

Des espaces métriques aux espaces de Hilbert

Approche non standard via $\tilde{\mathbb{R}}$

Suite de l'axiomatique du grain

29 mai 2026

Table des matières

I	Espaces métriques	2
1	Définitions et extension	2
2	Caractérisations non standard	2
3	Complétude	3
II	Espaces vectoriels normés et espaces de Banach	3
4	Définitions	3
5	Partie standard dans un Banach	3
III	Espaces préhilbertiens	4
6	Produit scalaire	4
7	Inégalités fondamentales	4
IV	Espaces de Hilbert	4
8	Définition	4
9	Théorème de projection sur un convexe fermé	4
10	Théorème de représentation de Riesz	5
11	Synthèse	6
12	Points laissés ouverts	6

Introduction

Ce document parcourt en quatre étapes le chemin des espaces métriques aux espaces de Hilbert, en s'appuyant systématiquement sur le cadre non standard construit dans les sections précédentes (partie standard, théorème de transfert).

L'idée directrice : la plupart des notions analytiques (convergence, complétude, projection) se caractérisent par des conditions *ponctuelles* sur la partie standard, ce qui rend les démonstrations à la fois courtes et géométriques.

Cadre. On travaille avec des espaces X construits à partir de $\mathbb{R}$ (et donc dotés d'une extension X^* construite à partir de $\widetilde{\mathbb{R}}$ par les mêmes opérations). Exemples principaux : $\mathbb{R}^n$, $\ell^2(\mathbb{R})$, $L^2(\mathbb{R})$.

Première partie

Espaces métriques

1 Définitions et extension

Définition 1 (Espace métrique). *Un espace métrique est un couple (X, d) où X est un ensemble et $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifie, pour tous $x, y, z \in X$:*

$$d(x, y) = 0 \iff x = y, \quad d(x, y) = d(y, x), \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

Définition 2 (Extension non standard). *X^* et $d^* : X^* \times X^* \rightarrow \widetilde{\mathbb{R}}_+$ sont les extensions de X et d par transfert. Les trois axiomes ci-dessus se transfèrent à d^* .*

Définition 3 (Halo et proximité). *Pour $a \in X^*$, le halo de a est*

$$\text{hal}(a) := \{x \in X^* : d^*(x, a) \in \mathcal{I}\}.$$

On dit que x et y sont infiniment proches, noté $x \approx y$, si $d^(x, y) \in \mathcal{I}$. La relation $\approx$ est une équivalence (réflexivité et symétrie directes ; transitivité par inégalité triangulaire et stabilité de $\mathcal{I}$ par addition).*

2 Caractérisations non standard

Proposition 1 (Convergence d'une suite). *Soit (u_n) une suite dans X et $\ell \in X$.*

$$u_n \rightarrow \ell \iff u_n^* \approx \ell \text{ pour tout } n \in \widetilde{\mathbb{N}}_1 \setminus \mathbb{N}.$$

Démonstration. Analogue à la caractérisation non standard de la limite dans $\mathbb{R}$, en remplaçant $|u_n - \ell|$ par $d(u_n, \ell)$. □

Proposition 2 (Continuité d'une fonction). *Soit $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$. f continue en $x_0 \in X$ ssi pour tout $x \in X^*$ avec $x \approx x_0$, $f^*(x) \approx f(x_0)$.*

Démonstration. Par transfert de la formule ε - δ . □

Définition 4 (Suite de Cauchy). *Une suite (u_n) dans X est de Cauchy si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $d(u_m, u_n) < \varepsilon$ pour tous $m, n \geq n_0$.*

Proposition 3 (Caractérisation non standard de Cauchy). *(u_n) est de Cauchy ssi $u_m^* \approx u_n^*$ pour tous $m, n \in \widetilde{\mathbb{N}}_1 \setminus \mathbb{N}$.*

3 Complétude

Définition 5 (Espace complet). (X, d) est complet si toute suite de Cauchy dans X converge dans X .

Théorème 1 (Caractérisation non standard de la complétude). (X, d) est complet ssi pour toute suite (u_n) de Cauchy dans X , $u_{n_\infty}^*$ admet une partie standard dans X .

Démonstration. $(\Rightarrow)$ Si X complet et (u_n) Cauchy, soit $\ell := \lim u_n \in X$. Par proposition 1, $u_{n_\infty}^* \approx \ell$, donc $\ell \in \text{hal}(u_{n_\infty}^*) \cap X$. L'unicité provient de la métrique : si $\ell, \ell' \in X$ et $u_{n_\infty}^* \approx \ell, \ell'$, alors $d(\ell, \ell') \leq d^*(\ell, u_{n_\infty}^*) + d^*(u_{n_\infty}^*, \ell') \in \mathcal{I}$, donc $d(\ell, \ell') = 0$, donc $\ell = \ell'$.

$(\Leftarrow)$ Si toute suite Cauchy (u_n) vérifie $u_{n_\infty}^*$ a partie standard $\ell \in X$, on montre que ℓ est la limite de (u_n) . Par proposition 3, $u_m^* \approx u_{n_\infty}^*$ pour tout m transfini, donc $u_m^* \approx \ell$ pour tout m transfini. Par proposition 1, $u_n \rightarrow \ell$. $\square$

Deuxième partie

Espaces vectoriels normés et espaces de Banach

4 Définitions

Définition 6 (Espace vectoriel normé). Un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ est un couple $(E, \|\cdot\|)$ où E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifie, pour tous $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\|x\| = 0 \iff x = 0, \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|, \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

La métrique associée est $d(x, y) := \|x - y\|$.

Définition 7 (Espace de Banach). Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet pour la métrique associée.

5 Partie standard dans un Banach

Proposition 4 (Existence et unicité de la partie standard). Soit $(E, \|\cdot\|)$ un Banach. Pour tout $a \in E^*$ tel que $\|a\|^*$ est borné dans $\mathbb{R}$, il existe un unique $\text{st}(a) \in E$ tel que $a - \text{st}(a)$ est de norme infinitésimale.

Démonstration. *Existence.* Soit $a \in E^*$ avec $\|a\|^* < M$ standard. Par densité de E dans E^* aux échelles standards (transfert), pour chaque $n \in \mathbb{N}$ il existe $b_n \in E$ avec $\|a - b_n\|^* < 2^{-n}$. La suite (b_n) est de Cauchy dans E : $\|b_m - b_n\| = \text{st}(\|b_m - b_n\|^*) \leq \text{st}(\|b_m - a\|^* + \|a - b_n\|^*) \leq 2^{-m} + 2^{-n}$. Par complétude, $b_n \rightarrow \ell \in E$. Alors $\|a - \ell\|^* \leq \|a - b_n\|^* + \|b_n - \ell\|^*$, où le premier terme est $< 2^{-n}$ pour tout n et le second tend vers 0. Donc $\|a - \ell\|^*$ est infinitésimal.

Unicité. Si $\ell, \ell' \in E$ avec $a - \ell, a - \ell'$ de norme infinitésimale, alors $\|\ell - \ell'\| \leq \|a - \ell\| + \|a - \ell'\| \in \mathcal{I}$, donc $\|\ell - \ell'\| = 0$, donc $\ell = \ell'$. $\square$

Théorème 2 (Propriétés algébriques de st). Pour $a, b \in E^*$ de norme bornée et $\lambda \in \widetilde{\mathbb{R}}_b$:

1. $\text{st}(a + b) = \text{st}(a) + \text{st}(b)$.
2. $\text{st}(\lambda \cdot a) = \text{st}(\lambda) \cdot \text{st}(a)$.
3. $\text{st}(\|a\|^*) = \|\text{st}(a)\|$ (continuité de la norme).

Démonstration. (1) $a + b = (\text{st}(a) + \text{st}(b)) + ((a - \text{st}(a)) + (b - \text{st}(b)))$ où le second terme est somme de deux infinitésimaux en norme.

(2) Décomposition $\lambda a = \text{st}(\lambda)\text{st}(a) + (\lambda - \text{st}(\lambda))\text{st}(a) + \text{st}(\lambda)(a - \text{st}(a)) + (\lambda - \text{st}(\lambda))(a - \text{st}(a))$. Les trois derniers termes sont infinitésimaux en norme.

(3) Inégalité triangulaire inverse : $\| \|a\|^* - \|\text{st}(a)\| \| \leq \|a - \text{st}(a)\|^* \in \mathcal{I}$. $\square$

Troisième partie

Espaces préhilbertiens

6 Produit scalaire

Définition 8 (Espace préhilbertien). *Un espace préhilbertien (réel) est un couple $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ où H est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie :*

- *Bilinéarité.*
- *Symétrie : $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$.*
- *Positivité : $\langle x, x \rangle \geq 0$, avec $= 0$ ssi $x = 0$.*

On pose $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

7 Inégalités fondamentales

Théorème 3 (Cauchy-Schwarz). *Pour tous x, y dans un préhilbertien H :*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Démonstration. Si $y = 0$, l'inégalité est triviale. Sinon, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$0 \leq \|x - \lambda y\|^2 = \|x\|^2 - 2\lambda \langle x, y \rangle + \lambda^2 \|y\|^2.$$

Discriminant en λ négatif ou nul : $\langle x, y \rangle^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$. □

Corollaire 1 (Inégalité triangulaire). $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Démonstration. $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$, par Cauchy-Schwarz. □

Remarque 1 (Continuité du produit scalaire). *Le produit scalaire est continu : si $x \approx x_0$ et $y \approx y_0$ avec $\|x\|, \|y\|$ bornés, alors $\langle x, y \rangle^* \approx \langle x_0, y_0 \rangle$. Démonstration directe par bilinéarité et Cauchy-Schwarz.*

Quatrième partie

Espaces de Hilbert

8 Définition

Définition 9 (Espace de Hilbert). *Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien complet pour la norme associée au produit scalaire.*

Exemple 1. $\mathbb{R}^n$ avec $\langle x, y \rangle = \sum x_i y_i$; $\ell^2(\mathbb{R}) = \{(u_n) : \sum u_n^2 < \infty\}$ avec $\langle u, v \rangle = \sum u_n v_n$; $L^2(\mathbb{R})$ avec $\langle f, g \rangle = \int fg$.

9 Théorème de projection sur un convexe fermé

Théorème 4 (Projection). *Soit H un Hilbert et $C \subseteq H$ un sous-ensemble convexe, fermé, non vide. Pour tout $x \in H$, il existe un unique $p \in C$ tel que*

$$\|x - p\| = \inf_{y \in C} \|x - y\|.$$

p est appelé projection de x sur C , noté $p = P_C(x)$.

Démonstration. Existence. Soit $d := \inf_{y \in C} \|x - y\| \in \mathbb{R}_+$. Par caractérisation de l'inf, pour tout $\varepsilon > 0$ standard il existe $y_\varepsilon \in C$ avec $\|x - y_\varepsilon\| < d + \varepsilon$. Cette formule est transférable. Dans H^* , on prend $\varepsilon = 1/2^{n_\infty}$ infinitésimal : il existe $a \in C^*$ avec $\|x - a\|^* < d + 1/2^{n_\infty}$.

$\|a\|^* \leq \|x\| + \|x - a\|^* < \|x\| + d + 1$, standard borné. Donc $a \in H^*$ borné, et la partie standard existe.

Soit $C_R := C \cap \overline{B}(x, d + 1)$, fermé borné de H . $a \in C_R^*$, et par caractérisation de Robinson pour les fermés bornés de Hilbert, $\text{st}(a) \in C_R \subseteq C$.

Posons $p := \text{st}(a)$. Par continuité de la norme,

$$\|x - p\| = \text{st}(\|x - a\|^*) \leq \text{st}(d + 1/2^{n_\infty}) = d.$$

Et $\|x - p\| \geq d$ par définition de d comme infimum. Donc $\|x - p\| = d$.

Unicité. Soient $p, p' \in C$ avec $\|x - p\| = \|x - p'\| = d$. Identité du parallélogramme :

$$\|p - p'\|^2 + \|2x - p - p'\|^2 = 2\|x - p\|^2 + 2\|x - p'\|^2 = 4d^2.$$

Or $\frac{p+p'}{2} \in C$ par convexité, donc $\|x - \frac{p+p'}{2}\| \geq d$, soit $\|2x - p - p'\|^2 \geq 4d^2$. Combinant : $\|p - p'\|^2 \leq 0$, donc $p = p'$. $\square$

Remarque 2. La démonstration classique utilise une suite minimisante (y_n) avec $\|x - y_n\| \rightarrow d$, montre qu'elle est de Cauchy via l'identité du parallélogramme, et conclut par complétude. Ici, on construit directement le point optimal $p = \text{st}(a)$ pour $a \in C^*$ infinitésimalement proche de l'infimum.

10 Théorème de représentation de Riesz

Définition 10 (Forme linéaire continue). Une forme linéaire continue sur un Hilbert H est une application $\varphi : H \rightarrow \mathbb{R}$ linéaire et continue. Le dual topologique de H est noté $H^\vee$.

Théorème 5 (Riesz). Soit H un Hilbert et $\varphi \in H^\vee$. Il existe un unique $v_\varphi \in H$ tel que

$$\forall x \in H, \quad \varphi(x) = \langle x, v_\varphi \rangle.$$

Démonstration. Unicité. Si $v, v' \in H$ représentent φ , alors $\langle x, v - v' \rangle = 0$ pour tout $x \in H$. En prenant $x = v - v'$: $\|v - v'\|^2 = 0$, donc $v = v'$.

Existence. Si $\varphi = 0$, $v_\varphi = 0$ convient. Sinon, soit $N := \ker \varphi$. N est un sous-espace fermé propre de H (fermé par continuité de φ , propre car $\varphi \neq 0$).

Soit $u \in H \setminus N$ et $u_0 := P_N(u)$ sa projection sur N (par théorème 4, N étant convexe fermé non vide). Posons $e := (u - u_0)/\|u - u_0\|$, de norme 1 et orthogonal à N (propriété de la projection : $\langle u - u_0, y \rangle = 0$ pour tout $y \in N$).

Pour tout $x \in H$, on décompose $x = \left(x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(e)}e\right) + \frac{\varphi(x)}{\varphi(e)}e$. Le premier terme est dans N (en effet, φ appliqué donne $\varphi(x) - \frac{\varphi(x)}{\varphi(e)}\varphi(e) = 0$).

Donc $\langle x, e \rangle = 0 + \frac{\varphi(x)}{\varphi(e)}\langle e, e \rangle = \frac{\varphi(x)}{\varphi(e)}$, soit $\varphi(x) = \varphi(e) \cdot \langle x, e \rangle = \langle x, \varphi(e) \cdot e \rangle$.

On pose $v_\varphi := \varphi(e) \cdot e$. $\square$

Corollaire 2 (Isomorphisme $H \cong H^\vee$). L'application $v \mapsto \langle \cdot, v \rangle$ est un isomorphisme isométrique de H sur son dual topologique $H^\vee$.

Démonstration. Linéarité, injectivité, surjectivité : par Riesz et bilinéarité du produit scalaire. Isométrie : $\|\langle \cdot, v \rangle\|_{H^\vee} = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle x, v \rangle| = \|v\|$ par Cauchy-Schwarz (sup atteint en $x = v/\|v\|$). $\square$

11 Synthèse

- **Chemin parcouru.** Métrique $\rightarrow$ normé $\rightarrow$ Banach $\rightarrow$ préhilbertien $\rightarrow$ Hilbert. Chaque étape ajoute une structure, et la caractérisation non standard se propage.
- **Caractérisation centrale.** Dans un Hilbert H , tout $a \in H^*$ de norme bornée admet une unique partie standard $\text{st}(a) \in H$. C'est la traduction géométrique de la complétude.
- **Démonstrations courtes.** Cauchy-Schwarz (algébrique transférable), inégalité triangulaire (corollaire), projection (construction directe via partie standard), Riesz (projection appliquée au noyau d'une forme linéaire).

12 Points laissés ouverts

1. **Construction explicite de X^* pour les Banach abstraits.** Pour $\mathbb{R}^n$, l'extension est composante par composante. Pour ℓ^2 et L^2 , il faut élaborer le cadre des séries et des intégrales dans $\widetilde{\mathbb{R}}$.
2. **Bases hilbertiennes et théorème spectral.** Naturellement accessibles via les mêmes méthodes, demandent un cadre supplémentaire sur les séries dans un Hilbert et les opérateurs compacts.
3. **Théorèmes du dual.** Hahn-Banach, Banach-Steinhaus, théorème d'isomorphisme de Banach, suivent par le même type d'argument.