

Logique de connecteurs

Hugues GENVRIN

June 1, 2026

1 Conjugué de la privation

$$\begin{aligned}\overline{(A \Leftrightarrow B) \setminus (A \Rightarrow B)} &= ((\overline{A \Rightarrow B}) \wedge (\overline{A \Leftarrow B})) \setminus (\overline{A \Rightarrow B}) \\ &= ((\overline{A \Leftarrow B}) \vee (\overline{A \Rightarrow B})) \setminus (\overline{A \Leftarrow B}). \\ \overline{(A \Leftrightarrow B) \setminus (A \Rightarrow B)} &= \overline{A \Leftarrow B} \\ &= \overline{A \Rightarrow B}.\end{aligned}\tag{1}$$

D'où :

$$\overline{\setminus} = \setminus$$

2 Conjugué de l'implication

Soit $\mathcal{R} = \Leftrightarrow$ sur l'univers $\Omega_{\mathcal{R}} = \{0, 1\}$ tels que $\overline{0}\mathcal{R}1$ et $\overline{1}\mathcal{R}0$, où $\overline{x}$ désigne le conjugué de x .

1. $0\mathcal{R}0$ et $1\mathcal{R}1$, donc $\mathcal{R}$ est réflexive.
2. Puisque $a\mathcal{R}b$ et $b\mathcal{R}a$, donc $\mathcal{R}$ est symétrique.
3. Si, $a\mathcal{R}b$ et $b\mathcal{R}c$, alors $a\mathcal{R}c$. Par exemple $0\mathcal{R}0$, et $0\mathcal{R}\overline{1} \Rightarrow 0\mathcal{R}0$. Nous n'avons que deux éléments dans $\Omega_{\mathcal{R}}$, donc la relation transitive est triviale.

On en déduit que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence notée $\mathcal{R}_{\equiv}$.

On remarque que :

$$\overline{a \mathcal{R}_{\equiv} b} = \overline{a} \mathcal{R}_{\equiv} \overline{b}\tag{2}$$

D'où $\overline{0} \mathcal{R}_{\equiv} \overline{0} = 1 \mathcal{R}_{\equiv} 1$, sachant que $1 \mathcal{R} 1$. Alors on en tire que $\mathcal{R}_{\equiv} = \overline{\mathcal{R}_{\equiv}}$, ce qui est équivalent à dire que $\Leftrightarrow = \Leftrightarrow$.

Soit $\Omega' = \{\Leftarrow, \Rightarrow\}$, Alors :

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow &= (\Leftarrow \wedge \Rightarrow) \\ \text{Implique que } \Leftrightarrow &= \overline{\Leftarrow \wedge \Rightarrow} \\ &= \Leftarrow \overline{\wedge} \Rightarrow \\ &= \Leftarrow \vee \Rightarrow\end{aligned}\tag{3}$$

Comme $\Leftarrow = \Leftrightarrow$, alors : $\Leftarrow = \Leftarrow \vee \Rightarrow$.

On a donc :

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow &= (\Leftarrow \wedge \Rightarrow) \\ &= (\Leftarrow \vee \Rightarrow)\end{aligned}\tag{4}$$

Entraîne que $(\Leftarrow \wedge \Rightarrow) = (\Leftarrow \vee \Rightarrow)$

C'est valable pour un ou non exclusif. En conséquences : soit $\Leftarrow = \Leftarrow \wedge \Rightarrow = \Rightarrow$; ou $\Leftarrow = \Rightarrow \wedge \Rightarrow = \Leftarrow$.

Si $\Rightarrow = \Rightarrow$ et $\Leftarrow = \Leftarrow$ alors $\Leftarrow \vee \Rightarrow = \Leftarrow \wedge \Rightarrow$. Ce qui est impossible en termes de connecteurs logiques.

Soient $\mathcal{O}_{\Rightarrow}$ et $\mathcal{O}_{\Leftarrow}$, deux relations sur $\Omega' = \{-1, 0, 1\}$. avec $\bar{0} = 0$, $\bar{1} = -1$.

1. $0\mathcal{O}_{\Rightarrow}0, -1\mathcal{O}_{\Rightarrow}-1$ et $1\mathcal{O}_{\Rightarrow}1$. Donc $\mathcal{O}_{\Rightarrow}$ est réflexive.
2. Si $a\mathcal{O}_{\Rightarrow}b$ et $b\mathcal{O}_{\Rightarrow}a$ alors c'est une tautologie. Donc, la relation $\mathcal{O}_{\Rightarrow}$ est anti-symétrique.
3. Par ailleurs $-1\mathcal{O}_{\Rightarrow}0$ et $0\mathcal{O}_{\Rightarrow}1$ implique que $-1\mathcal{O}_{\Rightarrow}1$. D'où la relation est transitive.

Nous en déduisons que $\mathcal{O}_{\Rightarrow}$ est une relation d'ordre (générique, soit non stricte). Par un raisonnement analogue, on est conduit à dire que $\mathcal{O}_{\Leftarrow}$ est aussi une relation d'ordre (générique).

Nous remarquons que nous pouvons alors définir une jauge algébrique de connecteurs logiques $\mathcal{J}(\mathcal{R}_{\equiv}, \mathcal{O}_{\Rightarrow})$

On note que $\mathcal{O}_{\Rightarrow}$ et $\mathcal{O}_{\Leftarrow}$ sont conjuguées, c'est à dire que :

$$\begin{cases} \mathcal{O}_{\Rightarrow} &= \overline{\mathcal{O}_{\Leftarrow}} = \mathcal{O}_{\Leftarrow} \\ \mathcal{O}_{\Leftarrow} &= \overline{\mathcal{O}_{\Rightarrow}} = \mathcal{O}_{\Rightarrow}. \end{cases}$$

D'où, en termes de symboles :

$$\begin{cases} \Rightarrow &= \Leftarrow \\ \Leftarrow &= \Rightarrow. \end{cases}$$

Puis en termes de connecteurs logiques :

$$\Leftarrow \Rightarrow \Rightarrow \text{ et } \Rightarrow \Leftarrow \Leftarrow$$

3 Contraposition

$A \Rightarrow B$, entraîne $\overline{A \Rightarrow B} = \overline{A} \Leftarrow \overline{B}$.

Théorème 1 $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \overline{B} \Rightarrow \overline{A}$.

Corollaire 1 Si $A \Rightarrow B = V$, donc $\overline{A \Rightarrow B} = F \Leftrightarrow \overline{A} \Leftarrow \overline{B} = F$.

Corollaire 2 Si $A \Rightarrow B = F$, donc $\overline{A \Rightarrow B} = V \Leftrightarrow \overline{A} \Leftarrow \overline{B} = V$.