$, sa mesure d'angle associée valant $\theta'_1 = 2\theta_1$.

$\forall T_0 \in (\bar{R}'_\epsilon; O^2)$ sa mesure d'angle associée θ' vérifiera $\theta'_1 < \theta' \leq 2\pi$. Soit T_1 l'image par ψ^{*-1} de T_0 , sa mesure d'angle associée qui vaut $\theta = \frac{1}{2}\theta'$ est telle que $\theta_1 < \theta \leq \pi$. Donc $T_1 \in (\bar{R}_\epsilon; S_k)$ ou encore $T_1 \in W_\epsilon$.

En considérant le voisinage $V = (\bar{T}_0; O^2)$ sur $\{C_0^*\}$, il est alors vérifié $\psi^{*-1}(V) \subset W_\epsilon$, donc ψ^{*-1} est continue en O^2 par le bas.

On peut donc conclure que ψ^{*-1} est continue sur $D_{\psi^{*-1}}$, et alors ψ^* est un homéomorphisme de $(\bar{O}^1; S_k)$ vers $(\bar{O}^1; O^2)$.

Conclusions du cas de base

La propriété d'homéomorphisme pour ψ , ainsi que le paramétrage de l'ensemble de départ offrent des perspectives intéressantes. ψ peut servir de fonction patron pour décrire une large classe de fonctions.

Avant d'appliquer ψ aux éléments de $(B_k)_{k \in \mathbb{Z}}$, voyons un homéomorphisme particulièrement remarquable. C'est le cas général où $\alpha = \frac{1}{2} + q$, $q \in \mathbb{N}$. On va regarder en particulier le cas où $\alpha = \frac{1}{2}$.

Alors S_k est positionné à une extrémité du demi-cercle supérieur $C_k : (\widehat{O^1 O_k S_k}) = \pi$. N'oublions pas que S_k est exclu de la forme $(O^1; \bar{S}_k)$, mais que $\psi(O^1; \bar{S}_k) = \{C_{k-1}\}$.

Soit le cercle est l'image par un homéomorphisme particulier d'une forme ne se recouvrant pas dont l'extrémité finale est clairement distincte de l'origine, privée de son extrémité finale. On obtient donc une nouvelle définition du cercle qui s'écarte des définitions usuelles d'Euclide, Archimède, Descartes et Leibniz [5].

D'autre part, sachant toujours que ψ est un homéomorphisme, $(O^1; \bar{S}_k)$ étant un arc semi-ouvert, il est clair qu'en ce sens $\psi(O^1; \bar{S}_k)$ soit $\{C_{k-1}\}$ est un semi-ouvert. D'ailleurs on peut écrire $\{C_{k-1}\}$ sous la forme $(O^1; \bar{O}^2)$, soit le cercle peut être considéré comme un ensemble de points semi-ouvert. Par un raisonnement quasi-analogue, on peut également voir le cercle comme un ouvert, il suffit d'exclure O de l'ensemble de départ. Alors en échangeant les bornes, on construit le cercle comme un fermé.

Théorème. *Le cercle en tant qu'ensemble de points ouvert est un ensemble de points fermé, et réciproquement le cercle en tant qu'ensemble de points fermé est un ensemble de points ouvert.*

Cependant, d'un autre point de vue, C_{k-1} est un ensemble fermé. En fait nous devons pas occulter une continuité d'arrière

plan pourrait on dire. On retrouve $\lim_{T_k \rightarrow \bar{S}_k \uparrow} \psi(T_k) = O^2$, or $\widetilde{O^2} = \widetilde{O^1} = O$.

Autrement dit, en prolongeant par continuité ψ en S_k , l'image de cet élément a pour classe d'équivalence O qui est lui même la classe d'équivalence de $\psi(O^1)$. Cette propriété scelle l'orbite fermée des $\psi(T_k)$ en terme de classes d'équivalence.

En conclusion, le cercle est à la fois un ensemble de points semi-ouvert, un ensemble de points ouvert, et un ensemble de points fermé suivant le point de vue dans lequel on se place (en terme d'éléments ou de classes d'équivalence). En tant qu'ensemble de points semi-ouvert, on peut alors se réserver la possibilité de l'étirer sans le déchirer, par exemple en étirant le demi-cercle C_k et en conservant la relation liant tout point de C_k à tout point de C_{k-1} . Par ailleurs, comme on peut déformer de manière bicontinue et bijective tout cercle en une courbe dite fermée ne se recouvrant pas, toutes les courbes dites fermées sont constituées d'ensembles de points semi-ouverts.

Dans une perspective identique, on aurait pu considérer l'homéomorphisme légèrement modifié : ψ^* . Où cette fois le premier élément de l'ensemble de départ était exclu, par contre on intégrait S_k de mesure angulaire associée π . D'autre part, on avait $\lim_{T_k \rightarrow \bar{O}^1 \downarrow} \psi^*(T_k) = O^1$ qui implique $\widetilde{O^1} = \widetilde{\psi^*(S_k)} = O$.

Il s'en suit que par l'homéomorphisme ψ^* l'arc semi-ouvert apparaît comme un ensemble de points fermé si on raisonne en terme de classes d'équivalence.

1.1.3 La famille $(B_k)_{k \in \mathbb{Z}}$

Revenons à $(B_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ et appliquons le cas de base à ses éléments.

Application du cas de base

1° Pour B_0, B_1 et B_2 nous avons
$$\begin{cases} B_0 = 2\{C_0\} \\ B_1 = \{C_1\} \\ B_2 = \frac{1}{2}\{C_2\} \end{cases}$$

On peut lier entre eux B_0, B_1, B_2 par ψ . En effet $\psi(B_2) = B_1$, $\psi(B_1) = B_0$ et $\psi \circ \psi(B_2) = B_0$.

2° Généralisons pour tout $B_k, k \in \mathbb{Z}$. On sait que $\forall k \in \mathbb{Z}$ $B_k = 2^{-k+1}\{C_k\}$; alors $\psi(B_k) = \psi(2^{-k+1}\{C_k\}) = 2^{-(k-1)+1}\{C_{k-1}\}$ d'où :

$$\boxed{\psi(B_k) = B_{k-1}} \quad (1.1)$$

Grâce à ψ , on passe d'un élément quelconque de la famille B_k à son prédécesseur immédiat dans la suite des $(B_k)_{k \in \mathbb{Z}}$.

Nous avons l'application $\psi : B_k \rightarrow B_{k-1}; T_k^\beta \mapsto T_{k-1}^{\beta'}$ ou $\beta \in \{1, \dots, 2^{-k+1}\}$ et $\beta' \in \{1, \dots, 2^{-k+2}\}$, ψ étant toujours un homéomorphisme.

A tout élément T_k^β de B_k on fait correspondre $T_{k-1}^{\beta'}$ de B_{k-1} tel que $\widehat{OO_{k-1}T_{k-1}^{\beta'}} = \widehat{2OO_kT_k^\beta}$.

On peut également appliquer la réciproque de ψ à B_{k-1} , elle a pour image B_k . C'est simplement une autre écriture d'un résultat déjà démontré. On a alors :

$$\boxed{\psi^{-1}(B_k) = B_{k+1}} \quad (1.2)$$

Maintenant, nous pouvons construire une fonction ϕ conjuguée de ψ qui s'appliquerait aux coordonnées curvilignes de T_k^β et $T_k^{\beta'}$. On

appelle t_k et t_{k-1} les abscisses de T_k^β et $T_{k-1}^{\beta'}$ sur B_k et B_{k-1} respectivement.

On va s'appuyer pour cela sur la fonction d'univocité liant tout point d'une forme à support circulaire B_k avec sa coordonnée curviligne sur $[0; 2\pi\rho_k[$. On construit $\phi : [0; 2\pi\rho_k[\rightarrow [0; 4\pi\rho_{k-1}[; t_k \mapsto t_{k-1}$. On sait que $\forall T_k^\beta \in (O; \bar{S}_k)$ sa coordonnée vaut $t_k = \theta_k^\beta \rho_k$ et son image par ψ aura pour coordonnée sur B_{k-1} : $t_{k-1} = t_k$. En fait ϕ est l'application identité d'un domaine vers un autre. On peut également définir ϕ^{-1} qui serait également l'application identité d'une mesure angulaire sur $(O; \bar{S}_{k-1})$ vers une mesure angulaire sur $(O; \bar{S}_k)$.

Récapitulons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi(B_{-k}) = B_{-k-1} \text{ qui correspond à } C_{-k-1} \text{ parcouru } 2^{k+2} \text{ fois : } 2^{k+2}\{C_{-k-1}\} \\ \vdots \\ \psi(B_0) = B_{-1} \text{ qui correspond à } C_{-1} \text{ parcouru } 4 \text{ fois : } 2^2\{C_{-1}\} \\ \psi(B_1) = B_0 \text{ qui correspond à } C_0 \text{ parcouru } 2 \text{ fois : } 2\{C_0\} \\ \psi(B_2) = B_1 \text{ qui correspond à } C_1 \text{ parcouru } 1 \text{ fois : } 1\{C_1\} \\ \vdots \\ \psi(B_{k+1}) = B_k \text{ qui correspond à } C_k \text{ parcouru } 2^{-k+1} \text{ fois : } 2^{-k+1}\{C_k\} \end{array} \right.$$

On pourrait faire le même type de tableau pour ψ^{-1} .

$3^\circ B_k$ vers l'infini d'un point de vue classique. Il se profile deux formes d'indétermination vers l'infini.

D'une part lorsque $k \rightarrow -\infty$, $\rho_k \rightarrow 0$ et $O_k \rightarrow O$, tandis que le nombre de recouvrements tend vers plus l'infini. Pour l'instant, on s'en tient à dire que $\lim_{k \rightarrow -\infty} B_k = O$.

D'autre part, lorsque $k \rightarrow +\infty$; B_k tend vers un arc de cercle de

mesure angulaire tendant vers 0, sur un cercle support qui pourrait être le cercle imaginaire à l'infini. On a cependant vu que $\alpha_k = \widehat{OO_k S_{k-1}}$ tendait alors vers $\frac{\pi}{2}$. Sachant de plus que tous les arcs $(O; S_k)$ ont pour mesure de longueur $2\pi\rho_1$; on peut logiquement conclure que $\lim_{k \rightarrow +\infty} B_k = [O; P[$ où P désigne le point de l'axe $(y'Oy)$ tel que $\mu([O; P]) = 2\pi\rho_1$.

Expression de ψ_k

1° Résultats généraux pour $k \in \mathbb{Z}$. $\forall k \in \mathbb{N}^*$ on note $\psi_k(B_1) =$

$$\overbrace{\psi \circ \psi \cdots \psi}^{k \text{ fois}}(B_1)$$

$$\forall k \in \mathbb{Z}^- \text{ on note } \psi_k^{-1}(B_1) = \overbrace{\psi^{-1} \circ \psi^{-1} \cdots \psi^{-1}}^{k \text{ fois}}(B_1)$$

Et par extension $\psi_0(B_j) = B_j$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$.

Alors

$$\boxed{\psi_k(B_1) = B_{-k+1}} \quad (1.3)$$

$$\boxed{\psi_k^{-1}(B_1) = B_{k+1}} \quad (1.4)$$

En effet, au rang $p = 1$, on a $\psi(B_1) = B_0$ et $\psi^{-1}(B_1) = B_2$. Donc les relations (1.3) et (1.4) sont vérifiées à partir du rang $p = 1$. En les considérant vraies à partir d'un certain rang p , montrons qu'elles sont également vraies au rang $p + 1$.

$$\text{Si on a pour } p \begin{cases} \psi_p(B_1) = B_{-p+1} \\ \psi_p^{-1}(B_1) = B_{p+1} \end{cases}$$

Alors $\psi(\psi_p(B_1)) = \psi(B_{-p+1}) = B_p = B_{-(p+1)+1}$ et $\psi^{-1}(\psi_p^{-1}(B_1)) = \psi^{-1}(B_{p+1}) = B_{p+2} = B_{(p+1)+1}$. Donc les relations sont vérifiées au rang $p + 1$. Par récurrence, (1.3) et (1.4) sont vraies pour tout $p \geq 0$.

Montrons que $\forall k \in \mathbb{Z} \forall B_j \ j \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{\psi_k(B_j) = B_{-k+j}} \quad (1.5)$$

Nous savons que $\forall k \in \mathbb{Z} \ B_{-k+1} = \psi_k(B_1)$.

Soit $j \in \mathbb{Z}$, $\psi_{k-j+1}(B_1) = B_{-k+j} = \psi_k \circ \psi_{-j+1}(B_1) = \psi_k(B_j)$

Montrons que $\forall k \in \mathbb{Z} \forall B_j \ j \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{\psi_k^{-1}(B_j) = B_{k+j}} \quad (1.6)$$

C'est évident, $\psi_k^{-1}(B_j) = \psi_k^{-1} \circ \psi_{j-1}^{-1}(B_1) = \psi_{k+j-1}^{-1}(B_1) = B_{k+j}$

Montrons que $\forall k \in \mathbb{Z} \forall B_j \ j \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{\psi_k \circ \psi_k^{-1}(B_j) = B_j} \quad (1.7)$$

C'est là aussi évident : $\psi_k \circ \psi_k^{-1}(B_j) = \psi_k(B_{k+j}) = B_j$ à fortiori $\psi \circ \psi^{-1}(B_j) = B_j$.

On a également $\forall k \in \mathbb{Z} \forall B_j \ j \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{\psi_k^{-1}(B_j) = \psi_{-k}(B_j)} \quad (1.8)$$

il suffit d'appliquer (1.6) et (1.5).

2° Les homéomorphismes. $\forall k \in \mathbb{Z} \ \psi_k$ est un homéomorphisme en tant que composition d'homéomorphismes.

$\forall k \in \mathbb{N}$ on peut construire l'application $\psi_{k-1, -k+1} : B_{-k+2} \rightarrow B_k; T_{-k+2} \mapsto T_k$. C'est un homéomorphisme qui fait passer d'une boucle circulaire B_{-k+2} à son symétrique par rapport à B_1 , qui est un arc de cercle B_k .

Propriétés à l'infini

Nous disposons de trois types de résultats pour scruter le comportement à l'infini des éléments de $(B_k)_{k \in \mathbb{Z}}$.

En premier lieu, il y a les propriétés universellement valables comme :

$\forall k \in \mathbb{Z} \ L_k = 4\pi\rho_0$ ou bien $\forall k \in \mathbb{Z} \ B_k = 2^{-k+1}\{C_k\}$.

Ensuite, nous avons les résultats issus des calculs immédiats, par exemple : $\lim_{k \rightarrow +\infty}(\mu_k) = 0$, $\lim_{k \rightarrow +\infty}(\alpha_k) = \pi/2$ ou encore $\lim_{k \rightarrow +\infty}(\rho_k) = 0$.

Puis on a les résultats liés à la convergence uniforme : $\lim_{k \rightarrow +\infty}\psi_k(B_1) = \lim_{k \rightarrow -\infty}(B_k) = O$ et $\lim_{k \rightarrow +\infty}\psi_{-k}(B_1) = \lim_{k \rightarrow +\infty}(B_k) = [O; P]$.

Nous allons nous intéresser aux entités de convergence, en particulier à l'entité O et à leur compatibilité avec les résultats des deux premières catégories.

Les propriétés universellement valables sont des propriétés de B_k valables pour tout $k \in \mathbb{Z}$. En ce sens, on pourrait s'attendre à les trouver conservées dans le domaine de l'infini.

En premier lieu, la convergence $(B_k)_{k \rightarrow +\infty} \rightarrow [O; P]$ semble idéale, puisque les propriétés applicables aux éléments de $(B_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ y restent valables. Par exemple, $\mu([O; P]) = 2\pi\rho_1$. En outre, on peut admettre que la forme $(B_k)_{k \rightarrow +\infty}$ parcourt $1/2^{|k|+1}$ -ième d'un cercle imaginaire à l'infini.

Par contre, la convergence $(B_k)_{k \rightarrow -\infty} \rightarrow O$ n'est pas entièrement satisfaisante, nous sommes confrontés à deux types de paradoxes. D'une part, les propriétés universellement valables ne le demeurent plus. Prenons un exemple immédiat : $\forall k \in \mathbb{Z} \ \mu(O; S_k) = 4\pi\rho_0$. Devant la nature même de O , longueur, distance restent des concepts inapplicables au point Euclidien.

De même, la propriété être parcourue 2^{-k+1} fois n'est également plus conservée. O en tant que point euclidien ne peut être parcouru

ou recouvert, il reste ce dont la partie est nulle. Or, nous avons une convergence vers un point recouvert 2^{n_∞} fois.

Chapitre 2

Réciproque de la rectification

Soit la rectification du cercle. C'est un processus récursif qui nous y a conduit. On applique une fonction :

$\psi_k : C_{k-1} \rightarrow C_k$ La fonction ψ définit une pseudo-
 $\mu_{k-1} \mapsto \mu_k = \mu_{k-1}$ identité bijective. Où $\mu_k = \alpha_k \rho_k = 2\pi\rho$, qui est donc invariante.
 $\mu_k = \alpha_k \rho_k = \frac{1}{2}\alpha_{k-1} \times 2\rho_{k-1}$. Soit maintenant :

$\psi_k^{-1} : C_k \rightarrow C_{k-1}$ ψ^{-1} définit aussi une pseudo-identité.
 $\mu_k \mapsto \mu_{k-1} = \mu_k$

C'est bien évidemment la réciproque de ψ . C'est donc sur un pas que s'applique ψ^{-1} . Mais posons $\psi^{-n_\infty} = \psi^{-1} \circ \psi^{-1} \circ \dots \psi^{-1}(C_1)$. Alors on construit le point O recouvert 2^{n_∞} . Tout comme la rectification se réalisait dans l'infini actuel, sa réciproque se fait également dans l'infini actuel. Soit $\psi^{-n_\infty}(C_1) = O_{2^{n_\infty}}$.

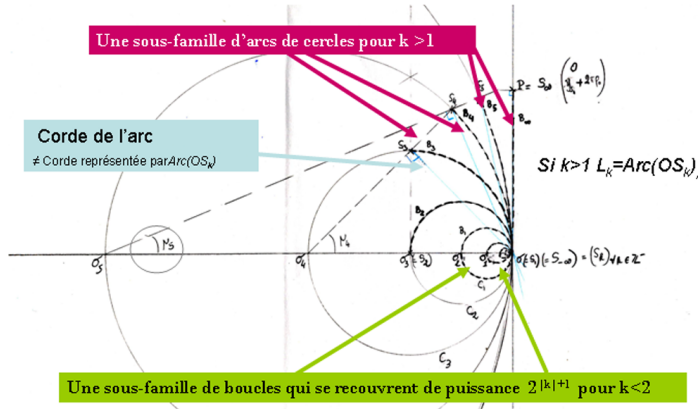


FIGURE 2.1 – Réciproque de la Rectification. et limite de la géométrie euclidienne.

D'un point de vue topologique, on observe que le point recouvert $2^{n\infty}$ peut nouvellement s'entendre. Où $O = g^m$ avec le $NA = g^m$. Puis, considérons $g^{m+1} = 2^{n\infty}g^m$. Le grain g^{m+1} est dense, au sens d'Archimède. On a ici $\mu(g^m) = 0$, où μ exprime l'épaisseur du grain. Nous trouvons donc un grain $g^{m+1} | \mu(g^{m+1}) = 0$, avec un $NA = g^m$ ou un $NA = g^{m+1}$. Le recouvrement continu de g^m qui définit g^{m+1} dans le cas du $NA = g^m$ nous autorise à remarquer que le « point » g^{m+1} n'est plus ce dont la partie est nulle. Donc, nous remettons en cause l'axiomatique de la géométrie euclidienne. Toutefois, on voit que la topologie du grain, si elle vient avant la géométrie, nous permet de concevoir une nouvelle géométrie non-euclidienne.

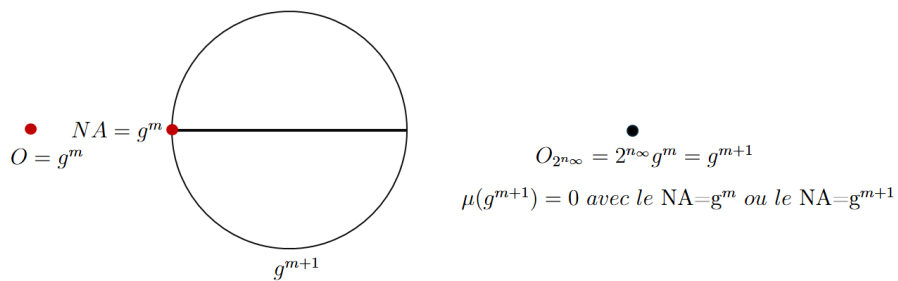


FIGURE 2.2 – Aspect topologique.

Chapitre 3

$$0,99 \dots 9 \neq 1$$

Faisons l'hypothèse que $1 = 0.99999 \dots 9$, alors on peut faire l'hypothèse de récurrence que tous les nombres du continu linéaire soient égaux à un. Pour commencer, on prend $0.99999 \dots 8 = 0,99999 \dots 9 - 0.00000 \dots 1$. On a $0.99999 \dots 8 = 1 - 0.00000 \dots 1 = 0,99999 \dots 9 = 1$ La propriété est donc vraie au rang $0.99999 \dots 8 = 1$. Supposons la propriété vraie pour $x \in [0; 1[$, donc $x - 0.00000 \dots 1 = 1 - 0.00000 \dots 1 = 0.99999 \dots 9 = 1$. La propriété est donc héréditaire. On conclut que tous les éléments du continu linéaire sont égaux à un. On a donc une aporie, qui nous permet de dire que l'hypothèse de départ $1 = 0.99999 \dots 9$ est fausse.

$1 \neq 0.99999 \dots 9$

Chapitre 4

Cardinal du continu

4.1 Cardinal du continu

Pour le continu $[0; 1[$

On se propose de démontrer le théorème de Cantor :

Théorème 1 (Puissance du continu). $\mathcal{C} = 2^{n_\infty}$

Prenons le continu linéaire $[0; 1[$. On va déterminer chaque élément en base 2. La borne inférieure sera comprise dans l'énumération, la borne supérieure sera exclue. Les éléments vont être numérotés avec n_∞ chiffres binaires après la virgule, qui définissent des ordinaux. On recense alors les cas possibles. La partie entière inférieure vaut 0.

- 2 Possibilités pour le premier chiffre après la virgule.
- 2 Possibilités pour le deuxième chiffre après la virgule.
-
- 2 Possibilités pour le k -ième chiffre après la virgule.

—

- 2 Possibilités pour le n_∞ -ième chiffre après la virgule, où $n_\infty = \omega$.

Il résulte que nous décrivons 2^{n_∞} éléments dans le continu linéaire.

4.2 Généralisation à tous les types de bornes du continu linéaire

On prend deux segments $[a; b[$ et $[c; d[$ qui sont en bijection avec $[0; 1[$, par l'application $y = \frac{1}{b-a}x - \frac{a}{b-a}$. Donc, ils possèdent exactement le même nombre d'éléments.

- a est le prédécesseur de 0 : $a = Pred(0)$
- b est le successeur de 1 : $b = Succ(1)$
- c est le successeur de 0 : $Succ(0)$, qui précède d .
- d est le prédécesseur de 1 : $Pred(1)$, qui succède à c .

On prend $]0; 1]$. Alors $[c; d[\subset]0; 1]$ et $]0; 1] \subset [a; b[\Leftrightarrow \#[c; d[\leq \#[0; 1] \leq \#[a; b[\Leftrightarrow 2^{n_\infty} \leq \#[0; 1] \leq 2^{n_\infty}$. D'où l'on tire que $\#[0; 1] = 2^{n_\infty}$.

Considérons $]0; 1[$. On a $[c; d[\subset]0; 1[$ et $]0; 1[\subset [a; b[$. En passant aux cardinaux, $\#[c; d[\leq \#[0; 1[\leq \#[a; b[\Leftrightarrow 2^{n_\infty} \leq \#[0; 1[\leq 2^{n_\infty}$. D'où l'on tire que $\#[0; 1[= 2^{n_\infty}$.

Pour l'intervalle $]0; 1]$, on remarque qu'il peut être équipotent à $]0; 1[$. Il suffit d'échanger 1 et 0, et changer les bornes dans la démonstration du continu $]0; 1[$. Car ils possèdent une même décomposition après la virgule. D'où l'on conclut que $\#[0; 1] = 2^{n_\infty}$.

4.2. GÉNÉRALISATION À TOUS LES TYPES DE BORNES DU CONTINU LINÉ

Théorème 2. *Tous les intervalles continus possèdent la puissance du continu, quelle que soit la nature des bornes.*

Chapitre 5

Construction des entiers

Soit un système matériel Ω pris dans une chute libre entre 0 et 1, tous deux inclus. Le premier point de la trajectoire du corps en chute libre commence au point zéro et s'achève au point de mesure unité (page : 51 : figure 5.1). Alors, le système Ω parcourt tous



FIGURE 5.1 – Trajectoire d'une chute libre.

les points de son chemin sur $c = [0; 1]$.

5.1 Ordinaux

On considère des nombres dont le chiffre à gauche de la virgule sera un zéro. A droite de la virgule, on définit les chiffres en base 2. Les positions des chiffres définissent une chaîne ordinale.

Alors, à partir de cette chaîne d'ordinaux, on construit une nouvelle chaîne d'ordinaux formée par l'ensemble des nombres. $2 \times 2 \times \dots \times 2 = 2^{n_\infty}$. Où $\omega = 2^{n_\infty}$. On peut composer donc 2^{n_∞} ordinaux.

n_∞ définit une quantité d'information de Reny : $\mathcal{I}$. Avec cette information de Reny, nous pouvons construire tous les ordinaux de $c' = [0; 1[$. On peut néanmoins ajouter un élément d'ordinal $\omega + 1$, pour inclure l'unité.

On construit alors une troisième chaîne d'ordinaux qui va être équivalente à la trajectoire prise en sens inverse. On définit la notion de prédécesseur d'un nombre ordinal. Par exemple, le prédécesseur de $\omega + 1$ sera ω , et ainsi de suite jusqu'à l'élément zéro. Ces ordinaux définissent des point de la trajectoire effective, donc ils existent.

5.2 L'infini actuel

Si $2^{n_\infty} + 1$ était une potentialité, jamais nous n'arriverions à avoir une trajectoire qui s'achève en 1. Donc, $2^{n_\infty} + 1$ est un nombre infini achevé. D'où l'on tire que n_∞ est aussi un nombre infini achevé. S'il était une potentialité, $2^{n_\infty} + 1$ serait aussi une potentialité, ce qui n'est pas le cas. Donc, le continu et les entiers naturels forment des infinis actuels ou en acte.

5.3 Les nombres cardinaux

Alors, nous pouvons construire les nombres entiers à partir de n_∞ . Le terme *Pred* signifie le prédécesseur. Par l'expérience de la chute libre, tous les prédécesseurs existent, jusqu'au premier élément 0.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Pred}(n_\infty) & = n_\infty - 1 \\ \text{Pred}(n_\infty - 1) & = n_\infty - 2 \\ \vdots & \\ \text{Pred}(1) & = 0 \\ \text{Pred}(0) & = \emptyset \end{array} \right.$$

A partir de là, nous construisons des nombres entiers équivalents à des cardinaux de nombres ordinaux.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \bigcup \text{Pred}(1) & = \{0\}, & \# = 1. \\ \bigcup \text{Pred}(2) & = \{0, 1\}, & \# = 2. \\ \vdots & \\ \bigcup \text{Pred}(n_\infty) & = \{0, 1, \dots, n_\infty - 1\}, & \# = n_\infty. \end{array} \right.$$

Théorème 3 (Cardinal des entiers naturels). $\#\mathbb{N} = n_\infty$.

On conserve un infini actuel.

Chapitre 6

Topologie du grain

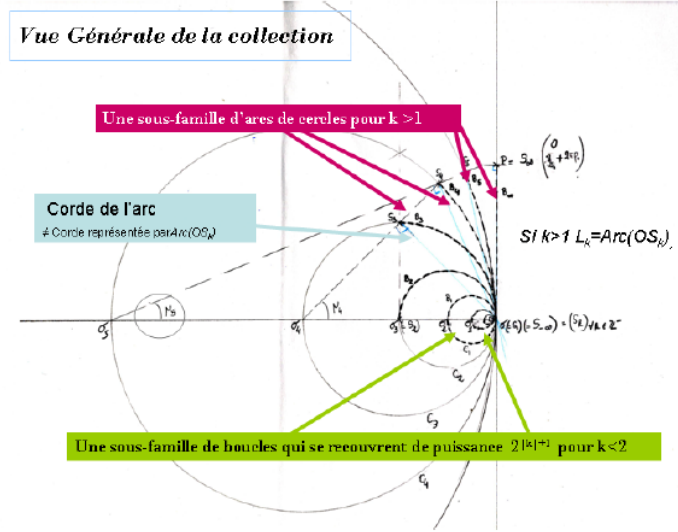
6.1 Le grain

6.1.1 Origine du grain

Dans le chapitre 1, nous avons montré que le point pouvait être recouvert 2^{n_∞} fois (page : 56 : figure 6.1). Puisque le point $2^{n_\infty}O$ possède la puissance du continu, alors le zéro 0_0 associé à O se donne sous un grain plus épais $0_1 = 2^{n_\infty}0_0$. Comme de plus, il existe une mesure de longueur associée à $0_1 = 2\pi\rho$, on peut étirer O pour recouvrir la rectification du cercle.

Toutefois, l'axiome d'Euclide : « Le point est ce dont la partie est nulle », révèle une nature qu'il convient de faire évoluer.

À partir de cet écart, on va construire une topologie du grain basée sur une nouvelle entité mathématique.

FIGURE 6.1 – $\mathcal{F}_1$. Origine du grain.

6.1.2 Structure

Pour développer la notion de grain, nous nous appuyons sur la notion de *coarse-grain* (Niveau d'agraindissement : NA) développée par Gell-Mann. On la rapprochera plus volontiers de *fine-grain*, tout en restant un niveau d'agraindissement.

Définition 1 (Le grain). *Le grain est une entité mathématique possédant une étendue et se déployant sur une échelle*

On entend par échelle le sens anglo-saxon de *scale*.

Définition 2. *Une forme est une figure qui se donne sous la forme de grains.*

Soit l'ensemble des formes circulaires et rectilignes, elles pourront être finies ou infinies. Le zéro sera un grain g^m par défaut.

À toute forme $\mathcal{F}$, on lui associe un représentant algébrique $f = \{NA, \#, \mu\}$.

1. NA désigne le niveau d'agraindissement.
2. $\#$ désigne le cardinal ou la mesure de comptage.
3. μ désigne la mesure de longueur ou l'épaisseur.

Par défaut le grain g^{m+1} désigne un cercle muni de son diamètre.

6.1.3 Relation entre les grains

Si nous prenons un cercle C d'extrémité O_0 , alors il a la puissance du continu en unité de grain O_0 . Soit C est égal à $O_1 = g^{m+1}$ recouvert $2^{n_\infty} O_0 = 2^{n_\infty} g^m$. D'où l'on tire que $C = g^{m+1}$.

Raisonnons en terme de quantité d'information et de quantités de symboles entre les grains g^{m+1} et g^m . La quantité d'information de g^{m+1} va s'exprimer en grain g^m . Elle devra expliciter g^{m+1} d'un point de vue quantitatif. Pour cela nous allons appliquer la quantité d'information de Reny : $\mathcal{I}$. Sachant que si N désigne le nombre d'éléments de g^{m+1} , on aura : $\mathcal{I} = \log_2 N \Leftrightarrow N = 2^{\mathcal{I}}$. Comme g^{m+1} se définit à partir d'un continu, $\mathcal{I}$ ne peut être une quantité finie. D'autre part, pour optimiser g^{m+1} , c'est à dire pour que $\mathcal{I}$ soit minimale, il est nécessaire que $\mathcal{I} = n_\infty$. En conséquence : $g^{m+1} = 2^{n_\infty} g^m$ d'un point de vue de la théorie de l'information.

Rapprochons le grain de zéro. Plus exactement, exprimons g^m et

$g^{m+1} = 2^{n_\infty} g^m$ en fonction du zéro (page : 59 : figure 6.2). Alors on met en évidence l'épaisseur du zéro.

6.1.4 Terminologie

Le niveau d'agraindissement

Théorème 4. *Le grain d'origine d'un graphe est le plus petit grain du graphe.*

Définition 3 (NA). *On appelle niveau d'agraindissement, un grain qui va définir le grain d'origine.*

Définition 4 (Mesure de longueur). *On appelle mesure de longueur d'un grain, sa taille. Mais elle pourra être l'épaisseur d'un grain.*

On définit des mesures par rapport aux grains de jonction entre deux réels adjacents (page : 59 : figure 6.3). En travaillant en base deux, on déduit la figure de la forme $\mathcal{F}_3$.

Théorème 5 (Mesure avec un $NA = g^{m-1}$). $\mu(g_k^m) = \mu_{inf}(g_k^m)$

Si l'on se place dans un $NA = g^m$, tout se passe comme si les grains g^m avec le $NA = g^m$ se contractaient de manière radiale, vers la gauche.

Théorème 6 (Mesure avec un $NA = g^m$). $\mu(g_k^m) = \mu_{inf}(g_k^m)$

On a en particulier $\mu(g_k^m) = 0, \#g_{k-1}^m$.

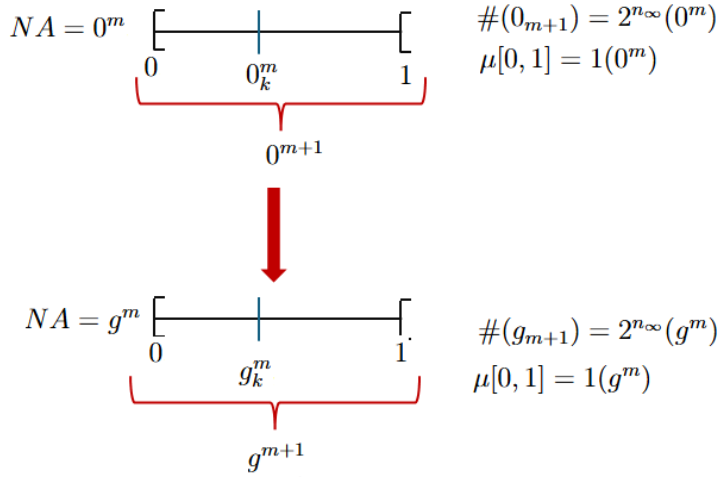


FIGURE 6.2 – Expression de g^{m+1} en fonction de g^m , par rapport à l'épaisseur du zéro.

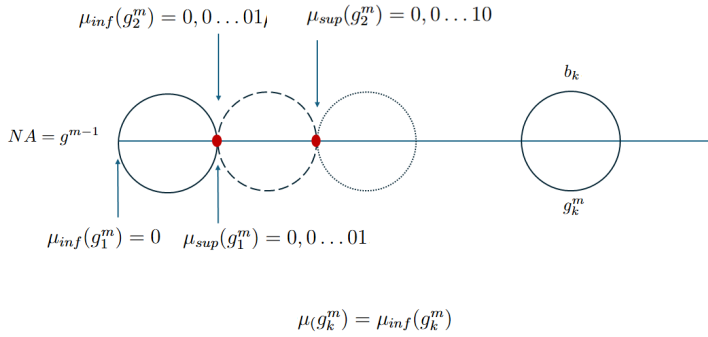


FIGURE 6.3 – $\mathcal{F}_3$ Mesures de longueur ou d'épaisseur.

Grain dilatés et amorphes

Définition 5 (Grain dilaté). *Un grain dilaté est un forme dotée :*

- *d'une origine.*
- *d'une extrémité.*
- *d'une direction.*
- *d'un sens.*

On pourra avoir des dilatations circulaires (radiales ou concentriques) et rectilignes. On voit qu'un grain dilaté sur une échelle rectiligne est équivalent à un vecteur. La réciproque est aussi vraie, un vecteur est un grain dilaté. Un champ vectoriel peut être pris comme une dilatation généralisée de l'espace.

Définition 6 (Grain amorphe). *Un grain amorphe est un grain d'épaisseur nulle, non dilaté.*

6.2 Autosimilarité et fractalisation

6.2.1 Autosimilarité et polymorphisme

Soient les grains $g^m, g^{m+1}, Kg^{m+1} | K \in \mathcal{R}_*^+, g^{m+2}$. Ils sont autosimilaires. Le grain g^{m+2} est d'une certaine façon autosimilaire à g^{m+1} sous sa forme C_∞ , mais il en est distinct sous la forme Δ_∞ .

6.2.2 Fractalisation

Décomposons la figure (page : 61 : figure 6.4), en des chaînes composées de cercles C_i^j , de diamètre D_i . Alors on constate une autosimilarité entre les chaînes. On formule une homothétie externe

pour passer de $C_i^j \mapsto C_i^{j+1}$. On observe que : $\begin{cases} h_e(O, 2)[C_{2i-1}^j] = C_{2i-1}^{j+1} \\ h_e(O, 2)[C_{2i}^j] = C_{2i}^{j+1} \end{cases}$.
c'est un mécanisme récursif, on procède ainsi jusqu'à une chaîne infinie. Alors l'homothétie interne de la fractale est de dimension.

$$\boxed{\dim = -\frac{\ln n_\infty}{\ln 2}}.$$

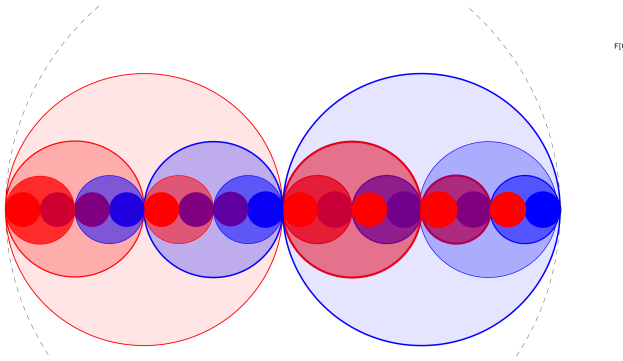


FIGURE 6.4 – $\mathcal{F}$: Grain fractalisé.

6.2.3 Pseudo-identité entre les grains circulaires et les zéros.

Soit une pseudo-identité, c'est une transformation bijective, entre un domaine A et un co-domaine B , qui renvoie le même élément sous deux représentations distinctes. On obtient une relation d'équivalence entre les NA et zéro. Quelque soit les grains g^{m+k} dans un un $NA = g^{m+k}$, ils sont équivalents à un zéro.

6.3 Contraction et dilatation

Définition 7 (Homothétie interne). *Une homothétie interne est une transformation d'échelle de $\mathcal{F}$, qui pourra éventuellement être accompagnée d'un changement de NA .*

On peut en particulier transformer le grain g^m d'épaisseur nulle en un grain d'épaisseur non nulle. Ce que ne peut réaliser une homothétie externe de rapport fini.

6.3.1 La contraction : τ_{di}^{-1}

On a $\tau_{di}^{-1} g^{m+1} = g^m$. Il suffit de contracter le diamètre progressivement. Il soutient alors une contraction du grain associé. Cette contraction est équivalent à une homothétie interne (page : 63 : figure 6.5).

6.3.2 Les dilatations τ_{di}

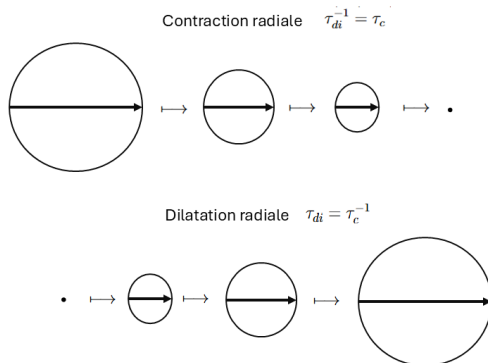
Soit $g^{m+1} = C$, $\tau_{di} \circ \tau_{di}^{-1}(C) = id(C) = C = g^{m+1}$.
Comme $\tau_{di}^{-1}(C) = \tau_{di}^{-1}(g^{m+1}) = g^m \Leftrightarrow \tau_{di}(g^m) = g^{m+1} = g_{di}^m$.

Théorème 7. $g_d^m = g_a^{m+1}$

6.3.3 La dilatation de l'échelle

Les dilatations rectilignes

On prend une dilatation rectiligne à partir d'un segment composé de grains amorphes. Donc, c'est un continu composé de $2^{n_\infty} g_{di}^m = g^{m+2}$ éléments.

FIGURE 6.5 – Contraction de $\mathcal{F}_4$.

Axes dilatées et amorphe dans $\mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}$

Dans le plan $\mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}$, on considère deux axes orthogonaux qui sont des échelles amorphes $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$. Soit $\mathcal{F}'_1$ une échelle dilatée superposée avec $\mathcal{F}_1$, et $\mathcal{F}'_2$ une échelle dilatée superposée avec $\mathcal{F}_2$. On passe d'une échelle amorphe à une échelle dilatée par un changement de NA , de g^m à g^{m+1} (page : 64 : figure 6.6). Sur le graphe suivant , on construit un plan réel avec deux échelles : amorphe et dilatée.

6.3.4 La dilatation par paliers finis

Soit un grain $g_a^m = 0$, nous voulons trouver une expression de la dilatation à l'infini, à partir de paliers associés à une dilatation. Avec le graphe, nous voyons que le faisceau de cercles (C_q) possède

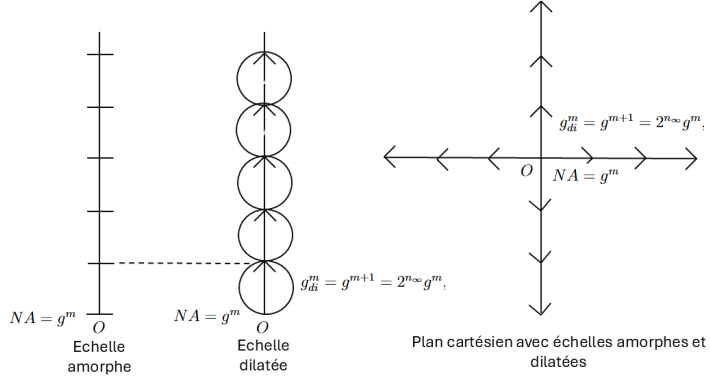


FIGURE 6.6 – Dilatation du continu.

une propriété récursive. Ainsi, nous passons de la dilatation de $C_1 = g_{di}^m = g^{m+1}$ à la dilatation de $C_2 = 2g_{di}^m = 2g^{m+1}$. Au palier infini, on a $C_\infty = 2^{n_\infty} g_{di}^m = 2^{n_\infty} g^{m+1} = g^{m+2}$. Le cercle à l'infini est équivalent à la droite tangente au faisceau de cercle en 0. On remarque que la dilatation des cercles implique la dilatation de leurs diamètres. On a une dilatation du continu rectiligne. (Page ??- Figure ??, page : 65 : figure 6.7).

6.3.5 Contraction et dilatation du cercle unité complexe

Considérons le plan complexe $\mathcal{P}_\mathbb{C}$ muni de son cercle unité complexe $\mathcal{U}$. Il existe trois façons de calculer la circonférence, en fonction de la mesure angulaire $\alpha = 2\pi$ et des différents rayons (Page ??- Figure ??).

- $C_1 = 2\pi$
- $C_2 = 2\imath\pi$

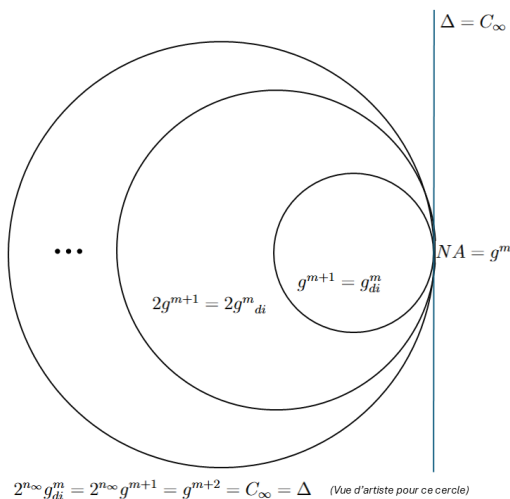


FIGURE 6.7 – Dilatation à l'infini par paliers.

$$— C_3 = \exp(2i\pi)$$

Pour C_3 , la mesure angulaire est de 2π , on prend pour rayon i pour déterminer une circonférence partielle. On fait alors la composition $\exp \circ 2i\pi$ qui définit la circonférence complète. On a alors $C_3 = \exp(2i\pi)$ (page : 66 : figure 6.8).

Comme $C_1 \equiv C_2$, on a $2\pi \equiv 2i\pi$. D'où $C_3 \equiv \exp(2\pi)$. Basculons dans un plan réel, on a $2\pi \subset \exp(2\pi)$, comme il est indiqué sur le graphe (page : 66 : figure 6.8).

Avec une contraction de $\exp(2\pi)$ qu'on ramène en le cercle $C_2 = 2\pi$, on obtient le graphe suivant. On repasse dans le plan complexe, avec la formule $2\pi \equiv 2i\pi$. Il s'en déduit le graphe ci-dessous qui met en évidence que $C_2 \equiv C_3$ grâce à une contraction de C_3 . D'où l'on déduit que les contractions du cercle existent. Alors, on déduit que la réciproque de la contraction : la dilatation existe aussi.

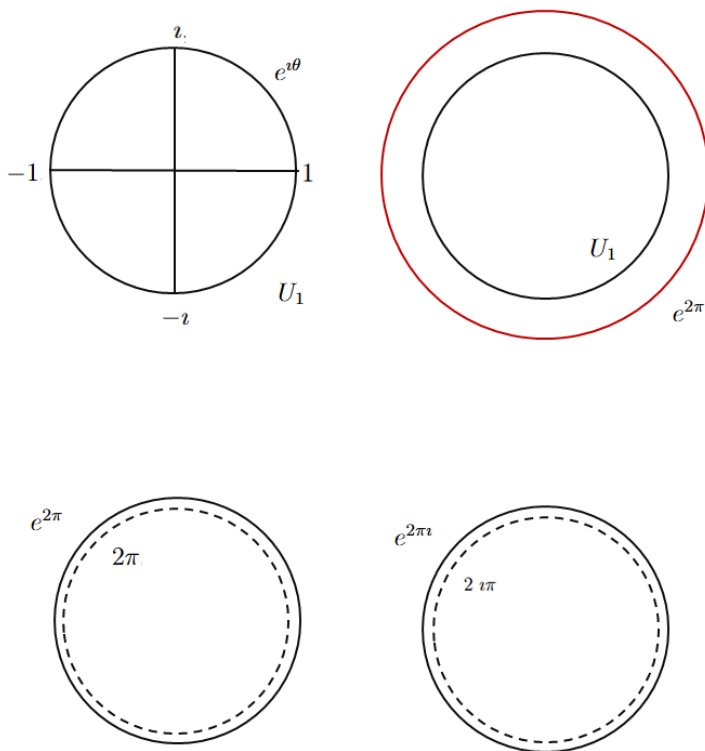


FIGURE 6.8 – Les circonférences du cercle complexe.

6.3.6 Dilatation du continu

Nous partons d'une origine $0 = g_a^m$. Nous dilaton le grain de l'origine pour former le grain circulaire g_{di}^m . On poursuit la dilatation circulaire sur tous les paliers de la dilatation. Le cercle à l'infini est alors équivalent à la droite passant par l'origine tangente au faisceau de cercles, formant un axe rectiligne, gradué par

les $g_{k_{di}}^m$ où $1 \leq k \leq 2^{n_\infty}$. Nous remarquons alors que les grains $g_{k_{di}}^m$ sont des dilatations du continu. De plus, comme ces grains composent le grain g_{di}^{m+1} , alors ce dernier est une dilatation du continu qui embrasse tout l'intervalle de la droite entre la borne inférieure $-\infty$ et la borne supérieure $+\infty$, sachant que $-\infty = +\infty$ sur le cercle à l'infini.

On observera que la contraction du NA est équivalente à une dilatation des grains de la forme, et une dilatation du NA est équivalente à une contraction de la forme.

Théorème 8. *Tout continu à capacité à se dilater.*

La réciproque de la dilatation étant la contraction, on déduit le corollaire ci-dessous.

Corollaire 1. *Tout continu à capacité à se contracter.*

On déduit le théorème :

Théorème 9. *L'espace a capacité d'être anisotrope.*

Chapitre 7

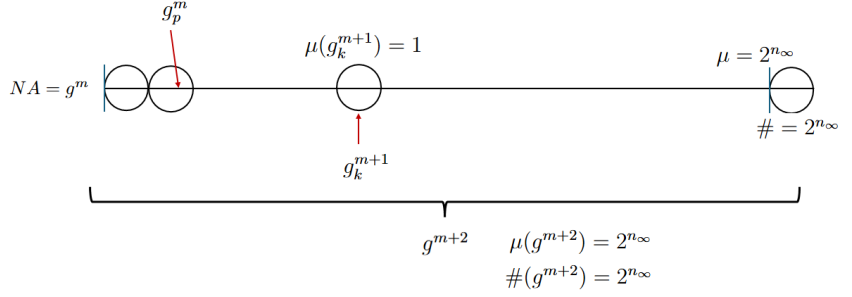
Construction des réels

7.1 L'unité est équivalente à 2^{n_∞}

Soit $\mathcal{F}_1 = g^{m+2} \circ g^{m+1} \circ g^m$ à partir du $NA = g^m$. Nous avons $\#g^{m+2} = 2^{n_\infty}$ en grain g^{m+1} et $\#g^{m+2} = 2^{2n_\infty}$ en grain g^m . D'après le théorème de Cantor $\mu(g^{m+1}) \times \#g^{m+1} = \mu(g^{m+1}) \times 2^{n_\infty} = 2^{n_\infty} \Leftrightarrow \mu(g^{m+1}) = 1$ (Normalisation). Il en découle que $\mu(g^{m+2}) = 2^{n_\infty}$.

Considérons maintenant $\mathcal{F}_2 = g^{m+2} \circ g^{m+1} \circ g^m \circ g^{m-1}$, à partir du $NA = g^m$, comme il est indiqué sur le graphique : Alors $\mu(g^m) = \frac{\mu(g^{m+1})}{\#g^m} = \frac{1}{2^{n_\infty}} = 0$. Et $\mu(g^{m-1}) = \frac{1}{2^{2n_\infty}}$.

Mais on a aussi $\mathcal{F}_3 = g^{m+1} \circ g^m \circ g^{m-1}$, à partir du $NA = g^{m-1}$. Avec $\mu(g^{m+1}) = 2^{n_\infty}$ en grains g^m . Car $\mu(g_p^m) = 1$. Toujours par l'application du théorème de Cantor : $\mu(g_p^m) \times 2^{n_\infty} = 2^{n_\infty}$, ce qui entraîne que $\mu(g_p^m) = 1$ (normalisation). Par ailleurs $\#g^m = 2^{n_\infty}$ et $\#g^{m-1} = 2^{2n_\infty}$.

FIGURE 7.1 – $\mathcal{F}_1$.

On conclut alors que g^{m+1} se donne sous une grandeur unitaire et transfinie : 2^{n_∞} suivant le NA , mais aussi suivant l'encapsulation dans g^{m+2} .

$$\boxed{1 \cong 2^{n_\infty} \mod \mu(g^{m-1}) = \frac{1}{2^{n_\infty}} \mapsto \frac{1}{2^{2^{n_\infty}}}}$$

7.2 Numérotation d'une forme $\mathcal{F}_3 = [0; 2^{n_\infty}[$

Comme nous avons numéroté les éléments de la forme $\mathcal{F}_1$, nous allons reporter sur la forme $\mathcal{F}_3$ de $NA = g^{m-1}$ les individus réels dans chaque intervalle $I_p = [p; p+1[$. Pour cela nous ajoutons un index à $b_{k,p}$ où p fait référence à la borne inférieure de I_p . Où le nombre p fait référence au nombre à gauche de la virgule de $b_{k,p}$,

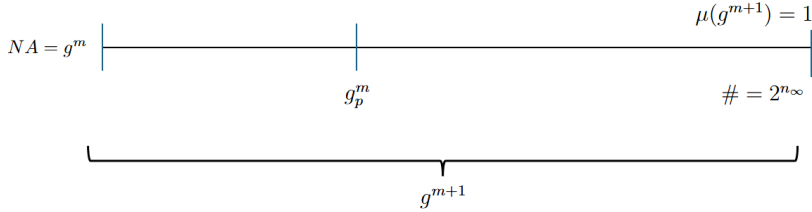
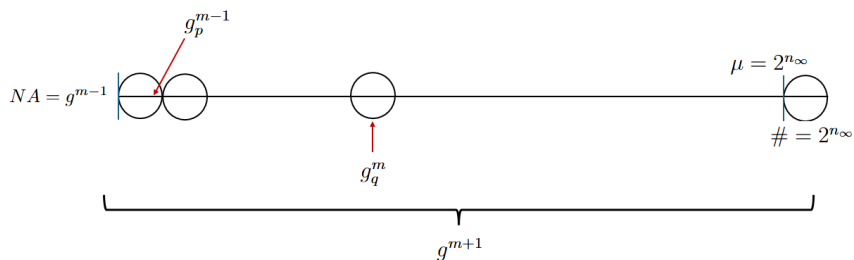
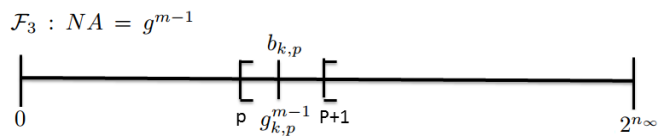


FIGURE 7.2 – $\mathcal{F}_2$.

c'est aussi la partie entière inférieure de $b_{k,p}$.

On remarque qu'on prolonge l'axe réel jusqu'à 2^{n_∞} éléments de grains g^m . Car n_∞ est une quantité d'information de Reny qui soutient un ensemble de définition à 2^{n_∞} éléments g^m . Si l'on retient n_∞ dans les repères traditionnels comme borne supérieure, c'est parce que n_∞ est la borne inférieure des nombres transfinis. D'autre part, on a une borne ouverte à n_∞ , pour représenter une potentialité (page : 132 : figure 18.4). Par ce procédé, nous numérotions tous les grains $g_{k,p}^{m-1}$ de $\mathcal{F}_3$. Nous pouvons nous représenter la droite réelle $\Delta_f = (-n_\infty, n_\infty)$ comme une restriction de $[0; 2^{n_\infty}[\cup] - 2^{n_\infty}; 0] = (-2^{n_\infty}, 2^{n_\infty})$; ou bien $] - 2^{n_\infty}; 0] \cup [0; 2^{n_\infty}[= (-2^{n_\infty}, 2^{n_\infty})$ comme un prolongement de la droite réelle $\Delta_f = (n_\infty; n_\infty)$. De plus on remarquera que nous avons démontré le principe de cor-

FIGURE 7.3 – $\mathcal{F}_3$.FIGURE 7.4 – $\mathcal{F}_4$.

respondance. On appellera $(-2^{n_\infty}, 2^{n_\infty})$ la droite réelle transfinie $\Delta_{\mathbb{T}_\mathbb{R}}$. Elle est composée de nombre réels transfinis, que nous allons définir plus loin.

Si nous nous représentons les grains (g_k^m) dans le $NA = g^m$, alors $\mu(\cup g_k^m) = 1$. Si nous nous figurons les grains (g_k^m) dans le $NA = g^{m-1}$, alors $\mu(\cup g_k^m) = 2^{n_\infty}$. On déduit :

Théorème 10. $1 \cong 2^{n_\infty} \pmod{NA = g^m \longmapsto NA = g^{m-1}}$

Soit l'infini se ramène à du fini, et vice-versa.

On peut envisager que $[n_\infty, n_\infty]$ définit un infini actuel, par l'expérience de la chute libre. On envisage la restriction $(-n_\infty, n_\infty)$ qui définit alors un infini potentiel. Pour la droite $[2^{n_\infty}; 2^\infty]$, elle définit aussi un infini actuel par l'expérience de la chute libre relativement à $[0; 2^{n_\infty}]$. On pourra également envisager la restriction $(-2^{n_\infty}; 2^{n_\infty})$, qui définira un infini potentiel.

Théorème 11. *De correspondance $\acute{A}$ tout individu-grain de la droite réelle $(-2^{n_\infty}, 2^{n_\infty})$, il correspond un élément réel ou transfini réel, et un seul.*

Théorème 12. *De correspondance $\acute{A}$ tout individu-grain de la droite réelle $(-n_\infty, n_\infty)$, il correspond un élément réel, et un seul.*

Apportons une dernière remarque sur la quantité d'information de la droite réelle transfinie. Tout d'abord, la quantité d'information de Reny d'une demi-droite réelle transfinie vaut $\mathcal{I}_1 = 2n_\infty$ nécessaire pour composer $2^{n_\infty} \cdot 2^{n_\infty} = 2^{n_\infty}$ éléments. En conséquence la droite réelle transfinie possède une quantité d'information de Reny de $\mathcal{I}_2 = 2n_\infty$.

Sur la forme $\mathcal{F}_2$, on remarque que $2^{n_\infty} \times \mu(g^m) = 1$ d'où : $\mu(g^m) = \frac{1}{2^{n_\infty}} = 0$. Par un changement de grain d'encapsulation (de g^{m+1} à g^{m+2}), on observe que $2^{n_\infty} \times \mu(g^m) = 2^{n_\infty}$ d'où $\mu(g^m) = 1$, tandis que $2^{2n_\infty} \times \mu(g^m) = 2^{n_\infty}$ qui implique que $\mu(g^m) = \frac{1}{2^{n_\infty}} = 0$.

Chapitre 8

Théorie des ensembles

8.1 Un continu dénombrable

On considère une forme continue $\mathcal{F}_1$ de $NA = g^m$, telle qu'elle est représentée sur la figure 8.1 (page 76). On applique une homothétie interne en passant du $NA = g^m$ vers le $NA = g^{m-1}$ pour définir la forme $\mathcal{F}_2$. Alors, un élément générique g_k^m de $\mathcal{F}_1$, d'épaisseur nulle se transforme en un élément générique circulaire g_k^m de $\mathcal{F}_2$.

On définit alors $2^{n\infty}$ cercles élémentaires g_k^m qui sont reliés entre eux par des grains de jonction $g_{k'}^{m-1}$. Pour supprimer les jonctions, nous appliquons la transformation $\tau : g_k^{m-1} \mapsto 2^{n\infty} g_{k'}^{m-2}$. Alors on remplace les grains de jonctions par un continu, on visualise la transformation sur la forme $\mathcal{F}_3$ (page : 76 : figure 8.1). Soit, on définit le continu initial de $\mathcal{F}_1$ comme un ensemble discret de grains g_k^m énumérables, à fortiori dénombrables.

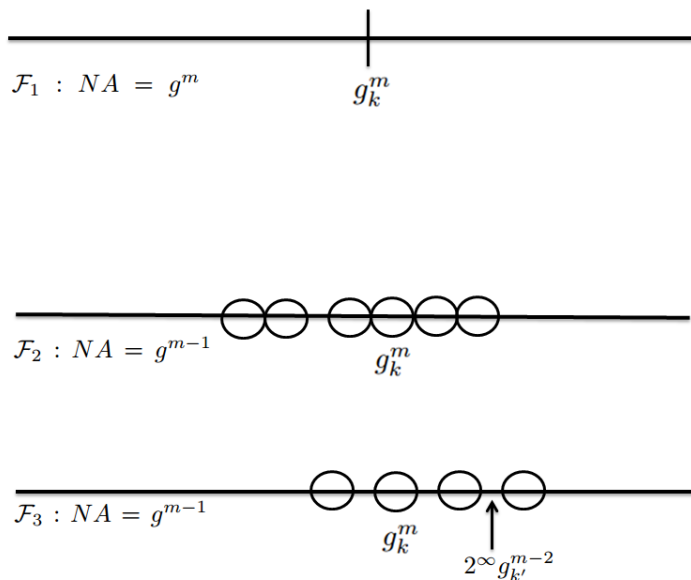


FIGURE 8.1 – Un ensemble dénombrable.

Soit le changement de $NA = g^{m-1} \mapsto NA = g^m$. Par cette transformation qui conserve le bon ordre, on transforme les grains circulaires g_k^m mis en relation de correspondance bi-univoques avec les réels b_k , en des grains d'épaisseur nulle conservant la relation $(g_k^m; b_k)$. On obtient la forme $\mathcal{F}_1$ dans la figure ci-dessous (page : ?? : figure ??).

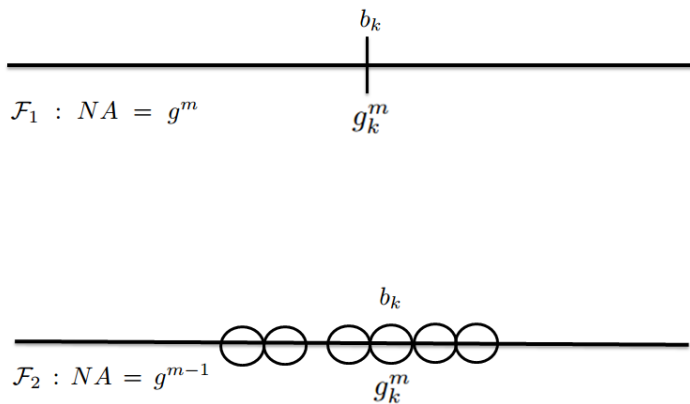


FIGURE 8.2 – Couples grains-réels

8.2 Axiomatique de Zermelo-Fraenkel

L'infini et son statut . Nous nous appuyons sur $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ de la partie précédente. Nous avons une bijection entre $\mathcal{F}_2$ et $\mathcal{F}_1$. $\#\mathcal{F}_1 = \#\mathcal{F}_2 = 2^{n_\infty}$. Mais on renvoie aussi l'intervalle infini $[0; 2^{n_\infty}[$ vers un ensemble fini $c = [0; 1[$. Il est clair que $[0; 1[$, forme un tout en acte ou actuel. Sachant que $[0; 2^{n_\infty}[$ offre un changement de vue, on peut dire que $\mathcal{F}_2$ définit un infini en acte.

De l'axiome du choix, vers une fonction de choix .

Axiome 1 (Axiome du choix). *Si T est un ensemble, dont les éléments sont tous des ensembles qui sont différents de l'ensemble vide et disjoints deux à deux, leur union U comprend au moins un sous-ensemble S ayant un et un seul élément en commun avec chaque élément de T .*

Soient les formes $(\mathcal{F}_k^1)_{1 \leq k \leq q \in \mathbb{N}}$, qui définissent une collection d'ensembles tels que $\mathcal{F}_k^1 \neq \mathcal{F}_{k'}^1 \forall k, k'$ muni d'un $NA = g^m$. Nous appliquons un changement de $NA = g^m \mapsto g^{m-1}$, pour chaque ensemble $\mathcal{F}_k^1$ qui renvoie à l'ensemble $\mathcal{F}_k^2$. Puis nous transformons tous les grains de jonction g^{m-1} en $2^{n_\infty} g^{m-2}$ (page : 78 : figure 8.3). Appliquons une fonction de choix sur les ensembles $\mathcal{F}_{k'}^2$. Elle

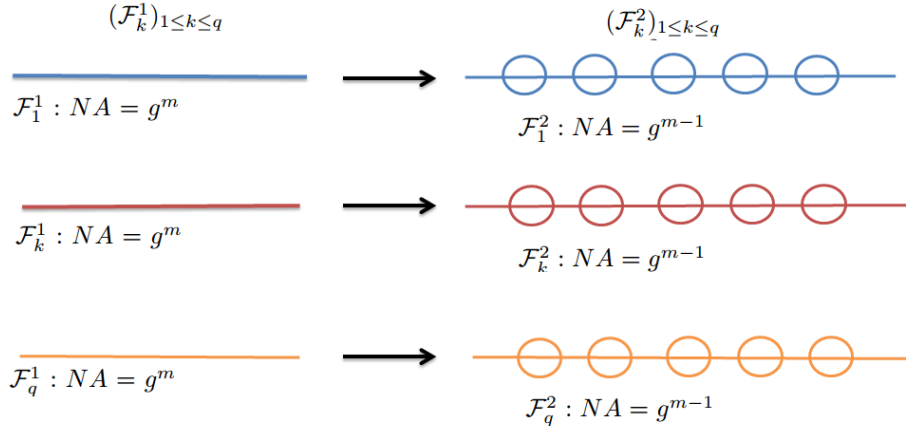


FIGURE 8.3 – Axiome du choix.

consiste à prendre un élément g_k^m et un seul de l'ensemble $\mathcal{F}_{k'}^2$, pour

le faire correspondre avec un élément g_k^m et un seul de l'ensemble $\mathcal{F}_k^1$.

Soit T un ensemble , dont tous éléments $g_{k+1}^m, \dots, g_q^m$ sont tous des ensembles $(\mathcal{F}_k^1)_{1 \leq k \leq q}$. On a $\forall k, \mathcal{F}_k^1 \neq \emptyset$ et $\forall k, k' | \mathcal{F}_k^1 \cap \mathcal{F}_{k'}^1 = \emptyset$. Soit $S \subset \cup(\mathcal{F}_{k'}^2)$, tel que $S = \{g_1^m, g_2^m, \dots, g_q^m\}$ forme un ensemble de grains disjoints. On déduit $S \cap T = \{g_1^m, g_2^m, \dots, g_q^m\}$ (Cf. la figure 8.4 page 79). En conséquence, si S est un sous-ensemble

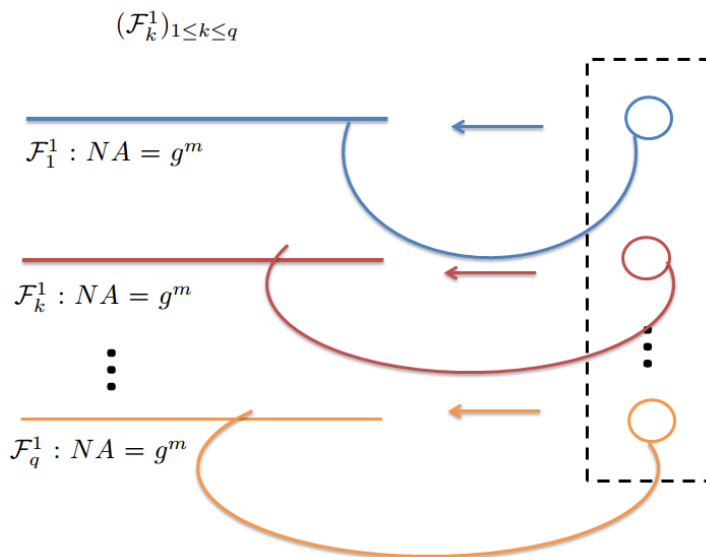


FIGURE 8.4 – Fonction de choix.

de $\cup \mathcal{F}_{k'}^2 = \cup \mathcal{F}_k^1$, S possède un et un seul élément en commun avec chaque élément de $T = \cup \mathcal{F}_k^1 = \cup_k g_k^{m+1}$.

8.3 Réflexivité

Axiome 2 (Euclide). « *Le tout est plus grand que la partie* ».

Définition 8 (Le paradoxe de la réflexivité). *La partie est égale au tout.*

Partie propre et partie partielle

Définition 9 (Partie propre). *On appelle partie propre un ensemble qui existe comme un tout.*

Soient $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ deux ensembles pris en tant que partie propre, tels que $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1$; avec le $NA = g^m$. On a alors $\#\mathcal{F}_1 = \#\mathcal{F}_2 = 2^{n_\infty}$. Car des deux ensembles possèdent la puissance du continu. On définit une notion d'épaisseur qui est équivalente à une mesure de longueur du grain. On peut dire que le grain $[g^m]$ est plus fin pour décrire $\mathcal{F}_2$ en tant que partie propre, que pour décrire $\mathcal{F}_1$. Pourtant ils sont d'épaisseur nulle tous les deux. On retrouve un résultat de Cantor que nous allons moduler.

$$\boxed{2^{n_\infty} K = 2^{n_\infty}}$$

Définition 10 (Partie partielle). *On appelle partie propre un ensemble qui est une partie relative à un tout.*

Soit $\mathcal{F}_2$ la partie relative au tout $\mathcal{F}_1$, composée de grain g^m d'épaisseur nulle. Alors $\mathcal{F}_1 = K\mathcal{F}_2$ ($K > 1$) sera composée de grains Kg^m d'épaisseurs nulles. On a donc deux grains distincts d'épaisseurs nulles. Le grain de $\mathcal{F}_1$ est donc plus épais que le grain de $\mathcal{F}_2$. Car $Kg^m > g^m$ ($K > 1$).

Une fonction réflexive . Passons à une application affine $y = f(x)$ sur $\mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}$. Soit $\mathcal{F}_2 = [0; x_0[$, alors $y_0 = f(x_0)$ avec $x_0 < y_0$ (page : 81 : figure 8.5). Par la rotation τ d'angle $\frac{\pi}{2}$, $x_0 \mapsto \tau(x_0)$.

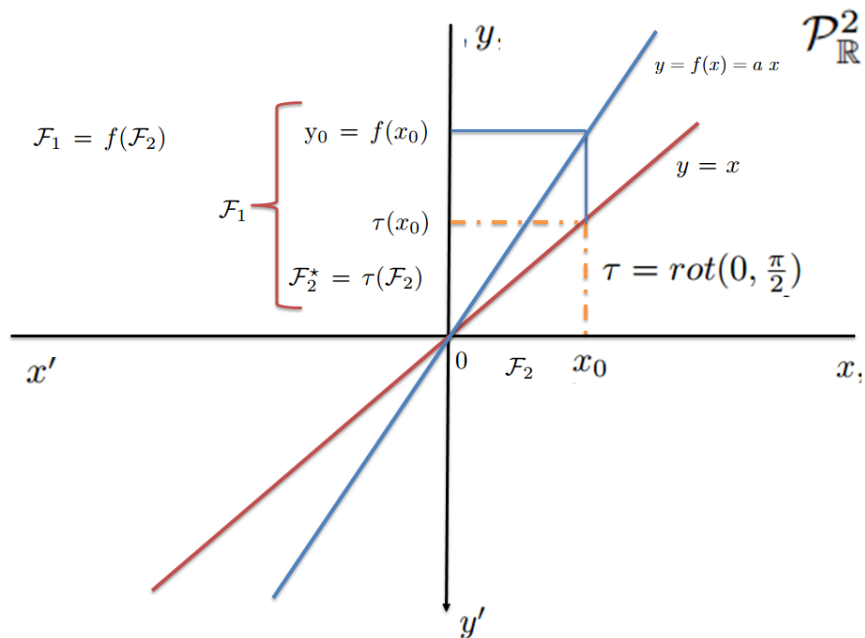


FIGURE 8.5 – Paradoxe de la réflexivité.

Soit $\mathcal{F}_2$, se transforme en $\mathcal{F}_2^* \subset \mathcal{F}_1$. Ces deux ensembles sont équipotents, et tous deux de cardinal 2^{n_∞} .

À partir de l'égalité $2^{n_\infty} = K \cdot 2^{n_\infty} \ \forall K \in \mathbb{R}_*^+$, on déduit quatre choses :

- On déduit $K = 1$ (à partir des parties propres) qui vérifie

$2^{n_\infty} g_{\mathcal{F}_1}^m = 2^{n_\infty} g_{\mathcal{F}_2^*}^m = 2^{n_\infty} g_{\mathcal{F}_2}^m$. Où on prend $\mathcal{F}_2^*$ et $\mathcal{F}_2$ en tant que partie propre.

- Si l'on conserve l'égalité $\frac{1}{K} 2^{n_\infty} = 2^{n_\infty}$ on obtient un rapport d'homothétie entre $g_{\mathcal{F}_1}^m$ de $g_{\mathcal{F}_2}^m = \frac{1}{K} g_{\mathcal{F}_1}^m$.
- Mais on a aussi une expression de la droite affine $y = ax$, à partir de $\mathcal{F}_2$, partie partielle de $\mathcal{F}_1$. En effet $g_{\mathcal{F}_2}^m = \frac{1}{K} g_{\mathcal{F}_1}^m \Leftrightarrow x = \frac{1}{K} y \Leftrightarrow y = Kx$.
- Pour finir, $g_{\mathcal{F}_2^*}^m = \frac{1}{K} g_{\mathcal{F}_1}^m$ implique que le grain $g_{\mathcal{F}_2}^m$ est une contraction du grain $g_{\mathcal{F}_1}^m$.
Autrement dit, $g_{\mathcal{F}_1}^m$ est une dilatation de $g_{\mathcal{F}_2^*}^m$ et de $g_{\mathcal{F}_2}^m$.

8.4 Encapsulation

Le recalibrage . On considère une forme $\mathcal{F}_1$ de $NA = 2g^m$ (page : 83 : figure 8.6). Alors $\mu(2g^m) = \mu(g^m) = 0$. Et $\#\mathcal{F}_1 = 2^{n_\infty}$ en grain $2g^m$, et $2^{n_\infty-1}$ en grain g^m .

Appliquons un changement de NA : $NA = 2g^m \mapsto NA = 2g^{m-1}$, qui renvoie $\mathcal{F}_1$ en $\mathcal{F}_2$. Les grains $2g^m$ se transforment en des cercles qui encapsulent deux grains g^m . Alors $\#\mathcal{F}_1 = 2^{n_\infty-1}$ et $\#\mathcal{F}_2 = 2^{n_\infty}$ en grains g^m .

8.5 L'hypothèse du continu

L'hypothèse du continu stipule qu'il n'existe aucun nombre entre les cardinaux n_∞ et 2^{n_∞} . Revenons à la forme $\mathcal{F}_3$, du dénombrement des grains $(g_k^m)_{1 \leq k \leq 2^{n_\infty}}$. On voit qu'il existe tous les grains entre n_∞ et 2^{n_∞} . Ce sont des cardinaux de sous-ensembles de $\mathcal{F}_3$. On affirme que l'hypothèse du continu est fausse. Il existe tous

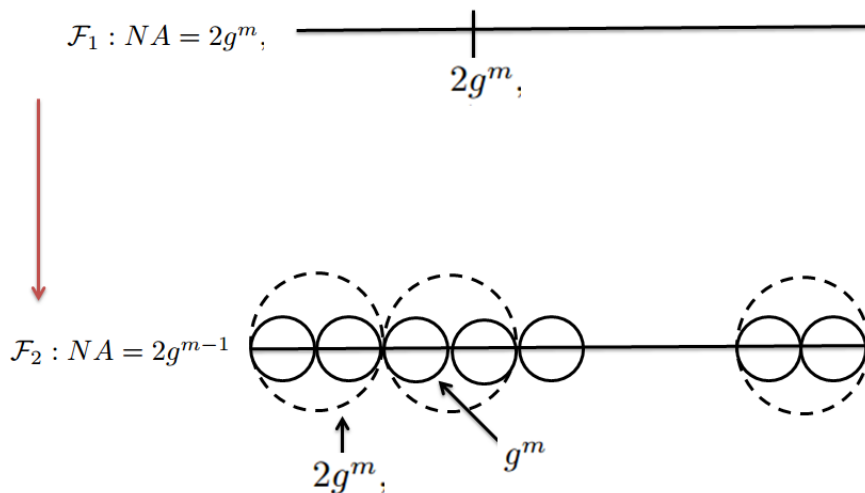


FIGURE 8.6 – Encapsulation.

les nombres-cardinaux entre n_∞ et 2^{n_∞} . Toutefois on remarquera que par un changement du NA , tout grain g_k^m définit un continu. Donc, l'hypothèse reste fausse dans le même grain.

8.6 Méthode d'individuation des réels

Nous allons utiliser la méthode des coupures de Dedekind. Cette théorie nous dit que les réels existent si l'on peut définir une coupure entre deux réels, qui séparent en deux parties l'ensemble des réels. Celles où les nombres seront inférieurs à la coupure A_1 et celles où les nombres seront supérieurs à la coupure A_2 . C'est une construction des réels pour Dedekind.

Si nous considérons la droite Δ de $NA = g^m$. Alors toute coupure de Δ pose un problème. La coupure intercepte Δ en un grain réel. Donc on peut dire à quelle partie A_1 où A_2 appartient ce réel (page : 84 : figure 8.7). Pour résoudre ce problème, nous passons

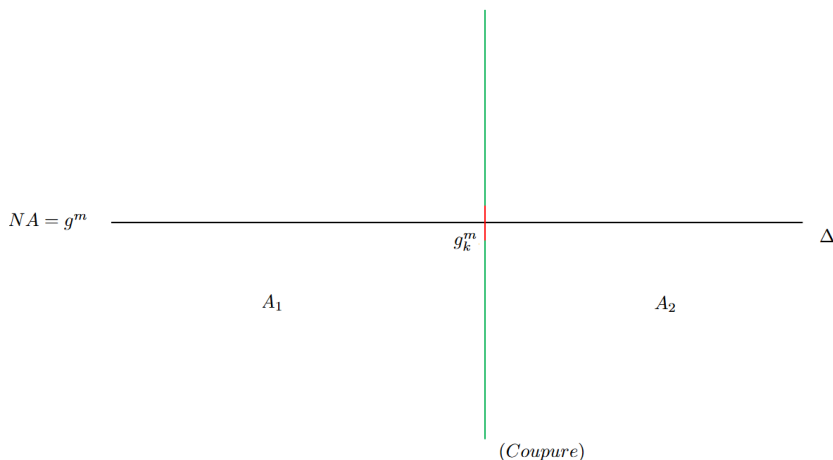


FIGURE 8.7 – Coupure de Dedekind. Cas 1.

au $NA = g^{m-1}$. La coupure se fait en un point de jonction entre deux grains adjacents, ou sur un grain. Donc, on ne peut réaliser une coupure correcte dans le sens de Dedekind (page : 85 : figure 8.6). Pour solutionner ce problème, nous passons tous les grains de jonction en des grains $2^{n_\infty} g^{m-2}$, qui est un continu. Alors effectivement, la coupure du cas 3, s'établit entre deux réels adjacents et sépare en deux parties A_1 et A_2 l'ensemble des réels (page : 86 : figure 8.6). Toutefois, on remarque que nous pouvons généraliser

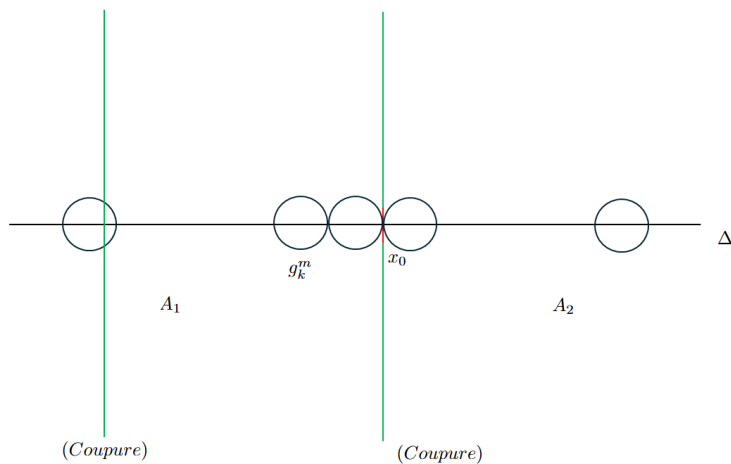


FIGURE 8.8 – Coupure de Dedekind. Cas 2.

les coupures, entre tous les réels adjacents. Au-delà de la création des réels, que nous avons déjà construit à partir de la droite réelle, nous voyons que les coupures de Dedekind sont une preuve d'indivision des réels (page : 87 : figure 8.6).

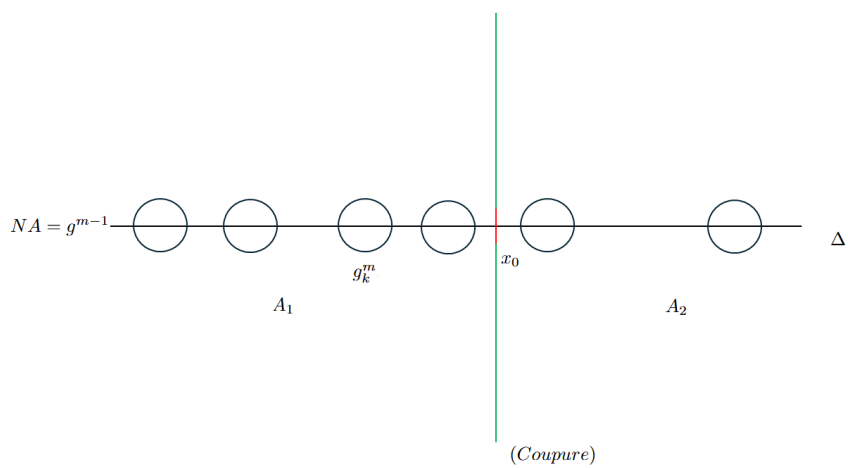


FIGURE 8.9 – Coupure de Dedekind. Cas 3.

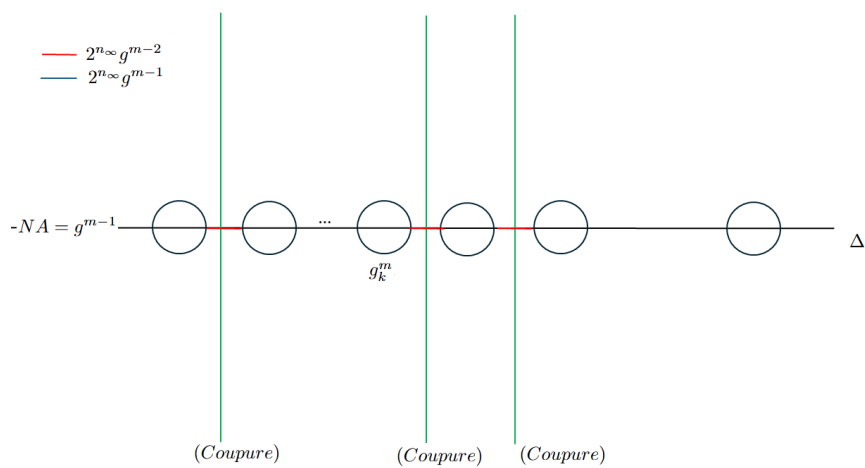


FIGURE 8.10 – Coupure de Dedekind. Cas 4.

Chapitre 9

Construction des nombres transfinis

C'est Cantor qui introduisit les nombres transfinis en 1883. Il nomma $\aleph_0$ le cardinal des entiers naturels et $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$, la puissance du continu. Nous avons vu qu'il existait tous les nombres cardinaux entre $\aleph_0$ et $\aleph_1$. Soit la convention cantorienne devait être révisée. Nous avons noté $n_\infty = \aleph_0$ et $\aleph_1 = 2^{\aleph_0} = 2^{n_\infty}$.

La construction de la théorie des ensembles nous a fait reconsidérer l'hypothèse du continu qui est fausse (1° problème de Hilbert en 1900). Soit nous avons interpolé des nombres d'un genre nouveau entre les grains de n_∞ et 2^{n_∞} . Il existe en particulier les nombres entiers transfinis : $\mathbb{T} = \{n_\infty, n_\infty + 1, n_\infty + 2, \dots, 2^{n_\infty}\}$.

On remarquera qu'on peut étendre les entiers transfinis dans une logique de grands cardinaux. Il suffit pour cela de s'appuyer sur une quantité d'information de Reny $\mathcal{I}$ supérieure à $\mathcal{I}_0 = n_\infty$. Avec

par exemple :

- $\mathcal{I}_1 = 2n_\infty$, qui permet de composer 2^{2n_∞} nombres transfinis.
- $\mathcal{I}_2 = 2^{n_\infty}$, qui permet de composer $2^{2^{n_\infty}}$ nombres transfinis.
- ...

Pour les nombres réels transfinis $\mathbb{T}_\mathbb{R}$, on adjoint à tous les nombres transfinis entiers de $\mathbb{T}$, une partie décimale réelle. Soit on construit les nombres suivants : $\mathbb{T}_\mathbb{R} = \{n_\infty, 00 \dots 0; \dots; 2^{n_\infty}, 11 \dots 1\}$.

Chapitre 10

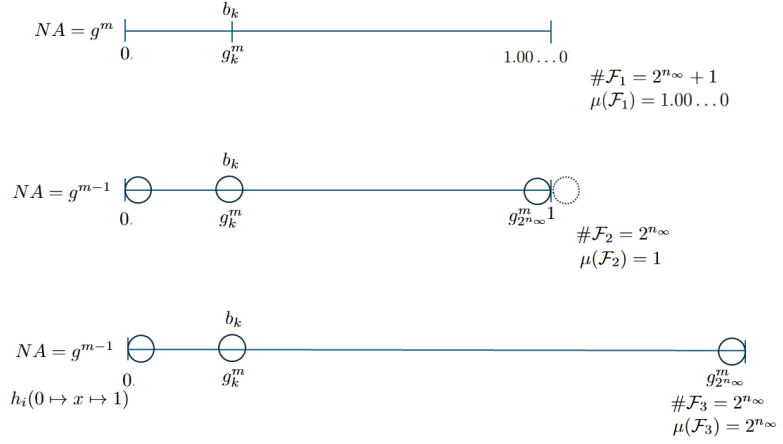
Infinis en acte

On a montré par l'expérience de la chute libre que le cardinal des nombres entiers était de 2^{n_∞} . Cependant nous en tirons une autre conclusion : les nombres entiers et réels appartiennent à la nature. En nous appuyons sur la quantité d'information de Reny $\mathcal{I} = \frac{\ln N}{\ln 2}$ telle que $\mathcal{I} \geq n_\infty$ (où N est le nombre d'individus-grain de la trajectoire de la chute libre), on s'autorise à concevoir l'ensemble des nombres $\mathbb{N}$, $\mathbb{T}$, et $\mathbb{T}_{\mathbb{R}}$.

Nous nous proposons de montrer par une théorie déductive que $\mathbb{N}$, $\mathbb{T}$, et $\mathbb{T}_{\mathbb{R}}$ sont tous des infinis actuels (page : 92 : figure 10.1).

Soit l'homothétie interne $h_i : 0 \mapsto x$ où $x \in \mathbb{R}$, qui s'applique sur g_k^m . Elle est accompagnée d'un changement de NA de $g^m \mapsto g^{m-1}$.

Remarquons tout d'abord que $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_1 \setminus g_{2^{n_\infty}+1}^m$. On a $2^{n_\infty}x = 2^{n_\infty} \Leftrightarrow x = 1$ (on renormalise l'unité). Donc, la h_i se ramène à une $h_i : 0 \mapsto 1$. Donc le diamètre des cercles g_k^m dans la forme 2 devient unitaire. Ils constituent l'épaisseur des nombres et des grains. La

FIGURE 10.1 – $\mathcal{F}$. Transformations des formes

mesure de longueur de la forme vaut 2^{n_∞} .

Considérons la forme $\mathcal{F}_1$, c'est un segment unitaire qui est un fermé, décrivant un intervalle fini. On peut parcourir tous les points du chemin reliant 0 à 1. Donc, $\mathbb{N} \cup \mathbb{T}_{\mathbb{N}}$ forme un tout actuel. Á fortiori $\mathbb{N}$ forme un tout actuel.

On remarque que sous la forme $\mathcal{F}_2 : \mathbb{R} \cup \mathbb{T}_{\mathbb{R}}$ forme aussi un tout actuel.

Chapitre 11

Construction des nombres complexes

11.1 La construction

11.1.1 Relation de mise en correspondance de Hamilton entre $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$

Hamilton définit en 1826 une théorie des couples qu'il présenta devant l'académie royale d'Irlande en 1833, et qu'il publia en 1835 sous le titre de « *Theory of conjugate functions or Algebric couples* ». C'est dans la seconde partie intitulée *On the powering of a Number-couple by a single whole number* qu'il définit la relation de mise en correspondance que nous reprenons sous le terme de relation de Hamilton. Sachant que nous allons travailler en termes de couples de points qui détermineront des vecteurs et des nombres, on se permet de stipuler l'écriture : $\mathbf{e}_1 = (\mathbf{1}, \mathbf{0})$, $\mathbf{e}_2 = (\mathbf{0}, \mathbf{1})$ sont des alias des vecteurs unitaires du plan cartésien lorsque les couples

sont écrits en caractère gras. Les couples de nombres seront représentés en caractères ordinaires : $(1, 0)$, $(0, 1)$.

Soient deux opérations associées à des relations de mises en correspondances dans $\mathbb{R}^2$ pour tout couple $z = (x, y)$ et $z' = (x', y')$, la première est l'opération de multiplication, la seconde une opération d'addition.

$$\begin{cases} z.z' &= (x.x' - y.y', x.y' + x'.y) = z'.z, \\ z + z' &= (x + x', y + y') = z' + z. \end{cases}$$

Dans sa formulation, Hamilton mit en relation des couples de points, néanmoins on s'interrogera sur la nature des entités qu'il forme : des nombres ou des vecteurs. Même si ces nombres possèdent deux dimensions, il était dans l'intention première d'Hamilton d'aboutir à des nombres.

On formera alors deux ensembles de nature différente : à partir de l'ensemble des vecteurs de F on définit l'ensemble des nombres K_F (qui seront des couples de réels), c'est une autre représentation d'un élément de F . Les vecteurs de E et F s'exprimeront dans la base orthonormale qu'on nommera $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, qui se scindera en deux bases $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ et $\mathcal{B}' = (\mathbf{1}, \imath)$. Nous nous proposons de montrer que si l'on juge initialement $t_H(E)$ à l'égal d'un sous-espace vectoriel de E qui coïncidera avec l'ensemble E , F sera plus puissant en termes de dimension de telle sorte qu'on en fera un espace vectoriel autonome.

On a rappelle qu'on se garde la possibilité de déterminer les points d'un graphe fonctionnel en fonction des coordonnées polaires, pour un point quelconque M du plan cartésien tel que $\theta = \widehat{\mathbf{OM}, \mathbf{e}_1}$ par :

$$\begin{cases} x_M &= \rho \cos \theta \\ y_M &= \rho \sin \theta. \end{cases}$$

11.1.2 Quelques calculs élémentaires et identités dans F

Tout élément de $F = t_H(E)$ est un élément de E on travaille dans l'ensemble F puisque $\cdot$ et $+$ sont des opérations internes à E et que nous sommes partis de E .

On a bien entendu :

$$\begin{cases} (1, 0) \cdot (0, 1) &= (0, 1) \\ (0, 1) \cdot (1, 0) &= (0, 1) \\ (1, 0) \cdot (1, 0) &= (1, 0)^2 = (1, 0) \\ (0, 1) \cdot (0, 1) &= (0, 1)^2 = -(1, 0). \end{cases}$$

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 :$

$$\begin{cases} (x, 0) \cdot (1, 0) &= x \cdot (1, 0) = (x, 0) \\ (0, x) \cdot (1, 0) &= (0, x). \end{cases}$$

Nous trouvons aussi les identités remarquables :

$$\begin{cases} (x, y)^2 &= (x^2 - y^2) \cdot (1, 0) + 2xy \cdot (0, 1) \\ (x, y) \cdot (x, -y) &= (x^2 + y^2, 0) = (x^2 + y^2) \cdot (1, 0) \\ (x, y)^3 &= (x^3 - xy^2 - 2y^2x) \cdot (1, 0) - (y^3 - yx^2) \cdot (0, 1) \\ &= (x^3 - 3xy^2)(1, 0) - (y^3 - 3x^2y) \cdot (0, 1). \end{cases}$$

11.2 Création d'un espace vectoriel F opérant sur un ensemble de nombres K_F

Les opérations d'addition et de multiplication définissent des lois de composition internes sur F . Pour cette section on se donne $z = (x, y)$, $z' = (x', y')$ et $z'' = (x'', y'')$.

11.2.1 Deux structures de groupes commutatifs

Nous devons montrer que F muni de la loi de composition interne $+$ est associative, qu'elle possède un élément neutre et soit telle que pour chaque élément il existe un inverse. La commutativité de la loi de composition interne stipulera la nature abélienne du groupe.

Un groupe abélien noté $(F, +)$

(F) muni de l'addition définit le groupe abélien noté $(F, +)$. Il est trivial de remarquer qu'on a une loi de composition interne associative, tout autant qu'il existe un l'élément neutre noté $e_+ = (0, 0)$. On détermine aussi de manière évidente l'existence d'un inverse pour tout couple élément z qu'on notera $-z = (-x, -y)$. Comme l'addition est commutative dans $\mathbb{R}$, elle l'est aussi pour $(F, +)$.

Un groupe abélien noté $(F, \cdot)$

Soit (F) muni de la multiplication, elle définit une loi de composition interne sur $(F, \cdot)$, telle que $z.z' = (xx' - yy', xy' + x'y)$.

11.2. CRÉATION D'UN ESPACE VECTORIEL F OPÉRANT SUR UN ENSEMBLE

L'Associativité, nous avons :

$$\begin{aligned}
 z.(z'.z'') &= z.[(x', y').(x'', y'')] \\
 &= z.(x'x'' - y'y'', x'y'' + x''y') \\
 &= (x, y).(x'x'' - y'y'', x'y'' + x''y') \\
 &= (xx'x'' - xy'y'' - yx'y'' - yx''y', xx'y'' + xx''y' + yx'x'' - yy'y'') \\
 &= (xx' - xy', xy' + y'x).(x'', y'') \\
 &= [(x, y).(x', y')].(x'', y'') \\
 &= (z.z').z''.
 \end{aligned}$$

L'opération de multiplication est donc associative dans (F) .

Un Élément neutre : Comme $(x, y).(1, 0) = (x, y)$ et qu'il est unique puisque s'il existait deux couples d'éléments neutres : $(1, 0)$ et (a, b) alors on aurait $(x, y).(1 - a, b) = (0, 0) = e_+$, on déduit nécessairement $a = 1, b = 0$ et par conséquent $e_\times = (1, 0)$ est l'unique élément neutre.

L'existence d'un inverse pour tout z noté z^{-1} . Pour la multiplication z^{-1} est l'élément tel que $z.z^{-1} = e_\times$ Pour le calculer, il suffit de résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} xx' - yy' = 1 \\ xy' + x'y = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} yxx' - yyy' = y \\ xy' + x'y = 0. \end{cases}$$

En multipliant les deux membres de l'équation du haut par (y) et en portant l'expression de $x'y$ en fonction de xy' dans le terme de gauche.

$$-(yx)y' - y^2y' = y \Rightarrow -x^2y' - y^2y' = y \Leftrightarrow -y'(x^2 + y^2) = y$$

Ou encore : $y' = \frac{-y}{x^2 + y^2}$.

$$\begin{cases} xx' - yy' = 1 \\ xy' + x'y = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xxx' - xyy' = x \\ xy' + x'y = 0. \end{cases}$$

Par un raisonnement analogue :

$$\Rightarrow x^2x' - xyy' = x \Leftrightarrow x^2x' - y(-x'y) = x$$

Ou encore : $x' = \frac{x}{x^2 + y^2}$.

La commutativité est assurée par la commutativité des éléments réels à l'intérieur du couple, on affirme que $(F, .)$ est un groupe abélien.

11.2.2 Une structure d'anneaux

Étant donné que nous avons montré que les groupes $(F, +)$ et $(F, \times)$ étaient associatifs et abéliens, il nous reste à vérifier que la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition à droite et à gauche. Parce que nous nous trouvons avec des structures abéliennes, on se contente de la prouver à gauche.

11.2. CRÉATION D'UN ESPACE VECTORIEL F OPÉRANT SUR UN ENSEMBLE

$(F, +, \cdot)$ définit un anneau

On a :

$$\begin{aligned} z.(z' + z'') &= z.(x' + x'', y' + y'') = (x, y).(x' + x, y' + y'') \\ &= [x.(x'' + x'') - y.(y' + y''), x(y' + y'') + (x' + x'').y] \\ &= [xx' + xx'' - yy' - yy'', xy' + xy'' + yx' + yx''] \\ &= [(xx' - yy') + (xx'' - yy''), (xy' + x'y) + (xy'' + x''y)] \\ &= (xx' - yy', xy' + x'y) + (xx'' - yy'', xy'' + x''y) \\ &= z.z' + z.z''. \end{aligned}$$

On a donc montré que la multiplication était distributive par rapport à l'addition dans K_F , sachant que les éléments unitaires des opérations $e_+ = (0, 0)$ et $e_\times = (1, 0)$ sont distincts, étant donné que chaque élément y est inversible puisque l'ensemble natif muni des deux opérations est un groupe, alors $(F, +, \cdot)$ définit un anneau qu'on nomme F .

Étant donné que tout élément de (F) non nul (soit différent de $e_+ = (0, 0)$) y est inversible pour la multiplication, on affirme que $(F, +, \cdot)$ possède une structure corporelle, nous noterons K_F ce corps.

11.2.3 L'anneau F définit une structure d'espace vectoriel

Structure modulaire

Nous voulons montrer que F est un K_F -module, d'après la définition d'un module on retient alors de F l'opération d'addition

comme loi interne, et on tient compte de l'opération de multiplication de K_F pour construire une fonction définie sur le domaine de F , $E : (k \in K_F, z \in F) \mapsto \alpha.x \in F$. Toutes les propriétés nécessaires pour satisfaire les propriétés modulaires (à droite et à gauche) ont été vérifiées, soit on déclare que F est un K_F module.

L'espace vectoriel (F)

Étant donné que K_F a une structure de corps, on affirme par la définition d'un espace vectoriel que F est un espace vectoriel opérant sur K_F .

Base de l'espace vectoriel F Par l'utilisation de l'espace vectoriel Euclidien de dimension 2, on sait que pour tout vecteur z nous avons $z = x.(1, 0) + y.(0, 1)$, mais comme z se trouve être un élément de F , nous écrivons :

$$\begin{aligned} z &= -x.(0, 1)^2 + y.(0, 1) \\ &= [-x(0, 1) + y].(0, 1). \end{aligned}$$

En clair tout vecteur de l'espace vectoriel F est généré par $(0, 1)$, autrement dit l'unique $(0, 1)$ génère F .

D'autre part si $\forall z \in F$:

$$\begin{aligned} z &= (x, y).(0, 1) = (0, 0) = 0 \\ \Leftrightarrow (-y, x).(1, 0) &= 0. \end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0. \end{cases}$$

11.2. CRÉATION D'UN ESPACE VECTORIEL F OPÉRANT SUR UN ENSEMBLE

$\mathcal{B}' = (\mathbf{0}, \mathbf{1})$ est une famille libre et génératrice pour F , c'est donc une base vectorielle de F . Comme cette base ne contient qu'un seul vecteur, elle forme la plus petite base sur F qui est de dimension une.

Passage des éléments de l'espace F à E dans un repère cartésien Nous avons $\forall \mathbf{z} = (x, y) \in F$:

$$(x, y).(\mathbf{0}, \mathbf{1}) = (-\mathbf{y}, \mathbf{x}) = (-\mathbf{y}, \mathbf{0}) + (\mathbf{0}, \mathbf{x}) = -y.(\mathbf{1}, \mathbf{0}) + x.(\mathbf{0}, \mathbf{1}).$$

On peut être frappé par l'inversion des coordonnées et l'opposition pour la valeur en y . Explicitons cela par un passage aux coordonnées polaires dans E et inversement.

On rappelle que les vecteurs de F s'expriment dans la base $\mathcal{B}'$ tandis que les vecteurs de E s'expriment dans la base orthonormale $\mathcal{B}$.

Passage des éléments de l'espace F à E dans un repère polaire. En reprenant les notations déjà utilisées plus haut : $x = \rho \cos \theta$ et $y = \rho \sin \theta$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta).(\mathbf{0}, \mathbf{1}) &= \rho(-\sin \theta, \cos \theta) \\&= \rho\left[\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right] \\&= \rho\left[\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right), 0\right].(\mathbf{1}, \mathbf{0}) + \rho\left[\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right), 0\right].(\mathbf{0}, \mathbf{1}).\end{aligned}$$

qui est un vecteur de E . Par un raisonnement identique, nous tirons d'un vecteur polaire dans E :

$$\rho \cos \theta.(\mathbf{1}, \mathbf{0}) + \rho \sin \theta.(\mathbf{0}, \mathbf{1}) = \rho\left(\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right).(\mathbf{0}, \mathbf{1}).$$

Nous interprétons le passage de la base Euclidienne E à la base de F pour des repères partageant la même origine comme une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$, et le passage inverse comme une rotation d'angle $+\frac{\pi}{2}$.

Passage des éléments de F à ceux de K_F notés z . Poursuivons notre approche par les coordonnées polaires. Comme on sait que tout élément vectoriel de l'espace vectoriel F est aussi un élément de l'espace vectoriel E , explicitons une fonction qui permette de passer des coordonnées polaires d'un élément de E aux coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$ de F .

Pour cela considérons $z(\theta) = \rho \cos \theta \cdot (\mathbf{1}, \mathbf{0}) + \rho \sin \theta \cdot (\mathbf{0}, \mathbf{1})$. Par l'identité remarquable $(x, y)^2 = (x^2 - y^2)(1, 0) + 2xy(0, 1)$, on prend $\rho = 1$ nous trouvons :

$$\begin{aligned} z^2(\theta) &= (x, y)^2 = [\cos^2 \theta - \sin^2 \theta] \cdot (\mathbf{1}, \mathbf{0}) + (2 \cos \theta \sin \theta) \cdot (\mathbf{0}, \mathbf{1}) \\ &= [\cos(2\theta) \cdot (\mathbf{1}, \mathbf{0}) + \sin(2\theta) \cdot (\mathbf{0}, \mathbf{1})] \\ (z)^2 &= \cos(2\theta) \cdot (\mathbf{1}, \mathbf{0}) + \sin(2\theta) \cdot (\mathbf{0}, \mathbf{1}) \\ (z)^2 &= z(2\theta). \end{aligned}$$

Construction de l'exponentielle complexe à partir de l'exponentielle réelle On a $z^2(\theta) = z(2\theta)$ qui représente une équation fonctionnelle dont $e^{\alpha\theta}$ est une solution. Soit $z^2(\theta) = e^{2\alpha\theta}$ et $z(2\theta) = \cos 2\theta \cdot (\mathbf{1}, \mathbf{0}) + \sin 2\theta \cdot (\mathbf{0}, \mathbf{1})$. D'où : $e^{2\alpha\theta} = \cos 2\theta \cdot (\mathbf{1}, \mathbf{0}) + \sin 2\theta \cdot (\mathbf{0}, \mathbf{1})$.

En dérivant les expressions de part et d'autre de l'égalité, par rapport à θ : $\alpha e^{2\alpha\theta} = -\sin 2\theta \cdot (\mathbf{0}, \mathbf{1}) + \cos 2\theta \cdot (\mathbf{0}, \mathbf{1})$. Pour $\theta = 0$, on trouve $\alpha = (0, 1)$. Nous posons $(1, 0) = 1$ et $(0, 1) = i$, ce qui donne $\alpha = i$.

Donc, $\imath e^{2\imath\theta} = -\sin 2\theta + \imath \cos 2\theta$. En posant $\phi = 2\theta$, il vient $\imath e^{\imath\phi} = \imath^2 \sin \phi + \imath \cos \phi$. Soit $e^{\imath\phi} = \cos \phi + \imath \sin \phi$. On déduit alors pour tout ρ réel :

$$\boxed{z = \rho e^{(\phi+2k\pi)(0,1)} = \rho \cos(\phi)(1, 0) + \rho \sin(\phi)(0, 1)}.$$

Où ϕ est l'argument de l'exponentielle complexe, construite à partir d'une exponentielle réelle. À ce stade le lecteur aura sans doute perçu l'enjeu majeur de notre approche, l'abord vectoriel a permis de construire l'ensemble de nombres complexes.

Passage des éléments de E à ceux de K_F . On précise naturellement que par la composition τ_1 du passage d'un vecteur de E à un vecteur de F puis la transformation τ_2 d'un vecteur de F à une quantité numérique de K_F nous pouvons construire la fonction de quantification d'un vecteur de E par $\tau = \tau_2 \circ \tau_1$.

11.3 La construction du plan complexe $\mathbb{C}$

Théorème 13 (Théorème). *Dans le corps des complexes $\mathbb{C}$ tout nombre peut s'écrire sous la forme :*

$$z = \rho \cdot e^{i(\theta+2k\pi)} = \rho \cos(\theta) + \imath \rho \sin(\theta) = a + \imath b.$$

Où ρ est un réel appelé module de z et θ un angle réel exprimé en radian appelé argument de z . On nommera $e^{i\theta}$ l'exponentielle complexe. On doit la première formulation de la deuxième expression à de Moivre. Dans la troisième expression a sera la partie réelle

du nombre complexe aussi notée $\Re(z)$ et b la partie imaginaire notée $\Im(z)$. En particulier pour le cas où $\theta = \pi$, on déduit la formule inventée par Euler en 1748 :

Théorème 14 (Corollaire (Euler)).

$$e^{i\pi} = -1.$$

Si l'espace vectoriel F permettait de travailler sur des éléments du plan euclidien, on va véritablement procéder à une réification du plan de $\mathcal{C}$ qui sera appelé plan complexe ou plan d'Argand-Gauss. Les points associés aux nombres complexes seront dénommés les affixes. Dans ce plan ρ représentera la distance à l'origine de l'affixe de z , elle sera appelée module de z , qu'on notera par $|z|$. À partir de cette notion, à tout nombre complexe on lui associe son nombre complexe dit conjugué est noté z^* tel que $zz^* = |z|^2$. On déduit aussi les fameuses formules d'Euler (1748)¹ pour calculer les sinus et cosinus d'un argument.

$$\begin{cases} \cos \theta &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ \sin \theta &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}. \end{cases}$$

En conséquence, la relation d'Hamilton exprime le passage d'un élément quelconque du plan cartésien (réel) vers ce même élément dans le plan complexe. Ce dernier s'obtenant dans le plan par une rotation de $\frac{\pi}{2}$ du plan réel.

La formule de de Moivre se déduit aisément :

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

1. Si Euler communique ses résultats dans *Introductio in Analysis Infinitorum*, on en retrouve la trace dans un courrier adressé à Jean Bernoulli en 1740.

11.4 Construction de $\imath$

Soit un plan $\mathcal{P}_{\mathbb{R}^2} : (x'Ox) \times (y'Oy)$. On le munit d'une norme unitaire sur $(x'Ox)$, et d'une norme paramétrée par q sur $(y'Oy)$.

Nous allons modéliser la rotation d'origine O et d'angle θ s'appliquant sur $z = \rho$. Son image est $z' = \rho \cos \theta + q\rho \sin \theta$ (page : 145 : figure 22.1).

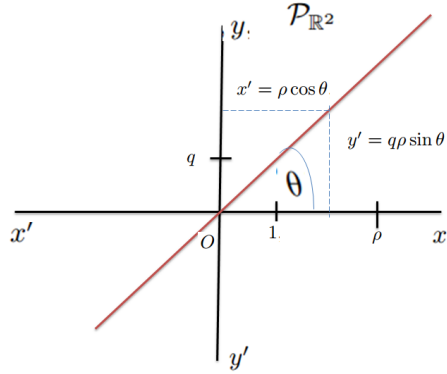


FIGURE 11.1 – Rotation d'angle θ pour $z = \rho$.

Maintenant, on prend le cas général d'une rotation s'appliquant sur $z = \rho \cos \phi + q\rho \sin \phi$. Alors $Rot(O, \theta)[z] = (\cos \theta + q \sin \theta) \times (\rho \cos \phi + q\rho \sin \phi) = z'$. $z' = \rho \cos \theta \cos \phi + \rho \cos \theta \sin \phi q + \rho \cos \phi q \sin \theta + \rho q^2 \sin \theta \sin \phi$. Pour $z = q$, avec $\rho = 1, \theta = \frac{\pi}{2}, \phi = \frac{\pi}{2}$, on obtient $z' = q^2$.

Si nous appliquons un raisonnement géométrique, on a : $Rot(O, \frac{\pi}{2})[q] = -1$. Il s'en suit qu'en posant $i = q$, on a $i^2 = -1$. Nous avons construit i et $\mathcal{P}_{\mathbb{R}^2} \mapsto \mathcal{P}_{\mathbb{C}}$.

Comme nous avons construit $\mathbb{R}$, puis que i est constructible, nous affirmons que $\mathbb{C}$ est constructible. C'est aussi un corps qui est dans une extension simple de $\mathbb{R}$.

Chapitre 12

Du plan réel vers le plan complexe

Soit $\mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}$, muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. On y définit le cercle unitaire C_1 . Soit $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}$, muni d'une base orthogonale $\mathcal{B}' = (\mathbf{e}_1, \imath)$, avec $|\imath| = |\mathbf{e}_1| = 1$. On définit le cercle unitaire complexe U_1 .

On a $Rot(O, \phi)_{U_1} \equiv Rot(O, \phi)_{C_1}$. Car $\cos \phi \mathbf{e}_1 + \sin \phi \imath \equiv \cos \phi \mathbf{e}_1 + \sin \phi \mathbf{e}_2$. En passant aux coordonnées on a l'équivalence $(\cos \phi, \sin \phi)_{U_1} \equiv (\cos \phi, \sin \phi)_{C_1}$.

Dans $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}$, $e^{\imath\theta} \circ e^{\imath\phi} = e^{\imath(\theta+\phi)} = e^{\imath\theta} \times e^{\imath\phi}$. Soit On trouve la formule équivalente dans C_1 :

$$Rot(O, \theta) \circ Rot(O, \phi) = Rot(O, \theta) \times Rot(O, \phi).$$

Alors $Rot(O, \phi)[\mathbf{e}_1] = \cos \phi \mathbf{e}_1 + \sin \phi \mathbf{e}_2 \Rightarrow Rot(O, 2\phi)[\mathbf{e}_1] = Rot(O, \phi) \circ Rot(O, \phi)[\mathbf{e}_1] = (\cos \phi \mathbf{e}_1 + \sin \phi \mathbf{e}_2)^2$.

Pour $\phi = \frac{\pi}{2}$, $Rot(O, \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = e_2^2 = Rot(o, \pi) = -1$.

$$e_2^2 = -1.$$

Théorème 15. *Le plan réel $\mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}$ se ramène à un plan complexe $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}$.*

Chapitre 13

Que le plan complexe est l'expression du zéro

13.1 Construction de mesures

Soient deux droites vectorielles Δ_x, Δ_y , munies de leur base $\mathcal{B}_{\Delta_x} = (\mathbf{0}, \mathbf{1})$ et $\mathcal{B}_{\Delta_y} = (\mathbf{0}, \mathbf{1})$, de telle sorte que leurs graduations soit opposées.

13.1.1 Construction des tribus borélienne

On appelle $\mathcal{T}_{\Delta_x}$ l'ensemble des parties : $T_{\Delta_x, j}^|$ de Δ_x , où $T^|$ signifie une restriction de $\mathcal{T}_{\Delta_x}$ sur $\Delta_x^|$: la demi-droite (Ox) correctement orientée (de la gauche vers la droite). Alors :

- $\emptyset \in \mathcal{T}_{\Delta_x}$.
- La réunion dénombrable de parties de $T_{\Delta_x}^|$: $\cup_{j=1}^{n_\infty} T_{\Delta_x, j}^| \in \mathcal{T}_{\Delta_x}$.

— Le complémentaire de $T_{\Delta_x, j}^| \in \mathcal{T}_{\Delta_x}$.

Donc $\mathcal{T}_{\Delta_x}$ est une tribu borélienne sur la demi-droite $\Delta_x^|$. Par un raisonnement analogue, on montre que $\mathcal{T}_{\Delta_y}$ forme une tribu borélienne sur $\Delta_y^|$ la demi-droite (Oy) correctement orientée (de la droite vers la gauche).

13.1.2 Construction de mesures définies positives

$$\begin{aligned} \mu_{\Delta_x} : \mathcal{T}_{\Delta_x} &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ T_{\Delta_x, j}^| &\mapsto \mu_{\Delta_x}(T_{\Delta_x, j}^|) \end{aligned}$$

Qui vérifie $\mu_{\Delta_x}(\emptyset) = 0$ et $\mu_{\Delta_x}(\cup_{i=1}^{n_\infty} T_{\Delta_x, j}^|) = \sum_{j=1}^{n_\infty} \mu_{\Delta_x}(T_{\Delta_x, j}^|)$. Donc μ_{Δ_x} forme une mesure définie positive sur la tribu borélienne $\mathcal{T}_{\Delta_x}$. Par un raisonnement analogue, on construit une mesure définie positive μ_{Δ_y} sur la tribu borélienne $\mathcal{T}_{\Delta_y}$.

À partir de là, on construit deux mesures définies sur $\mathbb{R} : \mu_{\Delta_x}^*$ et $\mu_{\Delta_y}^*$ qui sont des prolongements de μ_{Δ_x} et μ_{Δ_y} sur $\mathbb{R}^-$. On a $\mu_{\Delta_x}^*(-x) = -\mu_{\Delta_x}(x)$ et $\mu_{\Delta_y}^*(-y) = -\mu_{\Delta_y}(y)$. De telle sorte que $\mu_{\Delta_x}^*(x) = \mu_{\Delta_x}(1, 0)_{\Delta_x} x$ et $\mu_{\Delta_y}^*(y) = \mu_{\Delta_y}(1, 0)_{\Delta_y} y$. On construit une mesure additive $\mu_{\Delta_x+y} = \mu_{\Delta_x}^*(x) + \mu_{\Delta_y}^*(y) = 0$, avec $-x = y$. On peut dire que cette mesure additive est de mesure de longueur nulle en tout point.

13.2 Applications

13.2.1 $\mathcal{P}_{\mathbb{C}} \rightarrow 0$

Nous partons de $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}|z = x + iy$. On applique une rotation du droit à tout y de $\Im$.

$$\begin{aligned} \iota : \mathfrak{S} &\rightarrow \Delta_y \\ y &\mapsto \iota y \end{aligned}$$

On a donc $\mathfrak{R} \times \Delta_y = \Delta_x \times \Delta_y$. On remarque d'une part que les droites Δ_x et Δ_y sont confondues, puis que les graduations de Δ_x et Δ_y sont opposées. Nous construisons les mesures $\mu_{\Delta_x}^*$ et $\mu_{\Delta_y}^*$. On voit que la mesure additive $\mu_{\Delta_x}^* + \mu_{\Delta_y}^* = -x + y = 0$. On a donc $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}$ qui se ramène à zéro.

13.2.2 $0 \rightarrow \mathcal{P}_{\mathbb{C}}$

Nous partons de Δ_{x+y} telle que $\mu_{\Delta_x}^* + \mu_{\Delta_y}^* = -x + y = 0$. Soit nous sommes dans le zéro. On applique l'opérateur de rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Alors, $\forall y \in \Delta_y, r^2(1, 0)_{\Delta_x} = \text{Rot}(O, \pi)[(1, 0)] = -(1, 0)_{\Delta_x} \Leftrightarrow r^2 = -1$. Ou encore $r = r^{-1}(-1, 0)_{\Delta_x} = r^{-1}(1, 0)_{\Delta_y}$.

D'autre part $\text{Rot}(O, -\frac{\pi}{2})[(-1, 0)]_{\Delta_x} = \text{Rot}(O, -\frac{\pi}{2})[(1, 0)]_{\Delta_y} = (0, 1)_{\Delta_{y^\perp}}$.

Par suite, $r = (0, 1)_{\Delta_{y^\perp}}$.

Donc on conclut que 0 se ramène à $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}$.

Théorème 16. $\mathcal{P}_{\mathbb{C}} = 0$.

Chapitre 14

Constante d'Euler-Mascheronni

La fonction inverse On note $\{1, 2, \dots, k, \dots\}$ l'ensemble des entiers. On va constituer une suite de surfaces (A_k) définie par $B = (k-1; \frac{1}{k-1})$, $C = (k; \frac{1}{k-1})$, $D = (k; \frac{1}{k})$, qui est au-dessus de la courbe $x \mapsto \frac{1}{x}$ (page : 114 : figure 14.1).

On appelle $E = (k-1; \frac{1}{k})$ qui permet de définir un rectangle $R_k = (B, C, D, E)$ du quel est extrait A_k . $\sum R_k = \sum_k \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = 1$. Alors la suite extraite A_k , est strictement croissante, positive et majorée par un. Donc $\sum_k A_k$ converge vers une constante γ .

Calcul de γ . On a $A_k = \frac{1}{k-1} - \int_{k-1}^k \frac{1}{x} dx = \frac{1}{k-1} - \ln(k) + \ln(k-1) \Leftrightarrow \sum_k A_k = \sum_{k-1} \frac{1}{k-1} - \ln(n_\infty)$. D'où le théorème :

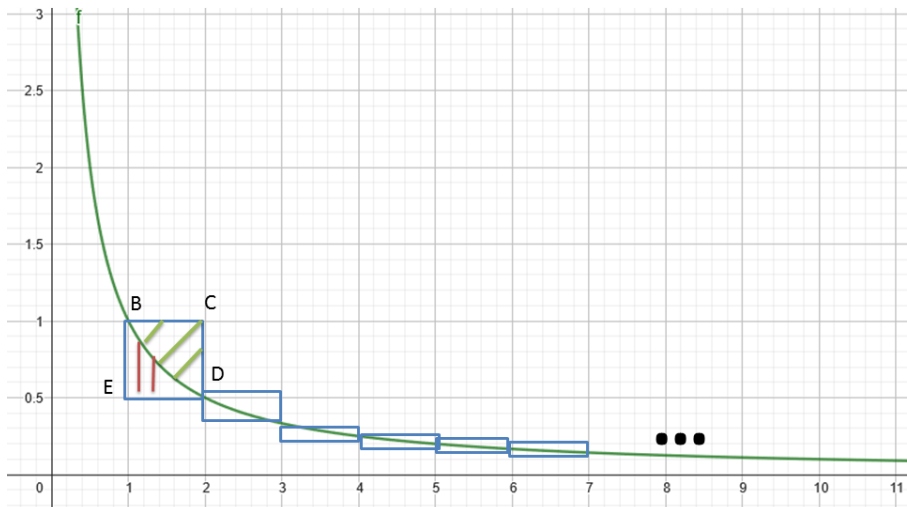


FIGURE 14.1 – Suite harmonique.

Théorème 17. $\sum_{k=1}^{n_\infty} \frac{1}{k} - \ln(n_\infty) = \gamma$.

Chapitre 15

L'exponentielle réelle

Soit $\ln(2^{\frac{1}{\ln 2}}) = 1 \Leftrightarrow \ln^{-1} \circ \ln(2^{\frac{1}{\ln 2}}) = \ln^{-1} 1 \Leftrightarrow 2^{\frac{1}{\ln 2}} = \exp(1)$.

$$\boxed{e = 2^{\frac{1}{\ln 2}}}$$

Chapitre 16

Quadrature du cercle

En 1882, Lindemann démontrait que π est un nombre transcendant. Or en 1837 Wantzel montra qu'un nombre constructible est nécessairement algébrique. Soit, ces travaux clôturaient le problème de la quadrature du cercle en un nombre fini d'étapes avec l'usage des seuls règles et compas.

Ici, nous proposons une méthode pour construire un carré d'aire égale à la surface d'un cercle C_1 donné; en un nombre infini dénombrable d'étapes, à la règle et au compas.

Pour être plus précis, seule la rectification en tant que processus intermédiaire nécessite un nombre infini dénombrable d'étapes. A partir de C_1 rectifié en un segment $[O;P]$, la construction d'un carré d'aire égale à celle de C_1 se réalise en quelques étapes supplémentaires.

Bien entendu, comme on atteint l'objectif en un nombre infini d'étapes, on ne peut pas parler au sens strict de quadrature du cercle telle que certains pourraient l'entendre. Cependant, cette méthode constructive reste intéressante, tout semble se jouer au-

tour de la construction d'un point P . Elle relativise notamment la complexité du problème initial en faisant appel à une construction largement intuitive.

Pour terminer, on apportera une remarque à propos d'une conséquence algébrique.

16.1 Rectification d'un cercle donné

Nous allons mettre en place un processus récursif. Pour cela, on munit le plan d'un repère cartésien R d'origine O .

16.1.1 Principe

On va construire une suite de points $(S_{k,k \in \mathbb{N}^*})$ à partir d'une suite de cercles $(C_{k,k \in \mathbb{N}^*})$ de centres $O_{k,k \in \mathbb{N}^*}$ et de rayons $\rho_{k,k \in \mathbb{N}^*}$ ou $\rho_k = 2^k \rho_0$ avec $\rho_0 \in \mathbb{R}^{+*}$.

Pour cela, on se donne un cercle C_1 de centre O_1 de diamètre $[O; O_2]$. Nous partons de $S_1 = O$. On construit alors le cercle $C_2(O_2, \rho_2)$ à partir du diamètre $[O; O_2]$ de C_1 ; qui constitue ainsi un rayon de C_2 .

Pour déterminer S_2 , on trace la droite $(O_2 S_1)$ qui intercepte C_2 en S_2 et S_1 . On a $\widehat{OO_2 S_2} = \pi$ ($\widehat{OO_2 S_2} = \frac{1}{2} \widehat{OO_1 S_1}$). On peut remarquer que S_2 est confondu avec O_3 .

Pour placer S_3 , on trace la perpendiculaire à (OO_3) en O_3 elle intercepte C_3 en deux points S_3 et S'_3 . S_3 est le point du demi-plan supérieur par rapport à (OO_3) . On a $\widehat{OO_3 S_3} = \frac{\pi}{2}$ ($\widehat{OO_3 S_3} = \frac{1}{2} \widehat{OO_2 S_2}$). Maintenant, on suppose S_k placé sur C_k pour un certain $k \in \mathbb{N}^* - \{1, 2\}$. On construit C_{k+1} à partir du diamètre $[O; O_{k+1}]$ de C_k qui constituera un rayon de C_{k+1} de centre O_{k+1} . Les centres

respectifs des (C_k) : les (O_k) sont donc alignés suivant une même droite support (Δ) .

En traçant $(O_{k+1}S_k)$ (on rappelle que S_k est placé sur C_k), la droite va intercepter C_{k+1} en deux points : S_{k+1} et S'_{k+1} . S_{k+1} est le point du demi-plan supérieur par rapport à (Δ) .

O_{k+1} , S_k et S_{k+1} sont alignés, d'où $\widehat{OO_{k+1}S_k} = \widehat{OO_{k+1}S_{k+1}}$. D'autre part, par théorème, l'angle au centre : $\widehat{OO_kS_k}$ ici, vaut le double de l'angle à l'extrémité du diamètre : $\widehat{OO_{k+1}S_k}$.

Donc, il vient $\widehat{OO_{k+1}S_{k+1}} = \frac{1}{2}\widehat{OO_kS_k}$.

Soit, en réitérant le procédé de construction de S_{k+2} à partir de S_{k+1} , et ainsi de suite (avec les seuls règles et compas) ; on construit une suite de points (S_k) vérifiant : $\widehat{OO_{k+1}S_{k+1}} = \frac{1}{2}\widehat{OO_kS_k}$ et $(O_{k+1}S_k) \cap C_{k+1} = \{S_{k+1}\} \cup \{S'_{k+1}\}$.

16.1.2 Conséquence du mécanisme récursif

Voyons le comportement de S_k lorsque k tend vers l'infini :

$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \widehat{OO_kS_k} = \frac{1}{2}\widehat{OO_{k-1}S_{k-1}}, \widehat{OO_{k-1}S_{k-1}} = \frac{1}{2}\widehat{OO_{k-2}S_{k-2}}, \dots$, et $\widehat{OO_2S_2} = \frac{1}{2}\widehat{OO_1S_1}$.

Soit $\widehat{OO_kS_k} = \frac{1}{2^{k-1}}\widehat{OO_1S_1}$. Comme $\widehat{OO_1S_1} = 2\pi$, il vient $\widehat{OO_kS_k} = \frac{\pi}{2^{k-2}}$.

Par ailleurs le triangle (O, O_k, S_{k-1}) est rectangle en S_{k-1} , donc $\widehat{O_kOS_{k-1}} = \pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2^{k-2}} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2^{k-2}}$. Soit $\lim_{k \rightarrow \infty} \widehat{O_kOS_{k-1}} = \frac{\pi}{2}$. D'autre part, la longueur de l'arc curviligne $(O; S_k)$ vaut $\frac{\pi}{2^{k-2}}\rho_k$. Et comme $\rho_k = 2^k\rho_0$ alors la longueur de l'arc $(O; S_k)$ est constante et vaut $4\pi\rho_0$ ou encore $2\pi\rho_1$.

On peut alors conclure que l'arc curviligne $(O; S_k)$ tend vers un segment $[O; P]$ orthogonal à (Δ) de longueur $2\pi\rho_1$.

Cependant $[O; P]$ qui représente alors la rectification de C_1 , peut

également être considéré comme une partie du cercle à l'infini de longueur $2\pi\rho_1$. Ce cercle à l'infini est déterminé par son centre fictif O_∞ , son rayon ρ_∞ . On le conçoit suivant la perspective du rayon $[O_\infty; O]$; alors on peut se le représenter par la tangente en O à C_k . La gerbe d'arcs de cercle $(O; S_k)$ forme ainsi une totalité achevée. Si bien qu'on peut dire que $(O; S_k)$ atteint sa valeur limite lorsque k tend vers l'infini. On montre ainsi qu'on peut effectivement obtenir la rectification en une infinité d'étapes en bijection avec $\mathbb{N}$ en utilisant les seuls règle et compas.

16.2 Le cercle à l'infini

16.2.1 Le cercle à l'infini

On a $C_{n_\infty}(O_{n_\infty}, \rho_{n_\infty} = 2^{n_\infty-1}\rho_0)$. Le diamètre de C_{n_∞} vaut $\rho_{n_\infty} = 2^{n_\infty}\rho_0$. Soit la circonférence vaut $2^{n_\infty}\pi\rho_0$. D'où $C_{n_\infty} = C_\infty$.

16.2.2 $C_\infty = \Delta_\perp = (OP)$

Si l'on reprend la suite de cercles (C_k) . On appelle $(\Delta_\perp)$ la droite tangente au faisceau de cercles C_k . Nous avons montré qu'on pouvait rectifier C_1 . Pour cela, on s'est appuyé sur le résultat que $\mathbb{N}$ était un infini actuel. Ceci signifie que la suite de points (S_k) qui converge dans l'infini potentiel vers $[O; P]$, définit une suite de points qui s'achève en P , dans le cadre de l'infini actuel.

Mais que représente la rectification de $C_1 : \Delta_\perp$? C'est une partie du cercle à l'infini C_∞ , qui se superpose avec $\Delta_\perp$. On remarquera que la rectification s'établit de manière symétrique $[O; P]$ par rapport à O , sur $[O; P']$. On montre donc que les demi-cercles se rectifient à

l'infini, sur (O, y) pour la partie supérieure et (O, y') pour la partie inférieure.

Pour le point diamétralement opposé à O , sur C_∞ , on ne peut l'affecter à aucun des deux demi-droites à l'infini. On procède à une chirurgie sur C_∞ , on enlève le point O' . On construit un cercle à l'infini non standard $C_{\infty, NS}$. Pour tout voisinage du demi cercle supérieur, centré sur sa borne supérieure, il rencontre des points du demi-cercle inférieur. Réciproquement, pour tout voisinage du demi cercle inférieur, centré sur sa borne inférieure, il rencontre des points du demi-cercle supérieur. On peut donc dire que le cercle $C_{\infty, NS} \equiv C_\infty$. On a $C_{\infty, NS} = \Delta$.

Théorème 18. *Le cercle à l'infini $C_\infty \equiv \Delta_\perp$. Autrement dit, le cercle à l'infini est équivalent à la droite Δ .*

16.3 La quadrature

Une fois $[O; P]$ construit, on peut déterminer un carré dont la surface vaut celle du cercle C_1 en quelques étapes.

1° On trace le cercle C'_1 de centre O et de rayon $[O; P]$. Il intercepte (OO_1) en 2 points. On appelle M le point tel que $O \in [O_1; M]$.

2° On détermine N le milieu de $[O_1; M]$ en traçant la médiatrice de $[O_1; M] : (\Delta')$. La médiatrice d'un segment pouvant bien évidemment être tracée avec les seuls compas et règle.

3° On trace le cercle C'_2 de centre N , de rayon $[N; M]$. Le cercle intercepte $[O; P]$ en C et D . On appelle C le point appartenant à $[O; P]$. Le triangle (O_1, C, M) est inscrit dans le cercle C'_2 de diamètre $[O_1; M]$; donc ce triangle est rectangle en C .

On peut aussi remarquer que $(OC) \perp (MO_1)$, donc les triangles (O_1, O, C) et (N, O, C) sont rectangles en O . $[C; O]$ définit la hauteur du triangle issue de C relativement à la base $[O_1; M]$, du triangle (O_1, C, M) .

Par le théorème de Pythagore, il est vérifié $OC^2 = OO_1 \cdot OM$. Or $OM = OP = 2\pi\rho_1$, soit $OC = \sqrt{\rho_1^2 2\pi} = \sqrt{2\pi}\rho_1$.

4° On dresse la perpendiculaire à (OC) en C qu'on note (Δ'') ; déterminable avec les seuls règle et compas. On y place H tel que $CH = CO$ en rapportant la grandeur à l'aide du compas. On construit alors le triangle (O, C, H) qui est rectangle isocèle en C .

5° Soit E le milieu de $[O; H]$ qu'on détermine en traçant la médiatrice (Δ''') de $[O; H]$. Il est vérifié $\widehat{EOC} = \frac{\pi}{4}$, alors $OE = \frac{1}{2}OH$, avec $OH = \frac{OC}{\cos \frac{\pi}{4}}$ soit $OE = \sqrt{\pi}\rho_1$.

6° On détermine la réflexion de E par rapport à (Δ) qu'on note G . La réflexion est une symétrie orthogonale d'axe (Δ) , par définition (Δ) sera la médiatrice de $[E; G]$. On construit le point F par l'intersection du cercle de centre E de rayon $[E; O]$. On peut donc construire le point image de E , par l'intersection de deux arcs de cercles de rayon $[O; E]$ qui posséderont comme point d'intersection : G , ce qui implique $FG = OG = OE$.

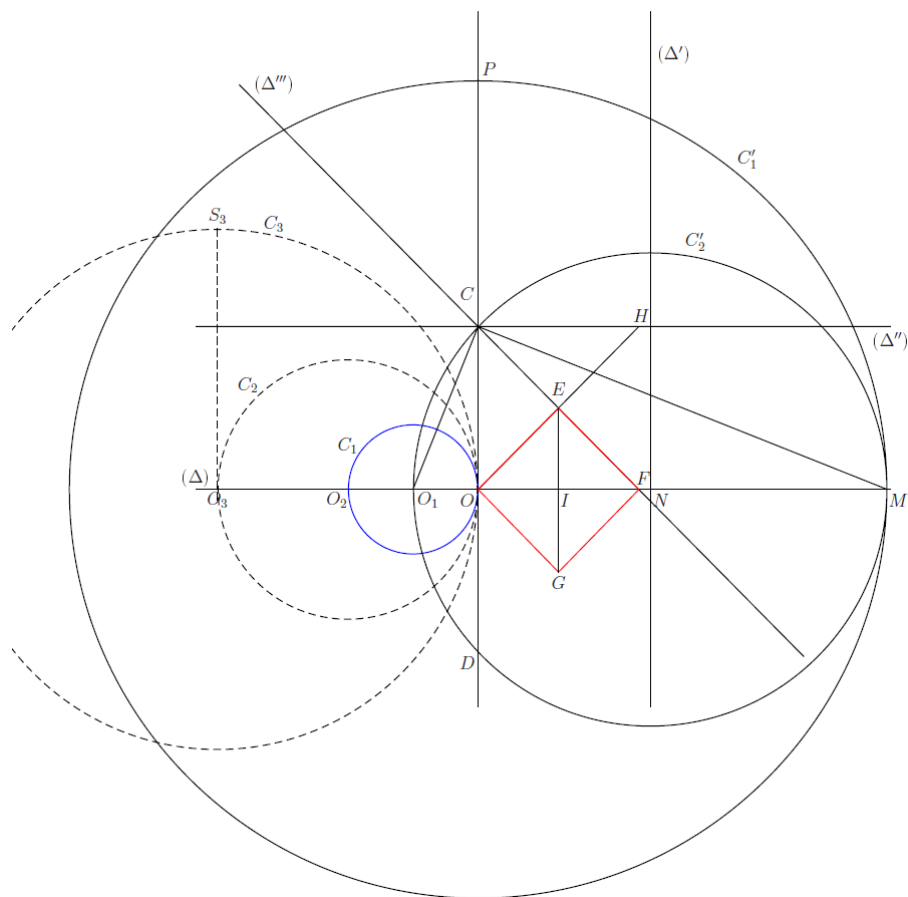
On a alors $(EG) \perp (\Delta)$, posons $(EG) \cap (\Delta) = I$, I est par définition de la réflexion le milieu de $[E; G]$.

Sachant que $(EG) \perp (\Delta)$ et $(OC) \perp (\Delta)$, alors (EG) est parallèle à (OC) ce qui implique $\widehat{EOC} = \widehat{OEG} = \frac{\pi}{4}$. Or (O, E, G) est isocèle en O , soit $\widehat{OEG} = \widehat{EGO} = \frac{\pi}{4}$ ce qui entraîne $\widehat{EOG} = \frac{\pi}{2}$.

7° Par définition de la réflexion on a $I = (OF) \cap (EG)$ milieu de $[O; F]$. Donc les diagonales du quadrilatère non croisé (O, E, F, G) se coupent en leur milieu, soit (O, E, F, G) est un parallélogramme. Enfin (EG) étant la médiatrice de $[O; F]$ on obtient $EO = EF$. Grâce aux résultats précédents on en déduit que $OE = EF = FG = GO$ ou encore le parallélogramme (O, E, F, G) forme un losange.

Comme l'un des angles du parallélogramme (O, E, F, G) est droit ($\widehat{EOG} = \frac{\pi}{2}$) alors (O, E, F, G) constitue un rectangle, soit on conclut que (O, E, F, G) est un carré de côté $\sqrt{\pi}\rho_1$. Alors l'aire du carré (O, E, F, G) vaut bien $\pi\rho_1^2$ qui est l'aire de C_1 .

8° La quadrature est alors réalisée à la règle et au compas en un nombre infini dénombrable d'étapes. On peut également remarquer que d'un point de vue géométrique, réaliser la quadrature est équivalent à rectifier le cercle.



Chapitre 17

Formules

17.1 Définitions

Définition 11 (Chaîne formelle). *Forme linguistique exposée dans un langage formel.*

Définition 12 (Formule). *Une formule Fr est l'expression la plus générale d'une relation de correspondance, entre une chaîne formelle, et un ou plusieurs arguments, qui retournera une ou des valeurs.*

Soit $Fr(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_m)$. Fr une formule booléenne, avec pour argument n_∞ ou 2^{n_∞} . On désigne par $Fr^\downarrow$ une restriction de la formule, et par $Fr^\star$, un prolongement de la formule. Les expressions $x \mapsto n_\infty$ et $x \mapsto 2^{n_\infty}$ expriment respectivement que x tend vers 2^{n_∞} et x tend vers n_∞ .

17.2 De l'infini potentiel vers l'infini actuel

$$\begin{cases} \text{Si } Fr(x \mapsto 2^{n_\infty}) = F, \text{ alors } Fr^*(x = 2^{n_\infty}) = F \\ \text{Si } Fr(x \mapsto n_\infty) = F, \text{ alors } Fr^*(x = n_\infty) = F \end{cases}$$

Théorème 19. *Si une formule est fausse dans l'infini potentiel, alors elle est fausse dans l'infini actuel*

Soit $(u_n)_{n \rightarrow \infty}$ une suite divergente. Alors, il n'existe pas $\ell \in \mathbb{R}$, telle que $u_{n_\infty} = \ell$, où n_∞ désigne un prolongement de $(u_n)_{n \rightarrow \infty}$.

17.3 De l'infini actuel vers l'infini potentiel

$$\begin{cases} \text{Si } Fr(x = 2^{n_\infty}) = V, \text{ alors } Fr^l(x \mapsto 2^{n_\infty}) = V \\ \text{Si } Fr(x = n_\infty) = V, \text{ alors } Fr^l(x \mapsto n_\infty) = V \end{cases}$$

Démonstration : Soit $Fr^l(x \mapsto 2^{n_\infty}) = F \Rightarrow Fr^{l*}(x = 2^{n_\infty}) = F$.

Théorème 20. *Une formule vraie dans l'infini actuel, est vraie dans l'infini potentiel.*

Soit $[0, n_\infty]$ un intervalle fermé, qui forme un tout actuel. Alors on peut considérer par le théorème précédent que $[0; n_\infty[$ définit un infini potentiel.

Considérons $Fr(C_{\infty, NS} = \Delta_{\perp})$. Alors, par le théorème, dans l'infini potentiel $Fr(C_{\infty, NS} \mapsto \Delta_{\perp}) = V$.

Soit une suite $(u_n)_{n \leq n_{\infty}}$, telle que $Fr(u_n \mapsto \ell) = V$, alors par le théorème $Fr(u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell) = V$.

Chapitre 18

Arrangements et combinaisons

18.1 Arrangements

Définition 13 (Arrangement). *Soit un ensemble E_n donné, possédant n éléments indexés. On appelle arrangement de l'ensemble E_n , une permutation quelconque dans E_n , on la note $A(E_n)$.*

(page : 130 : figure 18.1) Alors le nombre d'arrangements de E_n correspond au nombre de permutations de E_n qui vaut $n!$ (page : 130 : figure 18.2). On définit $\widehat{E_k}$ et $\widehat{E_{n-k}}$, les classes d'équivalence de $\cup_i E_k^i$ et $\cup_j E_{n-k}^j$. Ils sont ordonnés comme indiqué dans la figure 2. En rouge, on représente les éléments de E_k , et en bleu les éléments de E_{n-k} . Soient $\overline{E_k}$ un représentant de $\widehat{E_k}$, et $\overline{E_{n-k}}$ un représentant de $\widehat{E_{n-k}}$.

On appelle arrangement intra-classe $A'(\overline{E_{n-k}})$ si l'on a une permu-

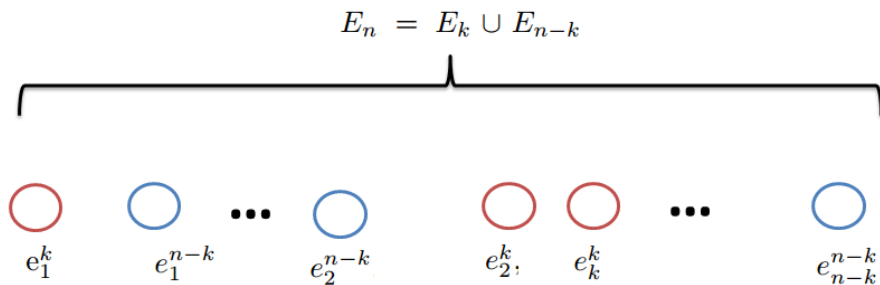
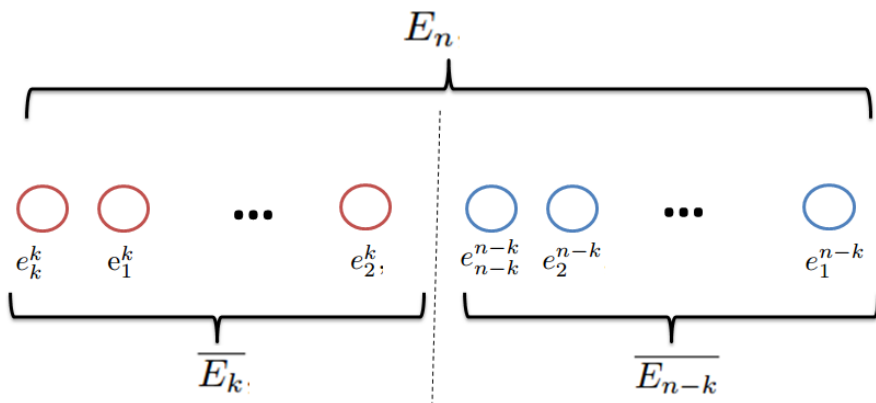
FIGURE 18.1 – $E_n = E_k \cup E$.

FIGURE 18.2 – Arrangement intra-classe.

tation des éléments dans $\overline{E_{n-k}}$. Le nombre d'arrangements intra-classe de $\overline{E_{n-k}}$ vaut $\#A'(\overline{E_{n-k}}) = (n-k)!$ (page : 131 : figure 18.3). Si l'arrangement n'est pas intra-classe, il est inter-classe. On le note $A''(\overline{E_{n-k}})$.

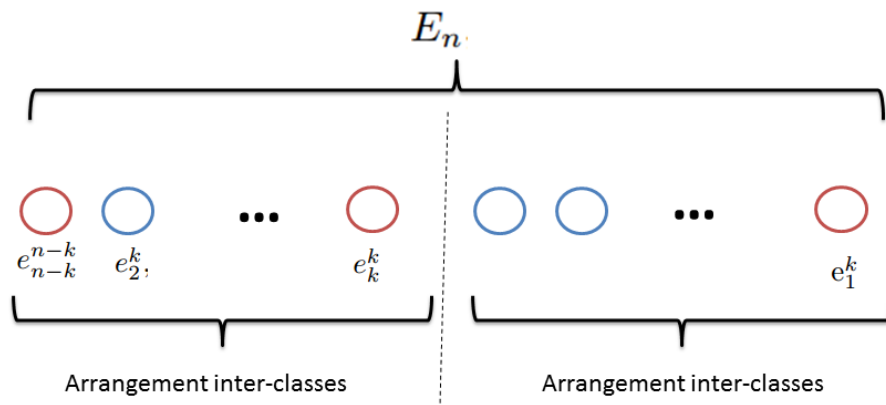


FIGURE 18.3 – Arrangement inter-classe.

Les arrangements inter-classes de $\overline{E_{n-k}}$ correspondent à des arrangements inter-classes de $\overline{E_k}$.

On déduit le nombre d'arrangements intra-classe et inter-classe de $\overline{E_k}$ dans E_n , qui vaut $\#A(\overline{E_k})$. Il ne faut pas tenir compte des arrangements inter-classes de $\overline{E_{n-k}}$, vu qu'il définissent des arrangements inter-classes de $\overline{E_k}$.

Théorème 21 (Nombre d'arrangements de E_k). $\#A(E_k) = \frac{n!}{(n-k)!}$.

18.2 Combinaisons

Définition 14 (Combinaison). Une combinaison d'un ensemble $\overline{E_k}$ donné, est la classe d'équivalence de tous les arrangements de $\overline{E_k}$ (page : ?? : figure ??).

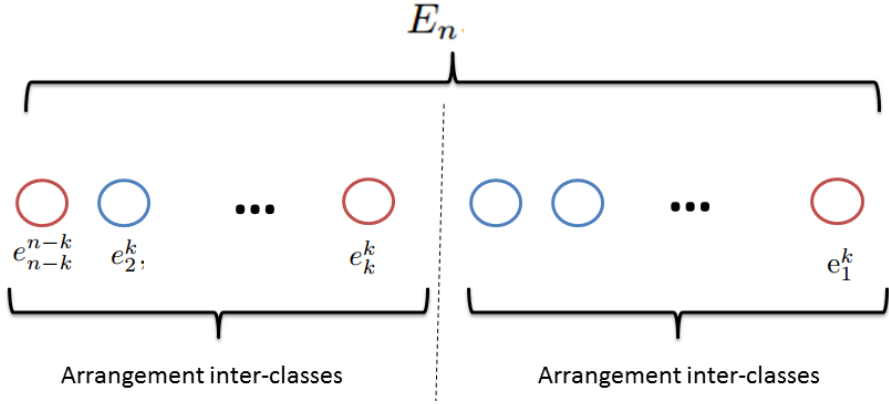


FIGURE 18.4 – Arrangements inter-classes et Combinaisons.

Donc, pour définir le nombre de combinaisons de $\overline{E_k}$ dans E_n , il faut tenir compte de tous les arrangements intra-classe de $\overline{E_k}$, ils forment une seule combinaison. Le nombre d'arrangements intra-classe de $\overline{E_k}$ valant $\#A'(\overline{E_k}) = k!$. On tiendra compte de la combinaison intra-classe de $\overline{E_k}$. et des combinaisons inter-classes.

Une combinaison inter-classe $C(E_k^i)$ est la classe d'équivalence obtenue à partir de l'ensemble des permutations dans E_k^i (définissant $k!$ représentants). On remarquera qu'avant de définir un arrangement inter-classe de E_k , il faut s'assurer qu'il ne sera pas une permutation d'un arrangement déjà existant.

Pour obtenir uniquement les combinaisons de $C(E_k^i)$ parmi E_n , il faudra diviser le nombre d'arrangements $\#A(E_k^i)$ par $k!$.

Théorème 22 (Nombre de combinaisons de $\overline{E_k}$). $\#C(E_k) = \binom{n}{k} =$

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Chapitre 19

Une intégrale impropre

19.1 Introduction

C'est Toricelli, qui en 1643 calcula la première intégrale impropre. C'était pour calculer l'intégrale de branches d'hyperboles $y = \frac{a}{x}$ en rotation autour d'un axe vertical.

19.2 La fonction $\ln$

Soit l'intégrale $I = \int_k^{k+1} \frac{dx}{x}$, où $k \geq 1$. Alors $I = [\ln x]_k^{k+1} = \ln(k+1) - \ln(k) = \ln(\frac{1}{k}) - \ln(\frac{1}{k+1}) = [\ln x]_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}}$.

Par un prolongement de la fonction $\ln$ à des valeurs inférieures à l'unité, on a $I = \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{x}$.

Théorème 23. Pour $k \geq 1$, $\int_k^{k+1} \frac{dx}{x} = \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{x}$.

Corollaire 2. $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ existe. C'est un prolongement de la fonction $x \mapsto \ln x$. On a :

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \ln(n_\infty)$$

Chapitre 20

Intégrale impropre par la réciproque

Soit une fonction :

$$\begin{array}{rcl} f & : & E \rightarrow F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

Où E et F pourront être égaux à $\mathbb{R}$. Alors la réciproque de f , notée f^{-1} , et telle que $f^{-1} \circ f = id$ alors, on définit.

$$\begin{array}{rcl} f^{-1} & : & F \rightarrow E \\ y & \mapsto & f^{-1}(y) \end{array}$$

On a f admet $f^{-1} = f$ comme réciproque, si et seulement si le graphe représentatif de $y = f(x)$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$. Dans le cas où il n'y a pas de symétrie, l'intégrale de f^{-1} sera distincte de l'intégrale de riemann de f . On note $g = f^{-1}$.

Soit une subdivision élémentaire de E et F . $E = \cup_k I_k = \cup_k [x_{inf}^k; x_{sup}^k[$ et une subdivision de $F = \cup_k J_k = \cup_k [y_{inf}^k; y_{sup}^k[$.

Alors $I_k = \int_{x_{inf}^k}^{x_{sup}^k} f(x)dx$, et $J_k = \int_{y_{inf}^k}^{y_{sup}^k} f^{-1}(y)dy$. On peut alors calculer les intégrales sur $E = \sum I_k = \sum_k \int_{x_{inf}^k}^{x_{sup}^k} f(x)dx$. Et sur $F = \sum J_k = \sum_k \int_{y_{inf}^k}^{y_{sup}^k} f^{-1}(y)dy$.

Intégrale de Riemann par les sommes de Darboux sur $(y'Oy)$ On pourra à partir de là, définir des sommes de Darboux pour calculer l'intégrale de Riemann. On considère une subdivision J_k . On pose J_k^+ et J_k^- les deux produits définis ci-dessous. $J_k^+ = Long([y_k; y_{k+1}]) \times g_{sup}$ et $J_k^- = Long([y_k; y_{k+1}]) \times g_{inf}$. Alors, si $\sum \lim_{k \rightarrow 0} J_k^+ = \sum \lim_{k \rightarrow 0} J_k^- = A$, alors l'intégrale de Riemann est définie et vaut A .

$$\int_F f^{-1}(y)dy = A.$$

Intégration de Henstock-Kurzeil sur $(y'Oy)$ On définit une subdivision J_k pointée par des h_k . Alors $h_k \in [y_k; y_{k+1}[$ et $J_k = [y_k; y_{k+1}[; h_k \in [y_k; y_{k+1}[$ avec $F = \bigcup J_k$. On définit une $\delta - k$ jauge, telle que $Long(J_k, h_k) \leq \delta - k$.

$$S_{J_k} = \sum_{k=0}^{n-1} Long(J_k, h_k).x(h_k) \text{ où } (J_k, h_k) \in F.$$

Soit $A \in \mathbb{R}$, alors $\forall \epsilon, \exists \delta - k$ tel que $|Long(J_k, h_k) - A| \leq \epsilon$.

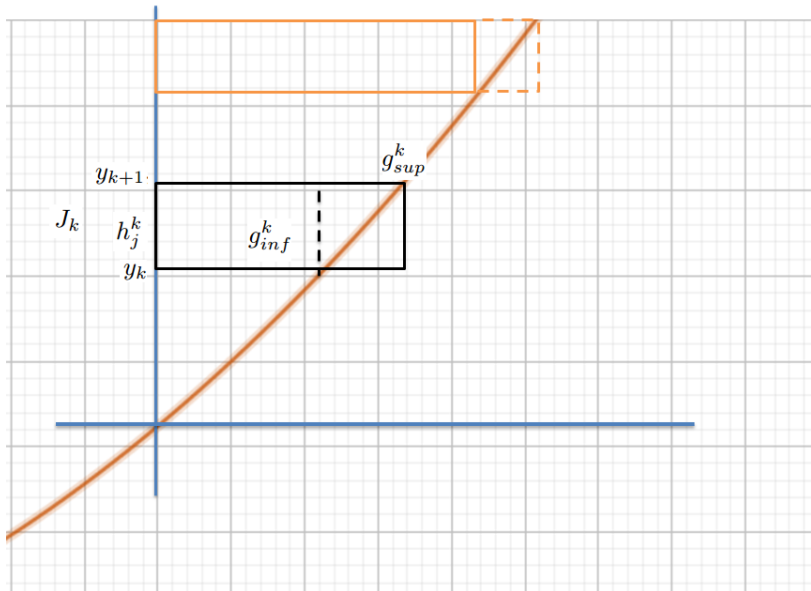


FIGURE 20.1 – Intégration de Riemann sur l'axe $(y'Oy)$.

$$\int_F g \cdot dy = \sum_k \text{Long}(J_k, h_k) \times x(h_k).$$

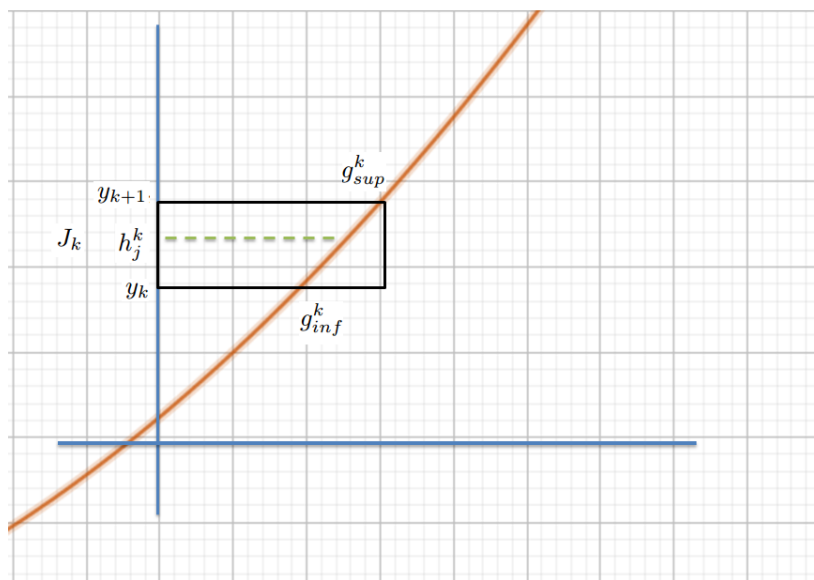


FIGURE 20.2 – Intégration de Henstock-Kurzeil sur l'axe $(y'Oy)$
 Pour calculer $\int f^{-1}$.

Chapitre 21

L'information de Reny

On appelle quantité d'information de Rényi $\mathcal{I} = \log_2 N$, où N est le nombre de symboles à traiter.

21.1 Cas où $\mathcal{I}$ est entière

On note la quantité d'information de Rényi $\mathcal{I}_{\mathbb{N}}$. Soit un mécanisme de traitement de l'information pour composer des mots constitués de lettres. Les unités symboliques seront faites des lettres d'un alphabet, plus le symbole d'espace. On note cet ensemble de symboles $\mathcal{A}$. Donc nous aurons 27 symboles à coder. Avec une information de Rényi entière qui vaudra $\mathcal{I}_{\mathcal{A}} = 5$, pour coder 32 symboles en base deux, dont les 27 symboles de $\mathcal{A}$.

Maintenant, considérons des mots $\mathcal{M}$ codés sur un octal. En base deux, ils sont codés sur 2^8 éléments. Toutefois, si nous codons les mots octals avec des symboles de $\mathcal{A}$, la quantité de symboles utilisable vaudra $(2^5)^8 = 2^{40}$. Alors l'information de Rényi vaudra :

$$\boxed{\mathcal{I}_{\mathcal{M} \circ \mathcal{A}} = \mathcal{I}_{\mathbb{N}}(\mathcal{M} \circ \mathcal{A}) = 40}.$$

21.2 Cas fini, réel

On remarque que la quantité d'information à fin de coder les symboles de $\mathcal{A}$ peut être diminuée si nous travaillons avec $\mathcal{I}_{\mathbb{R}}$. Autrement dit avec une quantité d'information de Rényi réelle.

En effet, $\mathcal{I}_{\mathbb{R}}(\mathcal{A}) = \frac{\ln 27}{\ln 2} = \log_2 27 = 4.75$ au lieu de $\mathcal{I}_{\mathbb{N}} = 5$. Le gain pour composer des mots $\mathcal{M} \circ \mathcal{A} = \mathcal{I}_{\mathbb{R}}(\mathcal{M} \circ \mathcal{A}) - \mathcal{I}_{\mathbb{N}}(\mathcal{M} \circ \mathcal{A})$ avec $\mathcal{I}_{\mathbb{R}}(\mathcal{M} \circ \mathcal{A}) = (2^{4.75})^8 = 38$ est de 2 unités. Cet écart s'applique pour chaque mot de la phrase.

21.3 Remarque

L'utilisation de codage de symboles en base deux se justifie par l'information de Rényi entière $\mathcal{I}_{\mathbb{N}}$. Car en base dix, on aurait plus de perte d'information. Si nous prenons les 27 symboles de $\mathcal{A}$ en base dix, nous perdons 73 symboles potentiels, contre 5 en base deux. L'écart est donc très important. Il vaut mieux alors travailler en base deux.

Par contre, pour l'information de Rényi réelle : $\mathcal{I}_{\mathbb{R}}$, l'utilisation d'une base quelconque optimise le résultat dans sa base. On aura $\log_{10}(27)$ en base dix, pour $\log_2(27)$ en base deux, qui optimisent la quantité d'information en prenant $\min \mathcal{I}$ dans les deux cas, donne un avantage à traiter l'information en base 10. Cet écart est non négligeable.

$$\boxed{\mathcal{I}_{\mathbb{R}}^{10} = \log_{10}(2) \mathcal{I}_{\mathbb{R}}^2 = 0.30 \mathcal{I}_{\mathbb{R}}^2}.$$

21.4 La néguentropie de composition

On prend alors un système Ω composé de deux sous-systèmes A et B , pour traiter l'information dans $\mathbb{N}$ pour B , et dans $\mathbb{R}$ pour A . On applique $\Omega = A \circ B$.

Alors, $\mathcal{I}_{\mathbb{N}}^B(\mathcal{M} \circ \mathcal{A}) \geq \mathcal{I}_{\mathbb{R}}^A(\mathcal{M} \circ \mathcal{A}) \Leftrightarrow \Delta \mathcal{I} \leq 0$.

On a un mécanisme de néguentropie de composition en appliquant $A \circ B$, qui est créé par une économie de traitement de l'information.

Pour le traitement de l'information réelle, il suffit de considérer la classe entropique : $\widehat{\mathcal{H}} = (\mathcal{H}, \mathcal{N})$. Elle se définit dans $\mathbb{R}^2$. Pour le traitement de l'information entière on prendra l'exemple d'un livre ou d'un calculateur (un ordinateur ou un système d'information objet).

Si B est un livre, alors $A \circ B$ apportera de la néguentropie de composition sous forme :

1. D'ordre.
2. De mesure.
3. D'information complémentaire.

Elle participera au développement et au maintien de structures.

Maintenant, prenons l'histoire du cosmos, qui est définie du début à la fin, comme un film. Alors il est accompagné d'un scénario pour former le livre. Donc, tout sous-système du cosmos pourra être appréhendé comme la structure d'un livre. Pour généraliser cette notion de livre, il convient de définir une *template* ou patron, qui s'adaptera à tout système.

21.5 Démonstration que $\mathcal{I} = \log_2 N$

Nous allons travailler en base deux, car nous optimisons les éventuelles pertes d'information pour une information de Rényi entière. Soit un système codant des éléments en base deux, pour une quantité de N symboles finis ou tendant potentiellement vers le premier infini en acte. Pour composer N symboles en base deux, il est nécessaire que $N = 2^{\mathcal{I}}$. Alors $\ln N = \mathcal{I} \ln 2 \Leftrightarrow \mathcal{I} = \log_2 N$.

Passons à une quantité N infinie en acte (le cardinal des entiers). On pose $n_\infty = (n_\infty - 1) + 1$ où $n_\infty - 1$ est une quantité non infinie en acte. C'est un infini potentiel pour lequel la relation finie est vraie. D'où on code $N_1 = 2^{n_\infty - 1}$ éléments. Si l'on rajoute 1 unité d'information, on peut coder $N_2 = 2^{n_\infty}$ éléments en plus. On obtient $\mathcal{I}_1 = n_\infty - 1$ et $\mathcal{I}_2 = 1$. Donc $\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 = n_\infty$. En conclusion la quantité d'information de Rényi est valable pour n_∞ symboles. On généralise l'approche pour $n_\infty + k$ symboles élémentaires à coder.

Théorème 24. *Quantité d'information de Rényi $\forall N \in \mathbb{NUT}_{\mathbb{N}}, \mathcal{I} = \log_2 N$.*

On peut appliquer une base différente de 2, soit on généralise la quantité d'information de Rényi avec $\mathcal{I} = \log_b N$ où $b \in \mathbb{R}^+$.

Chapitre 22

L'entropie de Shannon

22.1 Introduction

On considère un ensemble E de cardinal N , dont on fait une partition avec des sous-ensembles E_i de cardinal N_i . Où les segments E_i sont tous disjoints deux à deux. Alors on peut définir

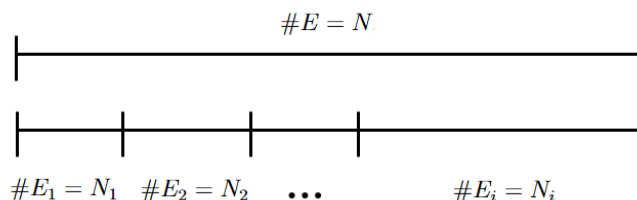


FIGURE 22.1 – Partition de E

deux lois de probabilité X et X' telles que :

$$\begin{aligned} X &: E \longrightarrow [0; 1] \\ E_i &\longmapsto X(E_i) = Pr_i = \frac{N_i}{N}. \end{aligned}$$

On peut définir aussi une variable aléatoire X qui est triviale.

$$\begin{aligned} X' : E &\longrightarrow \{1\} \\ E &\longmapsto X'(E) = 1. \end{aligned}$$

22.2 Entropie de Shannon

Soit $\mathcal{I}_E$ la quantité d'information de Rényi pour l'ensemble E . Alors par le théorème de Rényi, $b^{\mathcal{I}_N} = N \Leftrightarrow \mathcal{I}_N = \log_b N$ où b désigne la base. De même, pour les ensembles $(E_i)_{i \leq n}$ on associe la quantité d'information $\mathcal{I}_{N_i} = \log_b N_i$.

On pose $\Delta_{\mathbb{E}}$ qui représente la variation de l'espérance mathématique appliquée aux variables aléatoires $X(E_i)$ et $X'(E)$. Soit on associe à X la fonction $\mathcal{I}(E_i)$ et à X' la fonction $\mathcal{I}(E)$. Ce sont les quantités d'information correspondant aux segments E_i et E respectivement. L'espérance représente donc la variation de la quantité d'information.

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbb{E}} &= \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X'] = \sum_{i=1}^n Pr_i \mathcal{I}_{E_i} - \mathcal{I}_E = \sum_{i=1}^n Pr_i \mathcal{I}_{E_i} - \sum_{i=1}^n Pr_i \mathcal{I}_E = \\ &= \sum_{i=1}^n Pr_i (\mathcal{I}_{E_i} - \mathcal{I}_E) = \sum_{i=1}^n Pr_i (\log_b N_i - \log_b N) = \sum_{i=1}^n Pr_i (\log_b \frac{N_i}{N}) \\ &= \sum_{i=1}^n Pr_i \log_b Pr_i. \end{aligned}$$

On remarque que $\forall y \in \mathbb{R}^+, \exists x \mid e^x = y$. Alors nous pouvons définir une quantité d'information de Rényi réelle ou entière à partir de la base exponentielle. En prenant comme base $b = e$, alors il vient $\Delta_{\mathbb{E}} = \sum_{i=1}^n Pr_i \ln Pr_i \leq 0$. D'où, on appelle $\mathcal{H} = - \sum_{i=1}^n Pr_i \ln Pr_i$ entropie de Shannon. C'est une valeur positive.

Théorème 25. *Entropie de Shannon* $\mathcal{H} = \sum_{i=1}^n Pr_i \ln \frac{1}{Pr_i}$

22.3 Interprétation

On peut aussi dire que $\Delta_{\mathbb{E}} \leq 0$, soit nous obtenons une néguentropie de composition par rapport aux quantités d'information de Rényi. Autrement dit, quand E est composé (ou pondéré) par les $\cup(E_i)_{1 \leq i \leq n}$, le traitement de l'information est amélioré. Autrement dit :

Théorème 26. *$\Delta_{\mathbb{E}}$ est une quantification de la néguentropie de composition de l'information.*

Chapitre 23

Processus d'intégration transfini

L'intégration s'est développée autour de deux approches : la somme de rectangles et le calcul de primitives. Nous allons dans ce qui suit proposer une méthode de surfacage de fonctions qui va tirer profit de la notion de nombre entier transfini telle que nous l'avons définie dans nos travaux précédents. On sera amené à discuter de nouveau de la valeur de $\frac{1}{n_{+\infty}}$ et plus généralement de la valeur de $\frac{1}{kn_{+\infty}}$ pour k entier.

Dans un second temps on appliquera notre méthode à la fonction inverse, ce qui nous conduira à définir le logarithme et proposer une formule de Mercator réactualisée au vu des nouveaux éléments.

Enfin, on proposera des applications pratiques qui nous conduiront aux calculs de séries ainsi qu'à certaines approximations.

23.1 Intégration

On considère une fonction continue sur $[a; b]$, on construit une subdivision de pas $\Delta x = x_i - x_{i-1}$ avec $x_0 = a$ et $x_n = b$.

On pose $Sup = \sup f(x)$ où $x \in [x_{i-1}; x_i]$ et $Inf = \inf f(x)$ où $x \in [x_{i-1}; x_i]$, alors on définit $I_n^+ = \{\sum_{i=1}^n Sup \times \Delta x\}_{n \rightarrow +\infty}$ et $I_n^- = \{\sum_{i=1}^n Inf \times \Delta x\}_{n \rightarrow +\infty}$.

On dit que f est intégrable au sens de Riemann si $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n^+ = \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n^-$, et alors on pose $I = \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n^+ = \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n^- = \int_a^b f(x)dx$.

Considérons un cas particulier de subdivision : $x_{i+1} = \frac{b-a}{n} + x_i$, avec $x_1 = a$. On suppose f strictement décroissante et $b - a = 1$, alors $x_i = \frac{i}{n} + a$.

Soit $I_n^+ = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} f(a + \frac{i-1}{n}) = \sum_{i=na}^{n(a+1)-1} \frac{1}{n} f(\frac{i}{n})$, de même $I_n^- = \sum_{i=na+1}^{n(a+1)} \frac{1}{n} f(\frac{i}{n})$.

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n^+ - \frac{1}{n} f(a) = \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n^- - \frac{1}{n} f(a+1)$, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a) \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(a+1) \frac{1}{n} = 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n^+ = \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n^- \implies \int_a^{a+1} f(x)dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=na}^{n(a+1)} \frac{1}{n} f(\frac{k}{n})$.

On sait qu'il existe $n_{+\infty}$ qui est le cardinal de $\mathbb{N}$ et qu'il existe des nombres entiers transfinis qui s'étendent au-delà des nombres entiers par adjonction d'une unité. Or $\int_a^{a+1} f(x)dx$ est une valeur finie, pas seulement une limite, la somme convergeant, on peut passer à une série de termes achevée, le résultat est donc valable dans le cadre de l'infini potentiel et celui de l'infini achevé.

On a donc $\int_a^{a+1} f(x)dx = \sum_{k=na}^{n(a+1)} \frac{1}{n} f(\frac{k}{n})$ pour $n = n_{+\infty}$. Dans ce cas on a une représentation de l'aire comme somme de termes transfinis.

Si f avait été croissante sur $[a; a+1]$ par un raisonnement analogue on aurait eu : $\int_a^{a+1} f(x)dx = \sum_{k=na}^{n(a+1)} \frac{1}{n} f(\frac{k}{n})$ pour $n = n_{+\infty}$.

Précisons que si $n = n_{+\infty}$ on a $\frac{1}{n_{+\infty}} = 0$. En effet, soit $\int_1^2 x dx = \frac{3}{2} = \left\{ \sum_{k=n}^{2n} \frac{k}{n^2} = \frac{3}{2} n \frac{n+1}{n^2} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2n} \right\}_{n=n_{+\infty}}$.

On tire de l'égalité $\frac{3}{2} + \frac{3}{2n_{+\infty}} = \frac{3}{2} \iff \frac{1}{n_{+\infty}} = 0$. Soit $\forall k \in \mathbb{N} \frac{1}{kn_{+\infty}} = 0$.

Géométriquement, on a alors divisé $[a; a+1]$ en $n_{+\infty}$ points, ce sont donc des points de taille assez grosse puisque $\text{Card}([a; a+1]) = 2^n_{n \rightarrow +\infty} + 1$. Cela permet de calculer des rectangles élémentaires transfinis.

23.2 Application à la fonction inverse

Soit $\frac{1}{n} = g^m$. On pose $f(x) = \frac{1}{x}$ pour $x \in \mathbb{R}^+$, alors $I_n^+ = I_n^- = \left\{ \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} \right\}_{n_{+\infty}} g^m$. Il s'en suit que $\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln(2) = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \cdots + \frac{1}{2n} \right\}_{n_{+\infty}}$.

Cette formule est valable dans le cadre du transfini, mais également dans le cadre de l'infini potentiel. Si on prend les inverses des $2n$ premiers entiers, la somme des n derniers inverses tend vers $\ln(2)$.

Rappel de la formule de Mercator Traditionnellement, la formule de Mercator est représentée par $S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$. Le symbole de sommation crée un trouble, en effet dans une logique d'infini potentiel $S \longrightarrow -\ln(2)$ par application de la formule de Mc Laurin par exemple. Cependant une somme finie ou infinie, en prenant le premier infini $n_{+\infty}$ de rationnels finis (donc éléments de $\mathbb{Q}$ et alors non transfinis) inférieurs à l'unité en valeur absolue ne peut donner qu'un rationnel; et non pas un nombre transcendant. En fait en sommant jusqu'à l'infini ($n_{+\infty}$), on définit donc un rationnel qui tend vers $-\ln(2)$. On sait que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, donc il n'est pas surprenant qu'on puisse définir un rationnel qui soit dans tout

voisinage de $-\ln(2)$.

D'ailleurs, $\zeta = \left\{ \sum_1^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right\}_{n \rightarrow +\infty}$ et $\zeta = \left\{ \sum_1^{2n} \frac{1}{k} - \ln(2n) \right\}_{n \rightarrow +\infty}$ soit on a bien les résultat trouvés au dessus : $\ln(2) = \left\{ \sum_{n+1}^{2n} \frac{1}{k} \right\}_{n \rightarrow +\infty}$, et comme $\frac{1}{n+\infty} = 0$ on retrouve $\ln(2) = \left\{ \sum_n^{2n} \frac{1}{k} \right\}_{n \rightarrow +\infty}$.

Alors on a : $\left\{ \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+1} \right\}_{n+\infty}$

et $\left\{ \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+1} \right\}_{n+\infty}$.

On déduit alors également que $S = \left\{ \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} \right\}_{n+\infty} = -\ln(2)$,

résultat qui est différent que la formule initiale de Mercator, mais qui me semble plus correct si on passe à l'égalité et non pas à la limite d'une part, mais qui est aussi plus précis dans la convergence. Nous retrouvons la présence des nombres transfinis dans les développements en série entières, cependant on applique toujours le cadre de l'infini potentiel, qui laisse suggérer que tous ces développements soient des rationnels, ce qui n'est pas le cas, dans tous ces développements on investit le transfini.

23.3 Autres Applications

Soit $I_1 = \int_0^1 \ln(t) dt$ On peut généraliser la construction de notre intégrale si la fonction diverge en a ou $a + 1$ à condition que la primitive nous donne un résultat fini. On a ici $I_1 = -1$.

En appliquant notre processus on a $I_1 = \left\{ \sum_{k=1}^{n+\infty} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \right\} = \left\{ \sum_{k=1}^{n+\infty} \frac{1}{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right) \right\}$. Cette relation est bien sûr également valable dans le cadre de l'infini potentiel.

On déduit alors $e^{-1} = \left\{ \exp\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right)\right) \right\}_{n \rightarrow +\infty}$, soit :

$$e = \left\{ \frac{n}{(n!)^{\frac{1}{n}}} \right\}_{n \rightarrow +\infty} \quad (23.1)$$

Soit $I_2 = \int_1^2 \ln(t) dt = \ln\left(\frac{4}{e}\right)$. Par notre processus d'intégration on a $I_2 = \left\{ \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right) \right\}_{n \rightarrow +\infty} = \left\{ \frac{1}{n} \left[\ln(1) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{n}{n}\right) \right] \right\}_{n \rightarrow +\infty}$. Soit on aboutit à $\left\{ \frac{1 \times (1+n) \times \cdots \times (n+n)}{n^n} = \left(\frac{4}{e}\right)^n \right\}_{n \rightarrow +\infty}$, ou encore :

$$\left\{ \frac{(2n!)}{(n!)^2} = \left(\frac{4n}{e}\right)^n \right\}_{n \rightarrow +\infty} \quad (23.2)$$

avec le résultat (6.1), il vient :

$$\left\{ \frac{(2n!)}{(n!)^2} = C_{2n}^n = 4^n \right\}_{n \rightarrow +\infty} \quad (23.3)$$

qu'on peut rapprocher du résultat bien connu : $\frac{(2n!)}{(n!)^2} = \frac{4^n}{\sqrt{n\pi}}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$

Encore une fois nos résultats sont également valables dans le cadre de l'infini potentiel.

Positionnons nous alors dans le cadre de l'infini potentiel, et démontrons alors la formule de Bernoulli : $e = \lim(1 + \frac{1}{n})^n$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Considérons la quantité $X = (1 + \frac{1}{n})^n$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Par la formule (6.2) valable dans le cadre de l'infini potentiel : $\frac{(4(n+1))^{n+1}}{e^{n+1}} = \frac{(2(n+1))!}{(n+1)!}$ soit $(n+1)^{n+1} = \frac{(2n+2)(2n+1)((2n)!)}{(n+1)(n!)^2} \times \frac{e^{n+1}}{4^{n+1}}$, qui permet d'aboutir à : $X = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)} \times \frac{(2n)!}{n!} \times \frac{e^{n+1}}{4^{n+1}} \times \frac{1}{(n+1)n^n}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ ou

encore $X = \frac{2(n+1)(2n+1)}{(n+1)^2} \times \left(\frac{4n}{e}\right)^n \times \frac{e^{n+1}}{4^{n+1}} \times \frac{1}{n^n} = \left(\frac{e}{4} \times \frac{4n+2}{n+1}\right)_{n \rightarrow +\infty} = e$.
(CQFD)

Proposition. Soit e l'antécédent de 1 par la fonction $\ln$, alors $e = \lim(1 + \frac{1}{n})^n$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Soit $I_3 = \int_1^2 e^x dx = e(e-1)$. Alors $I_3 = \left\{ \frac{1}{n}(e^1 + e^{1+\frac{1}{n}} + \dots + e^{1+\frac{n}{n}}) \right\}_{n \rightarrow +\infty}$.
Donc $\left\{ \frac{1+e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\dots+e^{\frac{n}{n}}}{n} = e - 1 \right\}_{n \rightarrow +\infty}$.

Soit $I_4 = \int_1^2 \sin(\pi x) dx = \frac{-2}{\pi}$. Alors $\left\{ \sum_{k=n}^{2n} \frac{\sin(\frac{k\pi}{n})}{n} = \frac{2}{\pi} \right\}_{n \rightarrow +\infty}$

Soit $I_5 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$. Alors $\left\{ \sum_{k=0}^n \frac{n}{n^2+k^2} = \frac{\pi}{4} \right\}_{n \rightarrow +\infty}$.

Soit $I_6 = \int_1^2 \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{2}$. Alors $\left\{ n \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{2} \right\}_{n \rightarrow +\infty}$. On peut remarquer que c'est une suite décroissante, si on se place dans le cadre de l'infini potentiel.

Définition du logarithme népérien pour q entier . Soit $I_7 = \int_1^q \frac{1}{x} dx = \ln(q)$. Alors :

$$\boxed{\left\{ \sum_{k=n}^{qn} \frac{1}{k} = \ln(q) \right\}_{n \rightarrow +\infty}} \quad (23.4)$$

Ce résultat étant également valable pour l'infini potentiel, on obtient des approximations rationnelles de $\ln(q)$ assez simples. De plus on a aussi : $\left\{ q = \prod_{k=n}^{qn} e^{\frac{1}{k}} \right\}_{n \rightarrow +\infty}$.

Par extension :

$$\boxed{\left\{ \sum_{k=n}^{n^2} \frac{1}{k} = \ln(n) \right\}_{n \rightarrow \infty}} \quad (23.5)$$

Soit ζ la constante d'Euler-Mascheroni, alors

$$\boxed{\zeta = \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} - \cdots - \frac{1}{n^2} \right\}_{n \rightarrow \infty}} \quad (23.6)$$

Formule qu'on pourrait retrouver avec la formule d'Euler-Mascheroni développée jusqu'en n^2 .

Chapitre 24

Théorème du réarrangement de Riemann

On doit à Bernhard Riemann un résultat étonnant : Si une série à termes réels est semi-convergente, alors par une permutation de ses éléments on peut la faire tendre vers n'importe quel réel ou même vers l'infini. On rappelle qu'une série u_n est semi-convergente si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum u_k = \ell$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = +\infty$. Si on considère une série de terme $u_n = (-1)^n f(n)$, on se limite au cas où f est une fonction décroissante tendant vers zéro lorsque n tend vers l'infini, en supposant de plus que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n u_k = \ell$, et $\sum_{k=1}^n u_{2k}$, $\sum_{k=1}^n u_{2k+1}$ divergent respectivement vers plus et moins l'infini.

Alors, on peut réarranger les termes de la série de telle sorte que $\sum_{k=1}^{+\infty} u_{\sigma(k)}$ converge vers tout $\ell' \in \mathbb{R}$.

24.1 Démonstration pour le cas de f

Voici un algorithme récursif, on suppose $\ell' > 0$ donné. On considère la suite des termes qui vont tendre vers ℓ' : $(S_q)_{q \geq 1}$, pose $S_1 = 0$. On appelle I_c l'ensemble des indices consommés pour construire la suite de nombres tendant vers ℓ' , on part de $I_c = \{0\}$.

Etape 1 On épuise tout les indices pairs par ordre croissant supérieurs à $\max i \in I_c = i_m$ jusqu'à ce que $\sum_{k > i_m; k \text{ pair}}^{2j} u_k > \ell' - S_{\max i}$. Alors on alimente $I_c = \{2, 4, \dots, i_m\} \cup \{\dots, 2j\}$, on pose $S_{q+1} = \sum_{k \in I_c, k > i_m, k \text{ pair}}^{2j} u_k + S_q$.

Etape 2 On soustrait les termes d'indices impairs en partant du plus petit disponible non consommé, et on somme par ordre croissant jusqu'à ce qu'on obtienne un nombre inférieur à $S_q - \ell'$. Alors on pose $S_{q+1} = S_q - \sum_{k \in I_c, k > i_m, k \text{ impair}}^{2j'+1} u_k$, bien sûr on alimente I_c avec les indices impairs consommés comme pour le cas précédent.

Etape 3 On revient à l'étape 1, dans le cadre classique compte tenu que les séries en termes pairs et impairs sont divergentes, en soustrayant un nombre fini de termes on a toujours une série divergente. Le problème se pose lorsqu'on ajoute ou soustrait une infinité de fois un nombre fini pair ou impair de termes. Ce qui est certain c'est que des sommations ou des soustractions en nombre fini ne permettraient pas d'atteindre tout réel, mais seulement une infime partie, donc le cas évoqué de sommations ou de soustraction infinies est le cas principal.

24.2 Implications

Considérons le cadre classique où $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 | \forall n > n_0, | \sum_{k=1}^{+\infty} u_k - \ell | < \epsilon$. Soit un réarrangement de la série qui la fait converger vers ℓ' , alors $\Delta = \ell - \ell'$ est également un réel, donc il existe aussi un réarrangement de la série qui la fait converger vers Δ .

Voyons ce que cela implique : $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k - \sum_{k=1}^{+\infty} u_{\sigma(k)} \longrightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} u_{\sigma'(k)}$. Or cette relation est très restrictive dans le cadre de l'infini potentiel ou de l'infini cantorien, puisque tous les termes de gauche s'annuleraient un à un. En effet, pour chaque terme d'indice k il existerait un terme d'indice $\sigma(k') = k$ qui l'annulera. Ou encore, la seule solution serait $\Delta = 0$ et $\ell = \ell'$, ce qui n'est manifestement pas le cas.

La seule solution possible est donc que les séries convergent vers des réels, en investissant le domaine transfini. C'est à dire :

$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 | \forall n > n_0, | \sum_{k=1}^{+\alpha n_\infty} u_k - \ell | < \epsilon$ où α est un entier fini ou transfini.

$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 | \forall n > n_0, | \sum_{k=1}^{+\beta n_\infty} u_{\sigma(k)} - \ell | < \epsilon$ où β est un entier fini ou transfini.

$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 | \forall n > n_0, | \sum_{k=1}^{+\gamma n_\infty} u_{\sigma'(k)} - \ell | < \epsilon$ où γ est un entier fini ou transfini.

Où n_∞ est le cardinal de $\mathbb{N}$, et $\alpha \neq \beta \neq \gamma$. Et alors $\sum_{k=1}^{+\infty} (u_k - u_{\sigma(k)}) + \text{Résidu transfini} \longrightarrow \sum_{k=1}^{+\gamma n_\infty} u_{\sigma'(k)}$.

Conclusion En conclusion, le théorème du réarrangement de Riemann implique que les sommations s'étendent dans le domaine transfini.

Chapitre 25

Convergence asymptotique

Nous allons nous appuyer sur une méthode classique concernant l'étude de la série harmonique pour établir une stratification de l'infini accessible par des séries divergentes dont le terme général tend vers 0. On généralise alors la convergence asymptotique de la série harmonique. Les résultats sont portables dans le cadre de l'infini potentiel et achevé. Dans un second temps on démontrera quelques résultats de convergences pour des séries de puissances.

La fonction inverse de la racine Considérons $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, cette fonction diverge en 0^+ , mais converge vers 0 vers $+\infty$. Cependant considérons la suite des aires (A_k) formée par la courbe d'équation $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ et l'axe $(x'Ox)$ pour x allant de k à $k+1$ ainsi que la suite des rectangles de largeur l'unité et de longueur $\frac{1}{\sqrt{k}}$ pour k allant de 1 à n .

On pose $A_1 = 1$ qui est le rectangle élémentaire au nord-est de O de côté 1. Alors, on a :

$$A_2 = \left| \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x}} \right| = \left| [2\sqrt{x}]_1^2 \right| = |2\sqrt{2} - 2| = -2 + 2\sqrt{2}.$$

$$A_3 = \left| \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x}} \right| = \left| [2\sqrt{x}]_2^3 \right| = |2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}| = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}.$$

⋮

$$A_n = \left| \int_{n-1}^n \frac{dx}{\sqrt{x}} \right| = 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}$$

Soit, $\sum_{k=1}^n A_k = 2\sqrt{n} - 1$.

Considérons alors $\Delta_n = \sum_{k=1}^n A_k - \frac{1}{\sqrt{k+1}}$. On pose $\Delta'_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - A_k$ or il est évident que $\{\Delta_n + \Delta'_n \rightarrow 2\}_{n \rightarrow +\infty}$. Puisque $\Delta''_n = (1 - \frac{1}{\sqrt{2}}) + (\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}) + \dots + (\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}) \rightarrow 1$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Les deux suite Δ_n et Δ'_n sont strictement positives. Donc, Δ_n est une suite d'aires strictement croissante majorée ; elle est donc convergente. On peut en conclure que $\lim(2\sqrt{n} - \sum \frac{1}{\sqrt{k}})_{n \rightarrow +\infty} = \ell$

$$\boxed{\left\{ 2\sqrt{n} - \sum \frac{1}{\sqrt{k}} \right\}_{n \rightarrow +\infty} = \ell} \quad (25.1)$$

Ou encore la série de terme générale $\frac{1}{\sqrt{k}}$ converge asymptotiquement vers la fonction $2\sqrt{n}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Par exemple pour $n = 60000$ on trouve pour le résidu ℓ la valeur 1.4583237.

Ce résultat est intéressant, car on peut approximer à la règle une "asymptote" que la fonction racine n'atteindra jamais (bien sûr il faut inclure dans le comportement à l'infini le delta induit par la constante). On peut également matérialiser la différence de comportement à l'infini entre la fonction logarithme népérien et la fonction racine.

Généralisation pour $\alpha > 1$ On considère $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ ainsi que la série de terme général $(A_k)_{k \geq 1}$ égale aux aires successifs situés entre la courbe d'équation $y = f(x)$, l'axe $(x'Ox)$ et les droites d'équations : $x = k - 1$ et $x = k$; qui est équivalent à la valeur absolue de l'intégrale de f prises entre $k - 1$ et k pour $k > 1$, avec

$A_1 = 1$.

On obtient $\sum_{k=1}^n A_k = \frac{-1}{\alpha-1} + \frac{\alpha}{\alpha-1} n^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$.

Alors comme pour le cas précédent, on forme $\Delta = \sum_{k=1}^n A_k - (k+1)^{\frac{-1}{\alpha}}$ ainsi que $\Delta' = \sum_{k=1}^n k^{\frac{-1}{\alpha}} - A_k$.

On aboutit alors à $\lim(\frac{\alpha}{\alpha-1} n^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} - \sum_{k=1}^n k^{\frac{-1}{\alpha}})_{n \rightarrow +\infty} = \ell''$

$$\left\{ \frac{\alpha}{\alpha-1} n^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} - \sum_{k=1}^n k^{\frac{-1}{\alpha}} \right\}_{n \rightarrow +\infty} = \ell'' \quad (25.2)$$

La fonction racine Dans le chapitre 6 ("Processus d'intégration transfini"), on avait abouti à l'égalité $|\int_0^1 f(x)dx| = \sum_{k=0}^{n+\infty} \frac{1}{n} f(\frac{k}{n})$ lorsque f était bornée. Nous allons exploiter ce résultat pour proposer d'autres applications qui concernent les fonction puissances α pour $\alpha < 1$. Considérons $u_k = \sqrt{k}$ où $k \in \mathbb{N}$ et $f(x) = \sqrt{x}$. Naturellement, $\int_0^1 \sqrt{x}dx = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{3} = \sum_{k=0}^{n+\infty} \frac{\sqrt{k}}{n\sqrt{n}}$. On déduit alors

$$\left\{ \sum_{k=1}^n \sqrt{k} = \frac{2}{3} n\sqrt{n} \right\}_{n \rightarrow +\infty} \quad (25.3)$$

La fonction x^m où $m > 1$ La formule de Bernoulli nous donne $\sum_{k=1}^n k^m = \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^m C_{m+1}^k B_k(n+1)^{m+1-k}$.

Il serait intéressant de pouvoir calculer $\sum_{k=1}^n k^m \times \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^p}$ où m, p supérieurs à l'unité, lorsque $n \rightarrow +\infty$. En reprenant notre formule, il vient $\left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^m \frac{k^m}{n^m} = \frac{1}{\alpha+1} \right\}_{n \rightarrow +\infty} \Rightarrow \left\{ \sum_{k=1}^n k^m = \frac{n^{m+1}}{m+1} \right\}_{n \rightarrow +\infty}$. D'où :

$$\left\{ \sum_{k=1}^n k^m \div \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^p} = \frac{n^{m-p(p+1)}}{m+1} \right\}_{n \rightarrow +\infty}.$$

En particulier, la moyenne arithmétique du quotient de la somme des puissances à l'ordre $m+1$ des entiers naturels allant de 1 à n

sur la somme des puissances à l'ordre m des entiers naturels allant de 1 à n tend vers $\frac{m+1}{m+2}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$

On a également le résultat :

$$\boxed{\left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{k} \div \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \right\}_{n \rightarrow \infty} = \frac{1}{3}} \quad (25.4)$$

Conclusion On peut donc voir que la convergence asymptotique de la série harmonique vers $\ln(n)$ n'est pas un cas unique. C'est une propriété vérifiée par toutes les séries des inverses de puissances à l'ordre $\frac{1}{m}$, $m > 1$. Par ailleurs, on peut appliquer notre méthode d'intégration transfinie pour les fonctions puissances lorsque celles-ci convergent sur l'ensemble d'intégration et que la fonction est bornée.

Chapitre 26

À propos de deux séries divergentes

26.1 Sommations infinies

Somme des $\zeta(2k)$ On pose $S = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots = \sum_{q=2}^{n+\infty} \sum_{k=1}^{n+\infty} \frac{1}{q^{2k}} = \sum_{q=2}^{n+\infty} \frac{1}{q^2-1} = \sum_{q=2}^{n+\infty} \frac{1}{(q-1)(q+1)} = \frac{1}{2} \sum_{q=2}^{n+\infty} \left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{q+1} \right)$.

Soit $S = \frac{1}{2} \times (1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots) = \frac{3}{4}$. Or $S = \sum_{k=1}^{n+\infty} \zeta(2k) - n_{+\infty}$. On déduit alors la formule :

$$\left(\sum_{k=1}^{n+\infty} \frac{(-1)^{k-1} (2\pi)^{2k}}{2(2k)!} B_{2k} \right) = \frac{3}{4} + n_{+\infty} \quad (26.1)$$

ou encore :

$$\left(\lim \left(\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} (2\pi)^{2k}}{2(2k)!} B_{2k} \right)_{n \rightarrow +\infty} = \frac{3}{4} + \lim(n)_{n \rightarrow +\infty} \right) \quad (26.2)$$

Somme des $\zeta(2k+1)$ Ici $n = n_{+\infty}$ pour la puissance de q .
On pose $S' = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots = \sum_{q=2}^{n_{+\infty}} \sum_{k=0}^{n_{+\infty}} \frac{1}{q^{2k+1}} =$
 $\sum_{q=2}^{n_{+\infty}} \frac{q}{q^2-1} - \sum_{q=2}^{n_{+\infty}} \frac{1}{q^2-1} \times \frac{1}{q^{2n+1}} = \frac{1}{2} \sum_{q=2}^{n_{+\infty}} \left(\frac{1}{q-1} + \frac{1}{q+1} \right) - \sum_{q=2}^{n_{+\infty}} \frac{1}{q^2-1} \times$
 $\frac{1}{q^{2n+1}} = \frac{1}{2} \times \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots \right) - \sum_{q=2}^{n_{+\infty}} \frac{1}{q^2-1} \times \frac{1}{q^{2n+1}} =$
 $\frac{1}{2} \left(2 \sum_{q=1}^{n_{+\infty}} \frac{1}{q} - \frac{3}{2} - \frac{1}{n_{+\infty}+1} \right) - \sum_{q=2}^{n_{+\infty}} \frac{1}{q^2-1} \times \frac{1}{q^{2n+1}}.$
Soit $\epsilon = \frac{1}{q^{2n_{+\infty}}}$ alors $-\ln(q) = \frac{\epsilon}{2n_{+\infty}}$. Or, $\epsilon < 1$, la seule solution apparaît $\epsilon = 0$ qui conduit alors à une indétermination du type " $\frac{0}{0}$ ". Donc $\sum_{q=2}^{n_{+\infty}} \frac{1}{q^2-1} \times \frac{1}{q^{2n+1}} = 0$. D'autre part pour calculer la somme des $\zeta(2k+1)$ il nous faut rajouter $n_{+\infty} + 1$ unités.
On déduit alors :

$$\left(\sum_{k=1}^{n_{+\infty}} \zeta(2k+1) \right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2n_{+\infty}+2} + n_{+\infty} \quad (26.3)$$

ou encore dans le cadre de l'infini potentiel :

$$\lim(\sum_{k=0}^n \zeta(2k+1))_{n \rightarrow +\infty} = \frac{1}{4} + \zeta + \lim(\ln(n))_{n \rightarrow +\infty} + \lim(n)_{n \rightarrow +\infty} \quad (26.4)$$

qui nous donne aussi

$$\lim(\sum_{k=1}^n \zeta(2k+1))_{n \rightarrow +\infty} = \frac{1}{4} + \lim(n)_{n \rightarrow +\infty} \quad (26.5)$$

Somme des $\zeta(k)$ et somme alternée des $\zeta(k)$ On déduit des résultats précédents dans le cadre de l'infini potentiel

$$\lim(\sum_{k=2}^{2n} \frac{\zeta(k)}{n})_{n \rightarrow +\infty} = 2 \quad (26.6)$$

ainsi que :

$$\lim(\sum_{k=2}^{2n} (-1)^k \zeta(k))_{n \rightarrow +\infty} = \frac{1}{2} \quad (26.7)$$

Deuxième partie

Physique

Chapitre 27

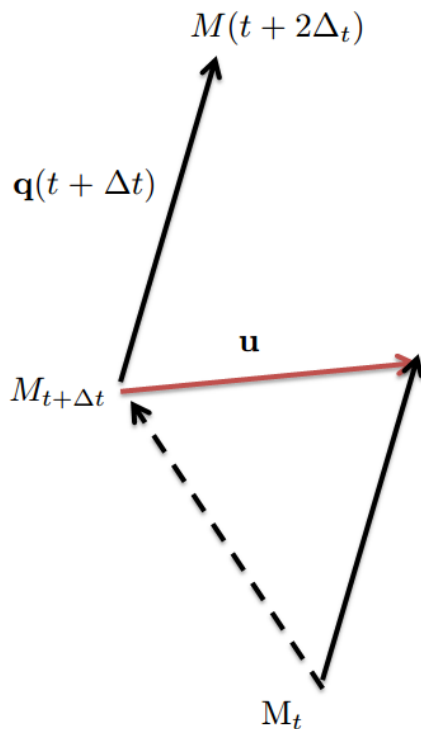
L'inertie

27.1 De la relation fondamentale de la dynamique à l'inertie

Nous nous représentons l'état du système en $t + \Delta t$ (page : 170 : figure 27.1). Nous avons le vecteur $\mathbf{q}(t)$ qui n'est plus référencé dans le triangle vectoriel. Or le système doit être représenté par un triangle vectoriel. Nous remarquons aussi, que l'extrémité du vecteur $\mathbf{q}(t)$ est au point $M_{t+\Delta t}$. Donc, il participe à l'état du système à la date $t + \Delta t$.

Il est logique qu'un représentant de $\mathbf{q}(t)$ existe. Nous l'appelons quantité d'inertie du système en $t + \Delta t$, et nous le nommons $\mathbf{q}_i(t + \Delta t) = \mathbf{q}(t)$. On remarque également que le vecteur $\mathbf{u} = \Delta \mathbf{q}$ doit être respecté, ce qui est le cas avec $\mathbf{q}_i(t + \Delta t)$.

Théorème 27. *Inertie Toute quantité de mouvement à la date t , définit en $t + \Delta t$ une quantité d'inertie $\mathbf{q}_i(t + \Delta t) = \mathbf{q}(t)$.*

FIGURE 27.1 – État du système en $t + \Delta t$.

27.2 Deux formes d'inertie

Newton définit ainsi la première loi du mouvement :

Définition 15 (Première loi du mouvement). *Tout corps est préservé en son état de repos ou de mouvement rectiligne, sauf si des forces « imprimées » le contraignent de changer.*

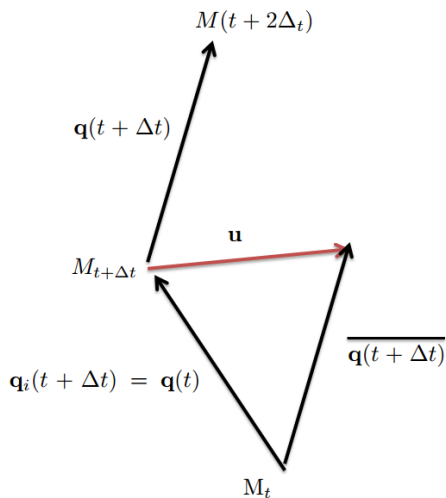


FIGURE 27.2 – L'inertie.

On va distinguer deux cas :

- le corps libre.
- le corps pris dans une dynamique causée par une force résultante.

27.3 Corps libre

Définition 16. On appelle *corps libre* un point matériel sur lequel il ne s'exerce aucune action. Il est équivalent de dire que sa quantité de mouvement est invariable.

Il s'applique donc sur le corps $\mathbf{q}(t)$ et $\mathbf{q}(t + \Delta t)$. On a alors $\mathbf{q}(t + \Delta t) = \mathbf{q}(t) \Leftrightarrow \Delta \mathbf{q} = 0$. On peut dire alors que $\mathbf{q}(t)$ se

prolonge sur la droite en $t + \Delta t$ et définit une quantité d'inertie. Alors $\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_i(t + \Delta t) = \mathbf{q}(t + \Delta t)$.

Théorème 28 (d'Inertie 1). *Tout mouvement libre s'effectue avec une quantité de mouvement constante en grandeur et dimension.*

On aurait pu faire un raisonnement analogue avec la vitesse, qui est uniforme.

27.4 Corps non libre

Un corps non libre est un corps sur lequel s'applique une force résultante. On a Δq qui est égale à la force qui s'exerce sur le corps pendant Δt . On a alors trois termes $\mathbf{q}(t)$, $\mathbf{q}(t + \Delta t)$, $\mathbf{F}_r \cdot \Delta t$; qui sont pris dans une relation triangulaire. Pour se figurer toutes les relations qui s'appliquent sur le corps non libre en $]t; t + \Delta t[$, on voit que nous n'avons que deux termes $\mathbf{q}(t + \Delta t)$, $\mathbf{F}_r \cdot \Delta t$. Nous pouvons cependant prolonger $\mathbf{q}$ en $\mathbf{q}_i(t + \Delta t)$ qui est la quantité d'inertie du corps en $t + \Delta t$.

Chapitre 28

Relation Fondamentale de la dynamique

28.1 Le système formel

Soit un système corporel Ω . On associe à Ω , un système formel, avec les variables agissant sur le système

1. Δt , un temps infinitésimal.
2. $\mathbf{q}(t + \Delta t)$, la quantité de mouvement à la date $t + \Delta t$.
3. $\mathbf{q}_i(t + \Delta t)$, la quantité d'inertie à la date $t + \Delta t$, qui vaut $\mathbf{q}(t)$.
4. La force résultante $\mathbf{F}_r$, qui s'applique sur le système corporel entre les dates t et $t + \Delta t$.

On a résumé les diverses actions dans la figure avec le triangle vectoriel (page : 174 : figure 28.1).

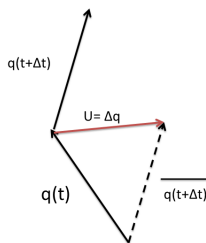


FIGURE 28.1 – Relation fondamentale de la dynamique (cas de base).

28.2 La dynamique

28.2.1 La force résultante

Sur la figure 22.1, $\mathbf{u}$ s'applique entre les dates t et $t + \Delta t$. La force résultante agit sur chaque élément du pas Δt .

Soit $\mathbf{u} = \mathbf{F}_r \cdot \Delta t \Leftrightarrow \frac{\Delta \mathbf{q}}{\Delta t} = \mathbf{F}_r$ où Δt représente un pas infinitésimal.

28.2.2 Équation aux dimensions

Nous avons une équivalence entre les $N.s$ de la force résultante pendant le pas Δt et la variation de la quantité de mouvement en $Kg.m/s$. Si nous passons le Δt à gauche de l'égalité, (en dénominateur), on retrouve dans la dimension : $Kg.m/s^2$, l'expression de l'unité d'une force : soit la dimension de $\mathbf{F}_r$, en newton : N .

28.2.3 Le cas de base $F_r > 0$

Donc l'équation aux dimensions est satisfaite. La force s'applique de Ω vers l'origine de la force, en O . On déduit le théorème.

Théorème 29. $F_r = \dot{q}$.

28.2.4 Situation d'équilibre

On distinguera deux situations d'équilibre pour le cas où $F = 0$.

Équilibre instable

C'est le cas où $\Delta q = 0$, avec $q(t + \Delta t) = q(t) \neq 0$. Nous nous trouvons donc dans une situation d'équilibre instable.

Équilibre stable

C'est le cas où $\Delta q = 0$, avec $q(t + \Delta t) = q(t) = 0$. Nous nous trouvons donc dans une situation d'équilibre stable.

28.2.5 Retournement de la force F .

$F_r < 0$ et $q(t + \Delta t) < 0 < q(t)$

Donc, l'orientation de $q(t + \Delta t)$ est de sens opposé à celle de $q(t)$. On conserve un amortissement de la quantité de mouvement. On ne peut pas faire de remarque générale quant à un changement du sens de la dynamique.

$$\mathbf{q}(t + \Delta t) < \mathbf{q}(t) < \mathbf{0} \Rightarrow \Delta \mathbf{q} < \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{F}_r < \mathbf{0}$$

Alors on observe un renversement de l'orientation de la dynamique. On conserve un amortissement de la quantité de mouvement, mais qui n'a pas de sens, vu qu'on inverse l'orientation des quantités de mouvement.

28.3 Extension du domaine d'application de la RFD

Comme la RFD est un théorème dans un système formel associé. On va étendre la RFD à d'autres domaines formels, distincts de la mécanique classique. Nous trouverons des quantités dynamiques, qui seront équivalentes aux quantités de mouvement de la mécanique classique, mais appliquées à d'autres systèmes formels. Il en découle le théorème de la relation fondamentale de la dynamique généralisée (RFDG).

Théorème 30 (RFDG). $\mathbf{F}_r = \dot{\mathbf{q}}$.

Chapitre 29

Forme de l'espace

29.1 Les plans

29.1.1 Structures planaires

Préambule

On rappelle d'une part que les nombres transfinis sont un prolongement des entiers pour $\mathbb{T}_{\mathbb{N}}$ et un prolongement des réels pour $\mathbb{T}_{\mathbb{R}}$. On distinguera deux droites pour associer les nombres aux individus-grains.

- $\Delta = (-n_{\infty}, n_{\infty})$ qui sera la droite réelle.
- $\Delta_{\mathbb{T}_{\mathbb{R}}} = (-2^{n_{\infty}}, 2^{n_{\infty}})$ qui sera la droite réelle transfinie. C'est à dire qu'on étendra Δ aux nombres réels transfinis.

On rappelle aussi qu'on peut concevoir Δ et $\Delta_{\mathbb{T}_{\mathbb{R}}}$ comme des infinis actuels. Mais on pourra également les considérer sous l'angle de l'infini potentiel.

Comme tout plan réel $\mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}$ se ramène à un plan complexe $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}$. On

va structurer des plans à partir de $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}$.

Les plans en jeu

On a $\mathcal{P}_{\mathbb{C}} = \Re \times \Im = (-n_{\infty}; n_{\infty}) \times \imath(-n_{\infty}; n_{\infty})$. Maintenant, on pose $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}^{\star} = \Re^{\star} \times \Im^{\star} = (-2_{\infty}^n; 2_{\infty}^n) \times \imath(-2_{\infty}^n; 2_{\infty}^n)$, tel que $\mathcal{P}_{\mathbb{C}} \subset \mathcal{P}_{\mathbb{C}}^{\star}$ (page : 178 : figure 29.1). Autrement dit, $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}^{\star}$ est un prolongement

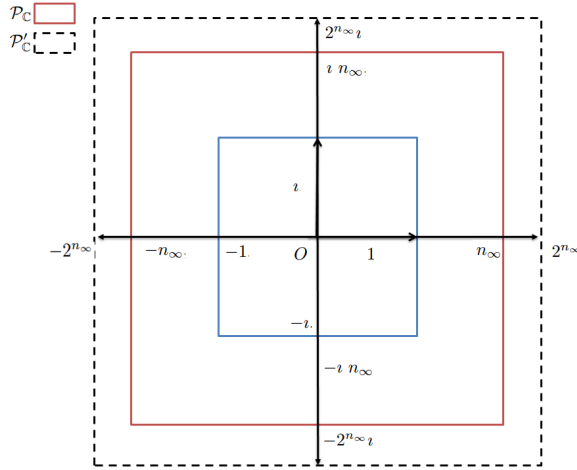


FIGURE 29.1 – $\mathcal{F}_1$ Plans d'équivalence.

(dans le domaine transfini) de $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}$. Ou encore $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}$ est une restriction de $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}^{\star}$. On suppose les deux plans munis d'un même niveau d'agraindissement $NA = g^m$. On remarque que ces deux plans $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}$ et $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}^{\star}$ sont superposés. Passons au $NA = g^{m+1}$. Alors, le plan $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}^{\star}$ se ramène à un plan modulaire fini $[-1; 1] \times [-1; 1]$ qui dérive d'un plan fini $[-1; 1] \times [-\imath; \imath]$. Le plan $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}$ sera également ramené dans un plan fini inclus dans $[-1; 1] \times [-\imath; \imath]$. On conserve la superposition des plans. dans le domaine fini.

On rappelle qu'en mécanique quantique, l'expression d'un plan se fait dans le domaine complexe. D'autre part un des axiomes de la mécanique quantique stipule la superposition des états. Soit nous voyons là, une preuve expérimentale dans l'infiniment petit de la validité du modèle mathématique développé.

Passage au tore Γ_2

Soit le plan $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}^*$ une extension de $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}$ dans le $NA = g^{m-1}$. Avec $A'(0, 2_{\infty}^n \imath)$, $C'(0, -2_{\infty}^n \imath)$, $B'(2^{n\infty}, 0)$, $D'(-2^{n\infty}, 0)$. Alors on identifie les droites et les cercles à l'infini suivants : $(A'C') = \Delta = C_{\infty,1,NS}$, et $(B'D') = \Delta' = C_{\infty,2,NS}$ qui sont des rectifications de cercles NS . Considérons $(OA') = \Delta_1^{1/2,>}$, alors dans tout voisinage de diamètre ϵ quelconque, de A' il existe des éléments du voisinage qui appartiennent à $(OC') = \Delta^{1/2,<}$. On peut dire que $A' \equiv C'$ et (A', O, C') forme un cercle à l'infini non standard. De la même manière on dira que $B' \equiv D'$ et (B', O, C') forme un cercle à l'infini non standard (NS).

Changeons de $NA : g^m \mapsto g^{m+1}$. Donc on peut coller A' et C' pour former un tube (fini). On remarquera aussi que le tube peut être construit de deux façons : en rabattant le segment supérieur $[A, B]$ dans le sens trigonométrique. Comme nous associons à $\imath$ et plus généralement à l'axe imaginaire, la réalité du plan. En conséquences, nous conservons le tube avec des diamètres imaginaires (page : 180 : figure 29.2). Alors les cercles du tube sont de diamètre $\frac{2\imath}{\pi}$. En collant B' et D' , après avoir appliqué une déformation du tube, on construit un tore de collier nul Γ_2 . C'est équivalent à coller les disques aux extrémités du tube. On déforme le tube de

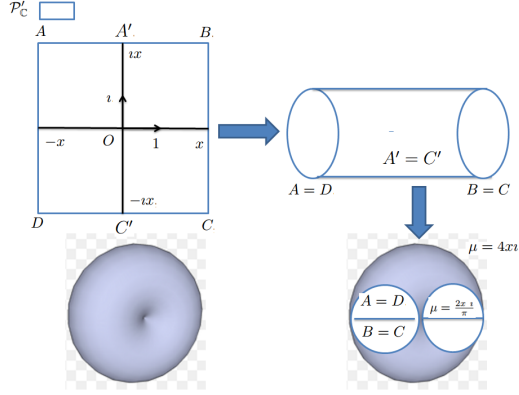


FIGURE 29.2 – $\mathcal{F}_2$, Tore construit à partir du plan fini (A, A', B, C, C', D) .

manière à avoir un tore de collier nul, pour conserver un diamètre de l'équateur, minimal.

On voit qu'on aurait pu former le tube en procédant suivant un sens trigonométrique ou en sens inverse. Cela met néanmoins en évidence deux faces du tube. Par convention, on dira que la face interne sera réservée aux systèmes corporels et la face externe aux systèmes informationnels, associés.

Définition 17 (L'information). *L'information est ce qui donne forme au système corporel.*

Dans le domaine réel, un carré définit un tore plat par le collage des disques aux extrémités du tube. C'est-à-dire que la métrique euclidienne (le triangle de Pythagore) se transporte sur le tore sans modification (sous certaines hypothèses qu'on peut réfuter). Nous

appelons parallèles les grands cercle du tore (Γ_2), et méridiens, les petits cercles du tore, toujours pris sur Γ_2 . Alors la circonférence de l'équateur formé à partir du diamètre vaut 4ι . Elle pourrait aussi valoir 2, qui est la longueur du tube. Toutefois, cette grandeur serait incohérente si l'on évalue la circonférence de l'équateur à partir du diamètre de deux méridiens symétriques. Donc, on prend une circonférence imaginaire. Mais dans ce cas, nous perdons la notion de tore plat.

29.1.2 Plan complexe Recto-verso

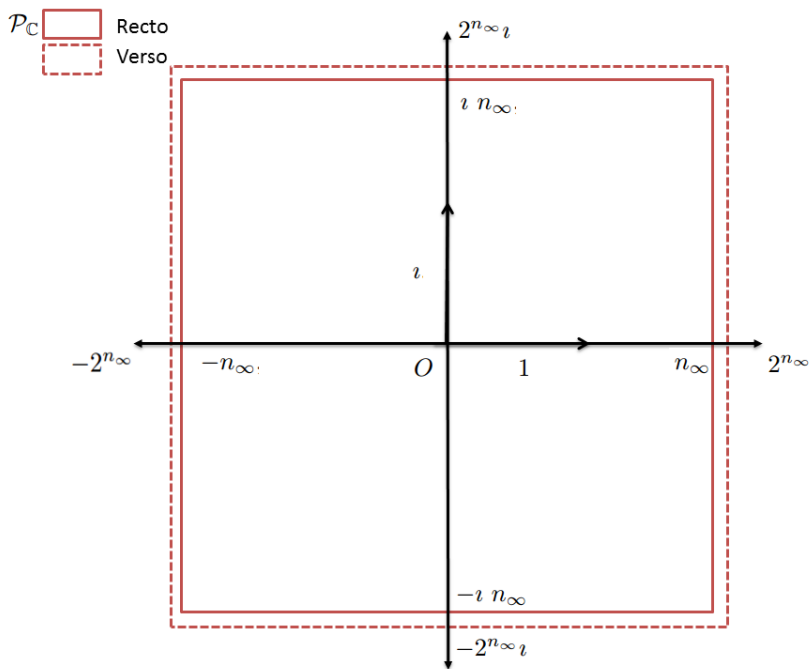
Construction

À partir du tube, puisque nous décrivons deux bords, en revenant sur le plan $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}^*$ avec le $NA = g^{m+1}$. Nous trouvons deux faces associées à ce plan (page : 182 : figure 29.3). On a indiqué en pointillé le verso du plan, qui sera l'expression de l'information. Ce sera également un plan complexe.

Rubans de Möbius naturels

Nous allons montrer une alternative à la construction du tube. Pour cela, remplaçons nous dans le plan délimité par les sommets (A, B, C, D) . Avec le $NA = g^{m-1}$, le plan fini devenait un plan infini. On rappelle que le plan est défini sur un recto et un verso. Il forme une bande à deux bords.

Maintenant, on agrège les sommets $C \mapsto B$ dans le sens trigonométrique, et $A \mapsto D$ dans le sens opposé. Tout point M dans un voisinage de $V_{\epsilon}(B)$ est aussi dans un voisinage $V_{\epsilon}(C)$. Et réciproquement, tout point M dans un voisinage de $V'_{\epsilon}(C)$ est aussi

FIGURE 29.3 – $\mathcal{F}_3$, Plan complexe Recto-Verso.

dans un voisinage $V'_\epsilon(B)$. On peut dire que B et C sont équivalents, on peut les échanger. Cela revient à échanger $+\infty$ et $-\infty$. Les agrégations de A et C , ainsi que de B et D sont équivalentes à un collage, induisent une torsion de la bande suivant l'axe $A'C'$ en O . Dans ce cas on construit un ruban de Möbius à l'infini, qui forme une bande à un seul bord, qui n'est pas enchevêtrée.

Par un changement du niveau d'agrandissement, de $g^{m-1} \mapsto g^m$, on conserve un ruban de Möbius, mais fini.

Théorème 31. *Le plan complexe étendu $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}$ formant un plan recto formé du système d'information, et d'un système corporel sur l'autre bord (verso), est équivalent à un ruban de Möbius. Il forme un espace à un seul bord où sont représentés distinctement les systèmes corporels et informationnels.*

29.1.3 Généralisation de la superposition

Puisque nous désirons nous figurer un espace où le corps posséderait une densité physique, d'être animé d'un mouvement ; il nous faut densifier (au sens de la topologie générale) le tore Γ_2 . Rappelons que Γ_2 correspond à $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}^*$ et qu'il existe également un tore $\Gamma'_2 \subset \Gamma_2$ qui décrira $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}$. On a alors une superposition des deux tores, mais non adjacents, dans la représentation torique.

Si nous construisons $2^{n\infty}$ tores $\Gamma_{2,k}$, où $\forall k \in \mathbb{T} : \Gamma_{2,1} = O, \Gamma_{2,k} \subset \Gamma_2$. Nous construisons un tore Γ_2 plein, de collier nul. Comme $\Gamma_3 = \bigcup_{k=1}^{2^{n\infty}} \Gamma_{2,k}$, nous avons construit un hypertore.

Soit un $NA = g^m = f_d$, où f_d est une forme torique de dimension d . Alors $g^{m+1} = 2^{n\infty} g^m = 2^{n\infty} f_d = f_{d+1}$. On remarque que les $\Gamma_{2,k}$ sont des fibres de Γ_3 . À partir d'une base $[-1; 1]$. On peut aussi fibrer tous les $\Gamma_{2,k}$ à partir de la base $[-1; 1]$ et d'une fibre construite par le grand cercle C , avec deux fibres circulaires orthogonales au grand cercle qui balaient le tore $\Gamma_{2,k}$ sur $[0; 2\pi[$.

Soit la fibration de S_3 par des fibres $S_{2,k}$. Alors $S_3 = \bigcup_{k=1}^{2^{n\infty}} S_{2,k}$. On a pour une densité et une hyperdensité physiques.

$$S_3 = \int_D S_2 = S_{2,\text{pleine}} / \text{dense} = B_1$$

$$S_3 \equiv \int_D \int_V S_2 = \int_D B_1 = B_2 = S_{2,\text{pleine}} / \text{Hyperdense}$$

$$\Gamma_3 \equiv \int_D \int_V \Gamma_2 = \Gamma_{2,\text{plein}} / \text{Hyperdense}$$

$$\Gamma_3 = \int_D \Gamma_2 = \Gamma_{2,\text{plein}} / \text{dense}$$

Si l'on revient au plan complexe $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}^*$, l'image réciproque des tores $\Gamma_{2,k}$ renvoie des plans $(A_k, B_k, C_k, D_k)_{1 \leq k \leq 2^{n_\infty}}$, tous superposés (page : 184 : figure 29.4). On remarquera que le principe de superposition

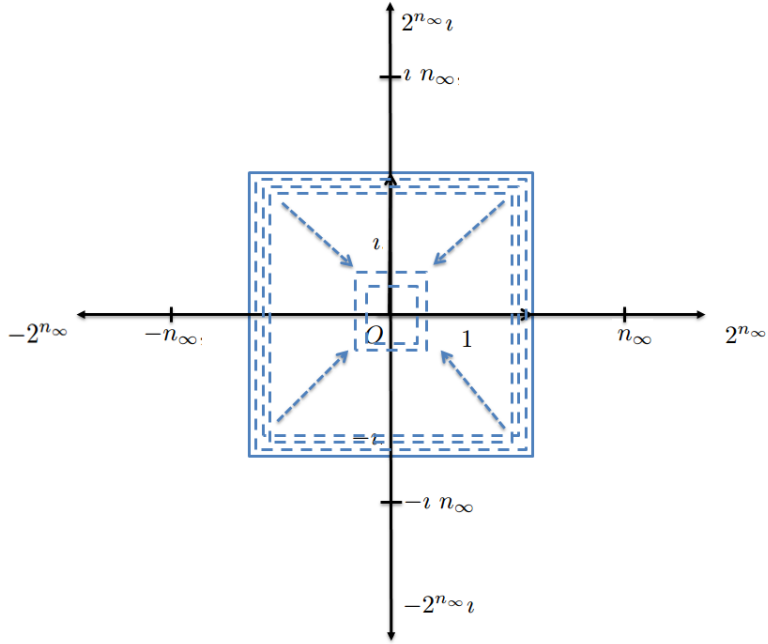


FIGURE 29.4 – $\mathcal{F}_4$. Superposition des plans.

de la mécanique quantique s'applique sur tous les plans construits. Que nous soyons dans le domaine fini, comme infini.

29.2 Passage à l'hypertore et à l'hyper-sphère

Par la topologie du grain, nous encapsulons dans un grain de calibre $2g^m$ deux grains g^m . En reprenant notre tore Γ_3 de collier nul, on encapsule les deux fibres circulaires symétriques dans un grain circulaire qui sera une fibre de S_3 . En généralisant cette opération sur les tores $\Gamma_{2,k}$, on encapsule les tores $\Gamma_{2,k}$ dans des sphères $S_{2,k}$. Donc $\bigcup_{k=1}^{2^{n\infty}} S_{2,k}$ constitue une fibration de S_3 et S_3 encapsule Γ_3 qui est un tore $\Gamma_{2,\text{plein}} / \text{dense}$ (page : 185 : figure 29.5).

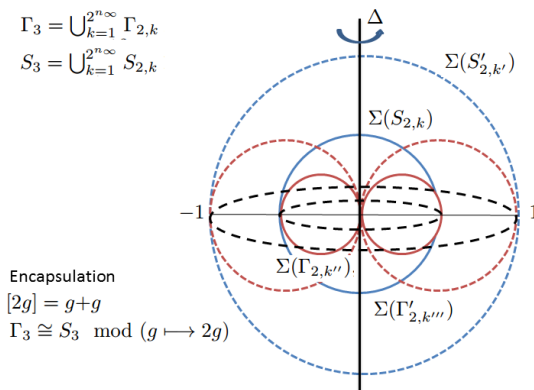


FIGURE 29.5 – $\mathcal{F}_5$, Fibrations.

À ce stade nous pouvons expliquer deux phénomènes expérimentaux de la vie macroscopique. Tout d'abord, si nous avons la perception d'être dans un espace euclidien E_3 , c'est parce que nous sommes encapsulés dans une boule B_1 . D'autre part, si nous considérons la sphère stellaire, c'est qu'elle représente une sphère $S_{2,k}$.

29.3 Enjeu de la fibration

En premier lieu, nous pouvons dire que les espaces dans lesquels nous sommes, sont pris dans des fibres sphériques qui nous encapsulent. Ainsi :

1. La planète terre.
2. Le cosmos.
3. Le système solaire.
4. Un être humain.

Mais il existe d'autres fibres, rapportées à un plan de dimension deux, planaire. Par exemple un ADN, un gène, un atome pourront se figurer par des fibres circulaires.

Par la rectification du cercle, nous avons construit des fibres circulaires qui se rectifiaient. Nous pensons que cette rectification d'une fibre initiale qui se dilate, dans laquelle est encapsulée un système corporel, autorise à rejoindre la dimension informationnelle de la réalité corporelle, qui est de l'autre côté du plan. C'est donc l'axe imaginaire, qui est aussi le cercle à l'infini, qui servirait de médiateur entre le système corporel, fibré et dilaté, et le système informationnel.

29.4 Création de mondes intriqués et parallèles

En mécanique quantique, nous avons vu que nous distinguons l'enchevêtrement de l'intrication. L'enchevêtrement est un système

non corrélé, comme des pelotes de laines ou les fils seraient mélangés de façon anarchique. L'intrication est la mise en relation de correspondance de deux systèmes parfaitement corrélés entre les propriétés.

Voyons l'expérience du chat de Schrödinger (1937) et d'Haroche (2008). Nous voyons que cette expérience met enjeu le principe de non contradiction (page : 187 : figure 29.6). Nous disons que nous

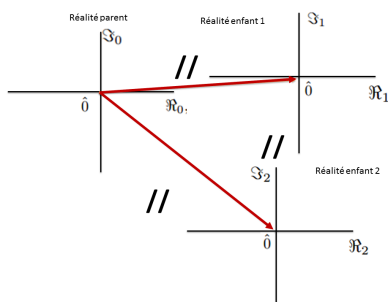


FIGURE 29.6 – $\mathcal{F}_6$, Interprétation de l'expérience du chat de Schrödinger

sommes face à une contradiction, sur une variable objective telle qu'une quantité de mouvement, qui aurait deux valeurs distinctes à la même date t ; définit la création de deux nouveaux mondes parallèles. Ils sont des copies de notre monde, avec pour l'un la quantité de mouvement $\mathbf{q}_1$, et l'autre la quantité de mouvement $\mathbf{q}_2 \neq \mathbf{q}_1$. Ces deux mondes étant parallèle à notre monde, on pourrait réaliser des mesures sur les quantités de mouvement.

Chapitre 30

La réalité

30.1 Approche épistémologique

30.1.1 Qu'est-ce que la réalité ?

Définition 18 (Existant). *Système pris dans un espace $\mathcal{E} = \mathcal{E}_f \times \mathcal{E}_{en-soi}$.*

Définition 19 (Réalité). *La réalité est un espace de l'existant, tel que les transformations de l'existant sont égales à la réunion de toutes les mesures prises sur les propriétés.*

30.1.2 La réalité d'un système physique

Définition 20 (Phénomène). *Un phénomène est un ensemble de propriétés (p_j) d'un système qui se donne à mesurer et à voir.*

Un système sera défini par exemple par :

— La position, l'impulsion, le spin . . .

- La position, la vitesse, l'accélération, la quantité d'inertie, la quantité de mouvement, ...

30.2 Approche physique

30.2.1 L'enchevêtrement quantique

Définition 21 (Enchevêtrement). *Systèmes physiques pris dans un produit tensoriel, avec une seule réalité $\mathfrak{S}$, qui regroupe les réalités des systèmes en jeu.*

Soit $\mathcal{B}_1 = (\mathbf{e}_{11}, \mathbf{e}_{12})$ la base d'un espace hilbertien $\mathcal{E}_1$, et $\mathcal{B}_2 = (\mathbf{e}_{21}, \mathbf{e}_{22})$ la base d'un espace hilbertien $\mathcal{E}_2$. Considérons $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$. On remarque que $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ partagent la même base imaginaire.

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= x_1 \mathbf{e}_1^1 + x_2 \mathbf{e}_1^2, \\ \mathbf{y} &= y_1 \mathbf{e}_2^1 + y_2 \mathbf{e}_2^2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{x} \otimes \mathbf{y} &= (x_1 y_1) e_1^1 \otimes e_2^1 + (x_1 y_2) e_1^1 \otimes e_2^2 + (x_2 y_1) e_1^2 \otimes e_2^1 \\ &\quad - (x_2 y_2) e_1^2 \otimes e_2^2.\end{aligned}$$

Si nous voulons aller plus loin dans le développement vers l'expression d'un état intriqué, nous sommes bloqués.

30.2.2 L'intrication physique

Définition 22 (Intrications). *Systèmes physiques parfaitement corrélés sur des mesures concernant des propriétés identiques, qui forment une partition des attributs du système.*

Soit $\mathcal{B}_1 = (\mathbf{e}_{11}, \imath_1 \mathbf{e}_{12})$ la base d'un espace hilbertien $\mathcal{E}_1$, et $\mathcal{B}_2 = (\mathbf{e}_{21}, \imath_2 \mathbf{e}_{22})$ la base d'un espace hilbertien $\mathcal{E}_2$. Considérons $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$.

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= x_1 \mathbf{e}_1^1 + x_2 \imath_1 \mathbf{e}_1^2, \\ \mathbf{y} &= y_1 \mathbf{e}_2^1 + y_2 \imath_2 \mathbf{e}_2^2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{x} \otimes \mathbf{y} &= x_1 y_1 \mathbf{e}_1^1 \otimes \mathbf{e}_2^1 + x_1 y_2 \imath_2 \mathbf{e}_1^1 \otimes \mathbf{e}_2^2 + x_2 y_1 \imath_1 \mathbf{e}_1^2 \otimes \mathbf{e}_2^1 \\ &\quad + x_2 y_2 \imath_1 \imath_2 \mathbf{e}_1^2 \otimes \mathbf{e}_2^2.\end{aligned}$$

On a $\imath_1 \cdot \imath_2 = \frac{(\imath_1 | \imath_2)}{\cos(\imath_1; \imath_2)}$.

Les bases de E_1 , E_2 sont orthogonales, soit nous avons une indétermination dans le développement, causée par : $\imath_1 \perp \imath_2$.

30.3 Approche mathématique

30.3.1 Base de dimension un pour espace de dimension 2

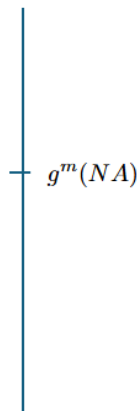
Soit $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}^*$ muni d'une base $\mathcal{B} = ((\mathbf{1}, \mathbf{0}); \imath)$, où $\imath = (\mathbf{0}, \mathbf{1})$.

Alors $x(\mathbf{1}, \mathbf{0}) + y\imath = -x(\mathbf{0}, \mathbf{1}) + y\imath \equiv x(-\imath)(\mathbf{0}, \mathbf{1}) + y(\mathbf{0}, \mathbf{1})$.

Théorème 32 (Réduction d'une base complexe). $x(-\imath)(\mathbf{0}, \mathbf{1}) + y(\mathbf{0}, \mathbf{1}) = (-x\imath + y)(\mathbf{0}, \mathbf{1})$.

Autrement dit, comme $(-x\imath + y)$ est un nombre complexe, nous avons construit une base de dimension 1 (page : 192 : figure 30.1). On voit que $-\imath$ agit comme un opérateur de rotation sur $(\mathbf{0}, \mathbf{1})$, ce qui entraîne une distorsion de l'espace qui devient un espace de dimension 1 complexe (où deux réelle).

$$g^{m+2} = \mathfrak{S} = C_\infty = \Delta_\infty$$

FIGURE 30.1 – $\mathcal{F}_1$, Espace de dimension 1.

30.3.2 Construction de $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}^*$ (plan complexe prolongé)

Soit la transformation d'un espace de dimension un vers un espace de dimension 2 sous l'action d'un opérateur sur $\mathfrak{S}$.

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} &\longrightarrow \mathfrak{S} \times \mathfrak{R} \\ (x, y) &\longrightarrow x(-\iota)(\mathbf{0}, \mathbf{1}) + y(\mathbf{0}, \mathbf{1}) = x(\mathbf{1}, \mathbf{0}) + y(\mathbf{0}, \mathbf{1}). \end{aligned}$$

30.3.3 Pseudo-identité

Sous l'action de l'opérateur $-\iota$, on construit un repère complexe $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}^*$, où tout point M du plan sera repéré par deux variables x comme il suit : $x(\mathbf{1}, \mathbf{0}) + y(\mathbf{0}, \mathbf{1})$.

Un espace de dimension un (imaginaire), est une pseudo-identité avec un plan de dimension deux réels, ou de dimension une complexe. Si l'on répète l'action de l'opérateur $-i$ on crée deux droites vectorielles symétriques (page : 193 : figure 30.2).

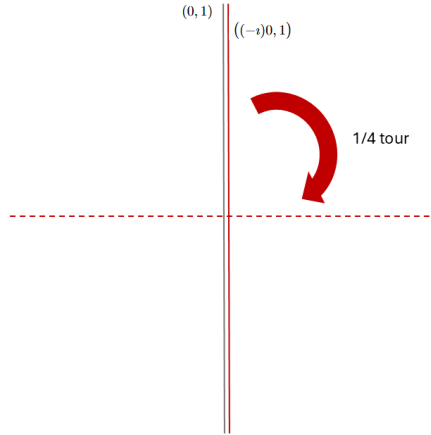


FIGURE 30.2 – $\mathcal{F}_3$, Construction de $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}^*$.

On peut se demander si la rotation de $-\frac{\pi}{2}$ de $\mathfrak{S}$, ne renvoie pas un axe imaginaire. Mais nous regardons la formule d'équivalence $x(\mathbf{0}, \mathbf{1}) + y(\mathbf{0}, \mathbf{1})$ pour $x = 1$. Alors nous appliquons une $Rot(O, -\frac{\pi}{2})[(\mathbf{0}, \mathbf{1})]$, elle est équivalente au symétrique de $-(\mathbf{1}, \mathbf{0})$ par rapport à O , qui vaut $(\mathbf{1}, \mathbf{0})$. Donc on perd la notion d'imaginaire par l'action de l'opérateur, nous créons $\mathfrak{R}$.

On remarquera que si l'on passe au $NA = g^{m+1}, g^{m+2}$ se transforme

en un cercle fini. Si l'on passe au $NA = g^{m+2}$, g^{m+2} se transforme en un grain d'épaisseur nulle. Si l'on passe au $NA = g^{m+3}$ l'espace devient vide ; mais il est muni d'une dimension en profondeur, ou axiale, ou bien encore d'une dimension interne (page : 194 : figure ??).

30.3.4 Accès à l'information

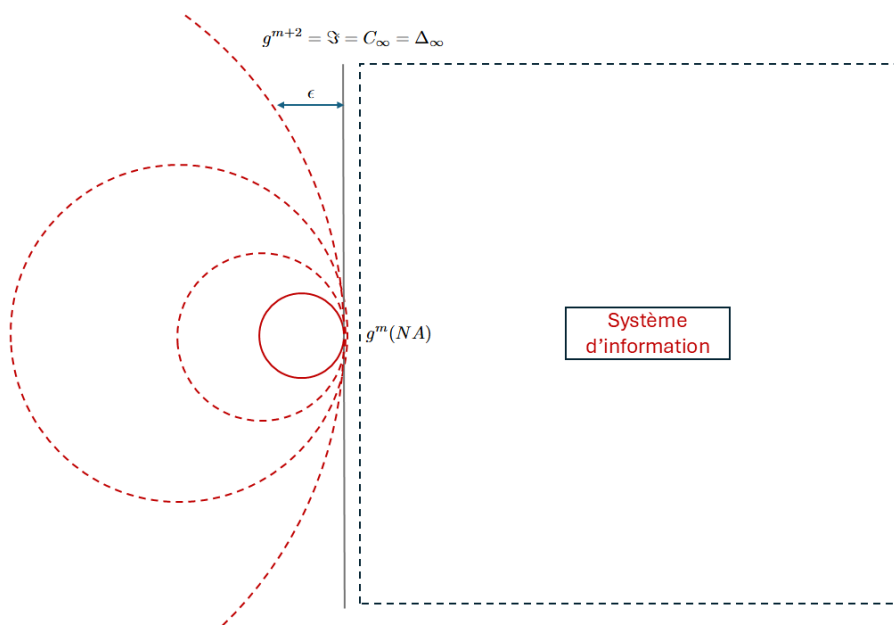


FIGURE 30.3 – $\mathcal{F}_2$, Dilatation d'une fibre et accès à l'information d'une réalité.

Table des figures

2.1	Réciproque de la Rectification. et limite de la géométrie euclidienne.	42
2.2	Aspect topologique.	43
5.1	Trajectoire d'une chute libre.	51
6.1	$\mathcal{F}_1$. Origine du grain.	56
6.2	Expression de g^{m+1} en fonction de g^m , par rapport à l'épaisseur du zéro.	59
6.3	$\mathcal{F}_3$ Mesures de longueur ou d'épaisseur.	59
6.4	$\mathcal{F}$: Grain fractalisé.	61
6.5	Contraction de $\mathcal{F}_4$	63
6.6	Dilatation du continu.	64
6.7	Dilatation à l'infini par paliers.	65
6.8	Les circonférences du cercle complexe.	66
7.1	$\mathcal{F}_1$	70
7.2	$\mathcal{F}_2$	71
7.3	$\mathcal{F}_3$	72
7.4	$\mathcal{F}_4$	72

8.1	Un ensemble dénombrable.	76
8.2	Couples grains-réels	77
8.3	Axiome du choix.	78
8.4	Fonction de choix.	79
8.5	Paradoxe de la réflexivité.	81
8.6	Encapsulation.	83
8.7	Coupure de Dedekind. Cas 1.	84
8.8	Coupure de Dedekind. Cas 2.	85
8.9	Coupure de Dedekind. Cas 3.	86
8.10	Coupure de Dedekind. Cas 4.	87
10.1	$\mathcal{F}$. Transformations des formes	92
11.1	Rotation d'angle θ pour $z = \rho$	105
14.1	Suite harmonique.	114
18.1	$E_n = E_k \cup E$	130
18.2	Arrangement intra-classe.	130
18.3	Arrangement inter-classe.	131
18.4	Arrangements inter-classes et Combinaisons.	132
20.1	Intégration de Riemann sur l'axe (y'Oy).	139
20.2	Intégration de Henstock-Kurzeil sur l'axe (y'Oy) Pour calculer $\int f^{-1}$	140
22.1	Partition de E	145
27.1	État du système en $t + \Delta t$	170
27.2	L'inertie.	171
28.1	Relation fondamentale de la dynamique (cas de base).	174

29.1 $\mathcal{F}_1$ Plans d'équivalence.	178
29.2 $\mathcal{F}_2$, Tore construit à partir du plan fini (A, A', B, C, C', D)	180
29.3 $\mathcal{F}_3$, Plan complexe Recto-Verso.	182
29.4 $\mathcal{F}_4$, Superposition des plans.	184
29.5 $\mathcal{F}_5$, Fibrations.	185
29.6 $\mathcal{F}_6$, Interprétation de l'expérience du chat de Schrödinger	187
30.1 $\mathcal{F}_1$, Espace de dimension 1.	192
30.2 $\mathcal{F}_3$, Construction de $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}^*$	193
30.3 $\mathcal{F}_2$, Dilatation d'une fibre et accès à l'information d'une réalité.	194