

Compacité dans $\mathbb{R}$

Approche non standard via $\tilde{\mathbb{R}}$

Suite de l'axiomatique du grain

29 mai 2026

Table des matières

1	Rappels et notations	2
2	Caractérisation non standard de la compacité	2
3	Conséquence 1 : théorème de Bolzano-Weierstrass	3
4	Conséquence 2 : théorème de Heine (continuité uniforme)	3
5	Conséquence 3 : théorème des valeurs extrêmes	4
6	Conséquence 4 : théorème des valeurs intermédiaires	4
7	Synthèse	5
8	Points laissés ouverts	5

Introduction

Ce document développe la notion de compacité dans $\mathbb{R}$ en utilisant le cadre $\widetilde{\mathbb{R}}$ et la fonction partie standard.

L'idée centrale est que la compacité, classiquement définie par les recouvrements ouverts ou les sous-suites convergentes, admet dans le cadre non standard une caractérisation directe d'une grande simplicité : un fermé borné de $\mathbb{R}$ est exactement un ensemble dont tout point de l'extension non standard admet une partie standard dans l'ensemble.

Cette caractérisation rend les démonstrations des grands théorèmes (Bolzano-Weierstrass, Heine, valeur extrême) extraordinairement courtes, parfois deux lignes là où l'analyse classique demande plusieurs pages.

1 Rappels et notations

Définition 1 (Extension non standard d'un ensemble). *Soit $A \subseteq \mathbb{R}$. L'extension non standard de A est*

$$A^* := \{x \in \widetilde{\mathbb{R}} : \chi_A(x) = 1\},$$

où χ_A^* est l'extension par transfert de la fonction caractéristique $\chi_A : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$ (formule transférable si A est définissable au premier ordre).

Pour les ensembles définis par des inégalités polynomiales, comme les intervalles fermés $[a, b]$, l'extension est immédiate : $[a, b]^* = \{x \in \widetilde{\mathbb{R}} : a \leq x \leq b\}$.

Remarque 1 (Ensembles considérés). *Dans toute cette section, on travaille avec des ensembles $A \subseteq \mathbb{R}$ standard, c'est-à-dire définissables sans référence à n_∞ ni 2^{n_∞} . Les ensembles définis avec ces constantes (par exemple $\{x : x \leq 1/n_\infty\}$) ne se transfèrent pas correctement et ne sont pas considérés ici.*

Définition 2 (Halo d'un ensemble). *Pour $A \subseteq \mathbb{R}$, le halo de A est*

$$\text{hal}(A) := \bigcup_{a \in A} \text{hal}(a) = \{x \in \widetilde{\mathbb{R}} : \exists a \in A, x - a \in \mathcal{I}\}.$$

2 Caractérisation non standard de la compacité

Théorème 1 (Caractérisation de Robinson). *Soit $K \subseteq \mathbb{R}$ un sous-ensemble standard. K est compact (au sens classique : fermé et borné) si et seulement si*

$$\forall a \in K^*, \quad a \in \widetilde{\mathbb{R}}_b \text{ et } \text{st}(a) \in K.$$

Autrement dit : tout point de l'extension non standard de K est borné et admet une partie standard dans K .

Démonstration. ($\Rightarrow$) Supposons K compact dans $\mathbb{R}$. Alors K est borné : il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que $|x| \leq M$ pour tout $x \in K$. Par transfert (la formule $\forall x \in K, |x| \leq M$ est transférable et vraie dans $\mathbb{R}$), $|a| \leq M$ pour tout $a \in K^*$. Donc $a \in \widetilde{\mathbb{R}}_b$.

Soit $s := \text{st}(a) \in \mathbb{R}$. Il reste à montrer $s \in K$. Supposons par l'absurde $s \notin K$. Comme K est fermé, son complémentaire est ouvert, donc il existe $\varepsilon > 0$ standard tel que $]s - \varepsilon, s + \varepsilon[\cap K = \emptyset$. Or $a - s$ est infinitésimal, donc $|a - s| < \varepsilon$, soit $a \in]s - \varepsilon, s + \varepsilon[$. Comme $a \in K^*$, on a (par transfert) $a \in]s - \varepsilon, s + \varepsilon[\cap K^*$.

Mais par transfert appliqué à $]s - \varepsilon, s + \varepsilon[\cap K = \emptyset$, on doit avoir $]s - \varepsilon, s + \varepsilon[\cap K^* = \emptyset$. Contradiction.

Donc $s \in K$.

($\Leftarrow$) Supposons que tout $a \in K^*$ soit borné et de partie standard dans K .

K est borné. Si K n'était pas borné, il existerait dans $\mathbb{R}$ une suite (x_n) avec $x_n \in K$ et $|x_n| \rightarrow \infty$. Par transfert, la formule « $\forall n \in \tilde{\mathbb{N}}, \exists x \in K^*, |x| \geq n$ » est vraie. En prenant $n = n_\infty$, on obtient $a \in K^*$ avec $|a| \geq n_\infty$, donc a infiniment grand. Mais alors $a \notin \tilde{\mathbb{R}}_b$, contredisant l'hypothèse.

K est fermé. Soit $s \in \mathbb{R}$ un point d'accumulation de K . Il existe une suite $(x_n) \in K^{\mathbb{N}}$ avec $x_n \rightarrow s$. Par transfert, l'extension (x_n^*) est telle que $x_n^* \in K^*$ pour tout $n \in \tilde{\mathbb{N}}_1$. En prenant $n = n_\infty$, $x_{n_\infty}^* \in K^*$ et $\text{st}(x_{n_\infty}^*) = s$ (par caractérisation non standard de la limite). Par hypothèse, $\text{st}(x_{n_\infty}^*) \in K$, donc $s \in K$. Donc K contient tous ses points d'accumulation, donc K est fermé. $\square$

Remarque 2 (Élégance de la caractérisation). *Cette caractérisation absorbe en une seule condition les deux propriétés classiques :*

- Borné : tout point de K^* est dans $\tilde{\mathbb{R}}_b$, ce qui garantit l'existence de la partie standard.
- Fermé : la partie standard reste dans K .

Le point standard est ainsi un témoin direct du fait que la « limite » d'un point de K^* revient dans K .

3 Conséquence 1 : théorème de Bolzano-Weierstrass

Théorème 2 (Bolzano-Weierstrass). *Toute suite bornée dans $\mathbb{R}$ admet une sous-suite convergente.*

Démonstration. Soit (u_n) une suite bornée dans $\mathbb{R}$: il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n| \leq M$ pour tout n . Posons $K := [-M, M]$, qui est compact (fermé borné). Tous les u_n sont dans K .

Soit u^* l'extension de (u_n) à $\tilde{\mathbb{N}}_1$ par transfert. Considérons $u_{n_\infty}^*$. Par transfert, $u_{n_\infty}^* \in K^*$. Par le théorème 1, $u_{n_\infty}^* \in \tilde{\mathbb{R}}_b$ et $\ell := \text{st}(u_{n_\infty}^*) \in K$.

Construction de la sous-suite convergente. On va montrer que ℓ est valeur d'adhérence de (u_n) , c'est-à-dire qu'il existe une sous-suite de (u_n) convergeant vers ℓ .

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, considérons la formule transférable :

$$\forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0, |u_n - \ell| < 2^{-k}.$$

Vérifions qu'elle est vraie dans $\tilde{\mathbb{R}}$. Pour n_0 donné, on prend $n = n_\infty : n_\infty \geq n_0$ (vrai dans $\tilde{\mathbb{N}}_1$), et $|u_{n_\infty}^* - \ell| < 2^{-k}$ car $u_{n_\infty}^* - \ell$ est infinitésimal. Donc la formule est vraie dans $\tilde{\mathbb{R}}$, et par transfert vraie dans $\mathbb{R}$.

On construit la sous-suite par récurrence : $\varphi(0) := 0$, et $\varphi(k+1) :=$ le plus petit $n > \varphi(k)$ tel que $|u_n - \ell| < 2^{-(k+1)}$ (existe par la formule précédente avec $n_0 = \varphi(k) + 1$).

Alors $|u_{\varphi(k)} - \ell| < 2^{-k}$ pour tout k , donc $u_{\varphi(k)} \rightarrow \ell$ quand $k \rightarrow \infty$. $\square$

Remarque 3. *Le cœur de la preuve — $u_{n_\infty}^*$ a une partie standard dans K — tient en deux lignes. La construction explicite de la sous-suite extraite, qui occupe le reste de la démonstration, est en réalité un théorème séparé sur les valeurs d'adhérence : « ℓ valeur d'adhérence de (u_n) ssi $\ell = \text{st}(u_n^*)$ pour un certain $n \in \tilde{\mathbb{N}}_1 \setminus \mathbb{N}$ ».*

4 Conséquence 2 : théorème de Heine (continuité uniforme)

Définition 3 (Continuité uniforme). *$f : A \rightarrow \mathbb{R}$ est uniformément continue si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in A, |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Proposition 1 (Caractérisation non standard de la continuité uniforme). *$f : A \rightarrow \mathbb{R}$ uniformément continue ssi pour tous $x, y \in A^*$,*

$$x - y \in \mathcal{I} \Rightarrow f^*(x) - f^*(y) \in \mathcal{I}.$$

Démonstration. Analogue à la caractérisation non standard de la continuité simple, en remplaçant le point fixé x_0 par une variable. Démonstration laissée en exercice (passage par transfert classique sur la formule de continuité uniforme). $\square$

Théorème 3 (Heine). *Soit $K \subseteq \mathbb{R}$ compact et $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors f est uniformément continue sur K .*

Démonstration. Soient $x, y \in K^*$ avec $x - y \in \mathcal{I}$. On veut montrer $f^*(x) - f^*(y) \in \mathcal{I}$.

Par le théorème 1, K compact entraîne $x \in \widetilde{\mathbb{R}}_b$ et $x_0 := \text{st}(x) \in K$. De plus, $y - x_0 = (y - x) + (x - x_0)$, somme de deux infinitésimaux donc infinitésimale, donc $y \in \widetilde{\mathbb{R}}_b$ et $\text{st}(y) = x_0$.

Par continuité de f en $x_0 \in K$ (caractérisation non standard) : $f^*(x) - f(x_0) \in \mathcal{I}$ et $f^*(y) - f(x_0) \in \mathcal{I}$.

Donc $f^*(x) - f^*(y) = (f^*(x) - f(x_0)) - (f^*(y) - f(x_0)) \in \mathcal{I}$ (différence de deux infinitésimaux). $\square$

Remarque 4. *La démonstration tient en trois lignes : pas de raisonnement par ε - δ , pas de construction de recouvrement, pas d'extraction de sous-suite. La compacité produit directement la « partie standard commune » x_0 qui relie x et y , et la continuité de f en ce point fait le reste.*

5 Conséquence 3 : théorème des valeurs extrêmes

Théorème 4 (Valeurs extrêmes). *Soit $K \subseteq \mathbb{R}$ compact non vide et $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors f atteint son maximum et son minimum sur K : il existe $x_{\max}, x_{\min} \in K$ tels que $f(x_{\min}) \leq f(x) \leq f(x_{\max})$ pour tout $x \in K$.*

Démonstration. On traite le cas du maximum (le minimum est analogue, ou s'obtient en appliquant le théorème à $-f$).

Étape 1 : $f(K)$ est borné supérieurement. K compact, donc tout $a \in K^*$ a $\text{st}(a) \in K$. Soit $a \in K^*$, $x_0 := \text{st}(a) \in K$. Par continuité de f en x_0 , $f^*(a) - f(x_0) \in \mathcal{I}$, donc $f^*(a) \in \widetilde{\mathbb{R}}_b$. Ainsi $f^*(K^*) \subseteq \widetilde{\mathbb{R}}_b$. Par transfert, $f(K)$ est borné dans $\mathbb{R}$.

Soit $M := \sup_{x \in K} f(x) \in \mathbb{R}$ (existe car $f(K)$ borné non vide).

Étape 2 : M est atteint. Par caractérisation du sup, pour tout $\varepsilon > 0$ standard il existe $x_\varepsilon \in K$ avec $f(x_\varepsilon) > M - \varepsilon$. Cette formule est transférable. Dans $\widetilde{\mathbb{R}}$, on prend $\varepsilon = 1/2^{n_\infty}$ (infinitésimal positif) : il existe $a \in K^*$ avec $f^*(a) > M - 1/2^{n_\infty}$, c'est-à-dire $M - f^*(a) < 1/2^{n_\infty}$ (infinitésimal), et aussi $f^*(a) \leq M$ par transfert de la propriété du sup. Donc $M - f^*(a) \in \mathcal{I}$, soit $\text{st}(f^*(a)) = M$.

Posons $x_{\max} := \text{st}(a) \in K$ (existe par compacité). Par continuité de f en $x_{\max}$, $f^*(a) - f(x_{\max}) \in \mathcal{I}$, donc $\text{st}(f^*(a)) = f(x_{\max})$, donc $f(x_{\max}) = M$.

Donc $M = f(x_{\max})$ est atteint en $x_{\max} \in K$. $\square$

Remarque 5. *Le point clé est : la valeur du sup, infinitésimalement approchée par $f^*(a)$, est exactement la valeur de f en la partie standard $\text{st}(a) \in K$. La compacité fournit le point standard, la continuité transmet la valeur.*

6 Conséquence 4 : théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 5 (Valeurs intermédiaires). *Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue avec $f(a) < f(b)$. Pour tout $y \in]f(a), f(b)[$, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = y$.*

Démonstration. Découpons $[a, b]$ en 2^{n_∞} sous-intervalles de longueur infinitésimale $\delta := (b - a)/2^{n_\infty}$. Posons $x_k := a + k\delta$ pour $k \in \{0, 1, \dots, 2^{n_\infty}\} \subseteq \widetilde{\mathbb{N}}_1$.

Par transfert, la formule « $f(x_0) < y$ et $f(x_{2^{n_\infty}}) > y$ » est vraie dans $\widetilde{\mathbb{R}}$ (puisque $x_0 = a$, $x_{2^{n_\infty}} = b$, et $f(a) < y < f(b)$).

Soit $K := \{k \in \tilde{\mathbb{N}}_1 : 0 \leq k \leq 2^{n_\infty}, f^*(x_k) \leq y\}$. Cet ensemble est non vide ($0 \in K$ car $f^*(x_0) = f(a) < y$) et borné par 2^{n_∞} . Par bon ordre de $\tilde{\mathbb{N}}_1$, K admet un plus grand élément k_0 : $f^*(x_{k_0}) \leq y$ et $f^*(x_{k_0+1}) > y$.

Posons $c := \text{st}(x_{k_0})$. Comme $a \leq x_{k_0} \leq b$ et $[a, b]$ compact, $c \in [a, b]$ (théorème 1).

Par continuité de f en c , $f^*(x_{k_0}) - f(c) \in \mathcal{I}$. De plus, $x_{k_0+1} - x_{k_0} = \delta \in \mathcal{I}$, donc $\text{st}(x_{k_0+1}) = c$ aussi, et $f^*(x_{k_0+1}) - f(c) \in \mathcal{I}$.

On a donc $f^*(x_{k_0}) \leq y \leq f^*(x_{k_0+1})$ avec les deux extrêmes infinitésimalement proches de $f(c)$. Par stabilité de l'inégalité par partie standard, $f(c) \leq y \leq f(c)$, donc $f(c) = y$.

Enfin $c \neq a$ car $f(a) < y = f(c)$, et $c \neq b$ car $f(b) > y = f(c)$. Donc $c \in]a, b[$. $\square$

Remarque 6 (Interprétation géométrique). *La démonstration revient à parcourir le segment $[a, b]$ avec un pas infinitésimal $\delta = (b - a)/2^{n_\infty}$ et à repérer le moment où f franchit la valeur y . C'est l'argument intuitif du « tableau de variations », rendu rigoureux par le fait que $\mathbb{R}$ contient effectivement des pas infinitésimaux comme nombres manipulables.*

7 Synthèse

- **Caractérisation centrale.** $K \subset \mathbb{R}$ compact ssi tout point de K^* est borné et a sa partie standard dans K .
- **Démonstrations courtes.** Bolzano-Weierstrass, Heine, valeurs extrêmes, valeurs intermédiaires : chaque théorème classique reçoit une démonstration de quelques lignes, le travail conceptuel étant absorbé par la machinerie non standard.
- **Géométrie sous-jacente.** La caractérisation rend visible le contenu géométrique de la compacité : c'est la propriété qu'un ensemble est « complet » au sens où les points infiniment grands ou infinitésimalement proches de la frontière reviennent toujours dans l'ensemble.

8 Points laissés ouverts

1. **Extension à $\mathbb{R}^n$.** Les démonstrations s'adaptent directement à $\mathbb{R}^n$ en remplaçant la valeur absolue par la norme euclidienne. À rédiger explicitement.
2. **Compacité dans les espaces métriques.** La caractérisation de Robinson se généralise aux espaces métriques abstraits, à condition de disposer d'une extension non standard de la métrique. Cela nécessite d'étendre la construction de $\tilde{\mathbb{R}}$ à un cadre plus général.
3. **Lien avec la complétude de $\mathbb{R}$.** La démonstration de Bolzano-Weierstrass utilise implicitement la complétude de $\mathbb{R}$ (via la propriété du sup utilisée pour la partie standard). La complétude elle-même reste à fonder rigoureusement dans le cadre de l'axiomatique du grain.