

Partie standard et analyse dans  $\widetilde{\mathbb{R}}$   
Pont opérationnel entre infini actuel et infini potentiel

Pour la suite de l'axiomatique du grain

29 mai 2026

**Table des matières**

|           |                                                    |          |
|-----------|----------------------------------------------------|----------|
| <b>1</b>  | <b>Halo et monade</b>                              | <b>2</b> |
| <b>2</b>  | <b>Théorème de la partie standard</b>              | <b>2</b> |
| <b>3</b>  | <b>Propriétés algébriques</b>                      | <b>3</b> |
| <b>4</b>  | <b>La partie standard comme morphisme d'anneau</b> | <b>4</b> |
| <b>5</b>  | <b>Application aux limites de suites</b>           | <b>4</b> |
| <b>6</b>  | <b>Application à la dérivée</b>                    | <b>5</b> |
| <b>7</b>  | <b>Application à l'intégrale</b>                   | <b>5</b> |
| <b>8</b>  | <b>Application aux séries numériques</b>           | <b>6</b> |
| <b>9</b>  | <b>Continuité non standard</b>                     | <b>7</b> |
| <b>10</b> | <b>Synthèse et vue d'ensemble</b>                  | <b>7</b> |

# Introduction

Le théorème de transfert établit une correspondance logique entre  $\tilde{\mathbb{R}}$  et  $\mathbb{R}$  pour les formules transférables. Pour calculer effectivement avec les limites, il faut un *pont opérationnel* : un outil qui, à un objet de  $\tilde{\mathbb{R}}$ , associe un objet de  $\mathbb{R}$  représentant sa « valeur limite ». C'est le rôle de la *partie standard*.

Ce document construit la partie standard, démontre ses propriétés algébriques fondamentales, puis l'applique à trois objets centraux de l'analyse : la dérivée, l'intégrale, et les séries numériques. Le formalisme  $\varepsilon$ - $\delta$  est remplacé par un calcul direct sur des infinitésimaux concrets.

## 1 Halo et monade

**Définition 1** (Relation d'infinitésimale proximité). *Pour  $a, b \in \tilde{\mathbb{R}}$ , on dit que  $a$  est infinitésimalement proche de  $b$ , noté  $a \approx b$ , si  $a - b$  est infinitésimal au sens de la définition d'élément standard (Partie IV de l'axiomatique) : soit  $a = b$ , soit il n'existe aucun  $m \in \mathbb{N}$  fini tel que  $|a - b| > 2^{-m}$ .*

**Proposition 1** (Relation d'équivalence).  *$\approx$  est une relation d'équivalence sur  $\tilde{\mathbb{R}}$ .*

*Démonstration. Réflexivité.*  $a - a = 0$ , infinitésimal (par convention 0 est infinitésimal au sens large).

*Symétrie.* Si  $a - b$  infinitésimal, alors  $b - a = -(a - b)$  aussi, puisque  $|-(a - b)| = |a - b|$ .

*Transitivité.* Si  $a - b$  et  $b - c$  infinitésimaux, alors  $|a - c| \leq |a - b| + |b - c|$ . Si  $|a - c| > 2^{-m}$  pour un  $m$  fini, alors  $|a - b| + |b - c| > 2^{-m}$ , donc l'un au moins des deux dépasse  $2^{-m-1}$ , contredisant l'infinitésimalité. Donc  $|a - c| \leq 2^{-m}$  pour tout  $m$  fini, et  $a - c$  est infinitésimal.  $\square$

**Définition 2** (Halo, monade). *Pour  $a \in \tilde{\mathbb{R}}$ , le halo (ou monade) de  $a$  est*

$$\mu(a) := \{x \in \tilde{\mathbb{R}} : x \approx a\}.$$

**Remarque 1.** *Le halo d'un élément standard  $r \in \mathbb{R}$  contient  $r$  et tous les éléments  $r + \varepsilon$  avec  $\varepsilon$  infinitésimal. Le halo d'un élément infiniment grand contient ce dernier et tous les éléments qui en diffèrent par un infinitésimal — mais reste tout entier dans la zone non standard.*

**Définition 3** (Élément limité). *Un élément  $a \in \tilde{\mathbb{R}}$  est dit limité s'il existe  $m \in \mathbb{N}$  fini tel que  $|a| < 2^m$ . Sinon  $a$  est dit illimité.*

**Remarque 2.** — *Tout élément standard est limité (par définition).*

— *Tout élément limité a un halo qui rencontre  $\mathbb{R}$  (théorème suivant).*

— *Les illimités forment une zone disjointe de  $\mathbb{R}$  ; leurs halos ne rencontrent jamais  $\mathbb{R}$ .*

## 2 Théorème de la partie standard

**Théorème 1** (Existence et unicité de la partie standard). *Pour tout  $a \in \tilde{\mathbb{R}}$  limité, il existe un unique  $r \in \mathbb{R}$  tel que  $a \approx r$ . On note  $\text{st}(a) := r$  et on l'appelle la partie standard de  $a$ .*

*Démonstration. Unicité.* Si  $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$  vérifient  $a \approx r_1$  et  $a \approx r_2$ , alors par transitivité  $r_1 \approx r_2$ , donc  $r_1 - r_2$  est infinitésimal. Mais  $r_1 - r_2 \in \mathbb{R}$  (stabilité par soustraction) ; et un élément de  $\mathbb{R}$  infinitésimal est nécessairement 0 (sinon, par définition d'élément standard,  $r_1 - r_2$  serait non infinitésimal, contradiction). Donc  $r_1 = r_2$ .

*Existence.* Soit  $a \in \tilde{\mathbb{R}}$  limité,  $|a| < 2^m$  pour un  $m \in \mathbb{N}$ . Considérons l'ensemble

$$L := \{q \in \mathbb{Q} : q \leq a\}.$$

$L$  est une partie de  $\mathbb{Q}$ , non vide (contient  $-2^m$ ), majorée (par  $2^m$ ). Par construction classique de  $\mathbb{R}$  (coupures, ou borne supérieure),  $L$  détermine un unique réel  $r := \sup L \in \mathbb{R}$ .

Montrons  $a \approx r$ . Supposons  $a - r$  non infinitésimal :  $|a - r| > 2^{-m'}$  pour un  $m' \in \mathbb{N}$  fini.

Cas 1 :  $a > r + 2^{-m'}$ . Alors il existe  $q \in \mathbb{Q}$  avec  $r < q < r + 2^{-m'} < a$ . Par définition de  $L$ ,  $q \in L$ , mais  $q > r = \sup L$ , contradiction.

Cas 2 :  $a < r - 2^{-m'}$ . Alors pour tout  $q \in L$ ,  $q \leq a < r - 2^{-m'}$ , donc  $r - 2^{-m'}$  est un majorant de  $L$ , plus petit que  $r = \sup L$ , contradiction.

Donc  $|a - r| \leq 2^{-m'}$  pour tout  $m' \in \mathbb{N}$ , c'est-à-dire  $a \approx r$ .  $\square$

**Remarque 3** (Cas illimité). Si  $a \in \widetilde{\mathbb{R}}$  est illimité (par exemple  $a = 2^{n\infty}$ ),  $\text{st}(a)$  n'est pas défini dans  $\mathbb{R}$ . On peut convenir  $\text{st}(a) = +\infty$  ou  $-\infty$  selon le signe, mais ce n'est plus un élément de  $\mathbb{R}$  : c'est une notation analogue à celle des limites infinies en analyse classique.

### 3 Propriétés algébriques

**Proposition 2** (Compatibilité avec les opérations). Soient  $a, b \in \widetilde{\mathbb{R}}$  limités. Alors :

1.  $\text{st}(a + b) = \text{st}(a) + \text{st}(b)$ .
2.  $\text{st}(a - b) = \text{st}(a) - \text{st}(b)$ .
3.  $\text{st}(a \cdot b) = \text{st}(a) \cdot \text{st}(b)$ .
4. Si  $\text{st}(b) \neq 0$ , alors  $b$  n'est pas infinitésimal et  $\text{st}(a/b) = \text{st}(a)/\text{st}(b)$ .

*Démonstration.* Posons  $r = \text{st}(a)$ ,  $s = \text{st}(b)$ , donc  $a = r + \alpha$  et  $b = s + \beta$  avec  $\alpha, \beta$  infinitésimaux.

(1)  $a + b = (r + s) + (\alpha + \beta)$ . La somme de deux infinitésimaux est infinitésimale (preuve : si  $\alpha + \beta$  non infinitésimal,  $|\alpha + \beta| > 2^{-m}$  pour un  $m$  fini, donc  $|\alpha| + |\beta| > 2^{-m}$ , donc l'un des deux  $> 2^{-m-1}$ , contradiction). Donc  $a + b \approx r + s$ , et par unicité  $\text{st}(a + b) = r + s$ .

(2) Idem en posant  $-b$  à la place de  $b$  et utilisant la symétrie.

(3)  $a \cdot b = (r + \alpha)(s + \beta) = rs + r\beta + s\alpha + \alpha\beta$ . Reste à montrer que  $r\beta + s\alpha + \alpha\beta$  est infinitésimal.  $r\beta$  est infinitésimal (un standard fois un infinitésimal reste infinitésimal : si  $|r\beta| > 2^{-m}$  alors  $|\beta| > 2^{-m}/|r| \geq 2^{-m-m'}$  avec  $|r| < 2^{m'}$ , contradiction). De même  $s\alpha$  infinitésimal.  $\alpha\beta$  :  $|\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta| \leq |\alpha|$  si  $|\beta| \leq 1$  (ce qui est le cas pour un infinitésimal), donc infinitésimal. Somme de trois infinitésimaux donc infinitésimale.

(4) Si  $\text{st}(b) = s \neq 0$ , alors  $|s| > 2^{-m}$  pour un  $m$  fini, donc  $|b| = |s + \beta| \geq |s| - |\beta| > 2^{-m} - 2^{-m-1} = 2^{-m-1}$  pour  $\beta$  assez petit, donc  $b$  non infinitésimal et  $b^{-1}$  existe dans  $\mathbb{R}$ . Il reste à montrer  $\text{st}(a/b) = r/s$ .

$\frac{a}{b} - \frac{r}{s} = \frac{as - br}{bs} = \frac{(r+\alpha)s - (s+\beta)r}{bs} = \frac{s\alpha - r\beta}{bs}$ . Le numérateur est infinitésimal (combinaison linéaire d'infinitésimaux avec coefficients limités), et  $bs$  est limité non infinitésimal, donc le quotient est infinitésimal. Donc  $a/b \approx r/s$ .  $\square$

**Proposition 3** (Compatibilité avec l'ordre, version faible). Soient  $a, b \in \widetilde{\mathbb{R}}$  limités. Si  $a \leq b$ , alors  $\text{st}(a) \leq \text{st}(b)$ .

*Démonstration.* Soient  $r = \text{st}(a)$ ,  $s = \text{st}(b)$ ,  $a = r + \alpha$ ,  $b = s + \beta$  avec  $\alpha, \beta$  infinitésimaux.  $a \leq b$  entraîne  $r - s \leq \beta - \alpha$ . Si  $r > s$  (donc  $r - s > 0$  standard),  $r - s > 2^{-m}$  pour un  $m$  fini, mais  $\beta - \alpha$  infinitésimal donc  $|\beta - \alpha| < 2^{-m}$ ; contradiction. Donc  $r \leq s$ .  $\square$

**Remarque 4** (Inégalité stricte non préservée). L'inégalité stricte  $a < b$  ne donne pas  $\text{st}(a) < \text{st}(b)$  en général. Par exemple,  $0 < 1/n_\infty$  dans  $\widetilde{\mathbb{R}}$ , mais  $\text{st}(0) = 0 = \text{st}(1/n_\infty)$ .

## 4 La partie standard comme morphisme d'anneau

**Définition 4** (Sous-anneau des limites).  $\tilde{\mathbb{R}}_\ell := \{a \in \tilde{\mathbb{R}} : a \text{ limité}\}$  est l'ensemble des éléments limités.

**Proposition 4** (Structure).  $\tilde{\mathbb{R}}_\ell$  est un sous-anneau de  $\tilde{\mathbb{R}}$  contenant  $\mathbb{R}$ .

*Démonstration.*  $0, 1 \in \tilde{\mathbb{R}}_\ell$ . Si  $a, b$  limités avec  $|a|, |b| < 2^m$ , alors  $|a + b| < 2^{m+1}$  et  $|a \cdot b| < 2^{2m}$ , donc  $a + b$  et  $a \cdot b$  sont limités. L'inclusion  $\mathbb{R} \subset \tilde{\mathbb{R}}_\ell$  est par définition.  $\square$

**Théorème 2** (Partie standard comme morphisme). L'application  $\text{st} : \tilde{\mathbb{R}}_\ell \rightarrow \mathbb{R}$  est un morphisme d'anneaux surjectif. Son noyau est l'idéal des infinitésimaux :

$$\ker(\text{st}) = \{a \in \tilde{\mathbb{R}}_\ell : a \text{ infinitésimal}\}.$$

*Démonstration.* Morphisme. Conséquence de la proposition 2.

*Surjectivité.* Pour tout  $r \in \mathbb{R}$ ,  $r$  lui-même est dans  $\tilde{\mathbb{R}}_\ell$  (puisque  $\mathbb{R} \subset \tilde{\mathbb{R}}_\ell$ ) et  $\text{st}(r) = r$ .

*Noyau.*  $\text{st}(a) = 0$  ssi  $a \approx 0$  ssi  $a$  infinitésimal. L'ensemble des infinitésimaux est un idéal : stable par addition (preuve dans 2), et si  $a$  infinitésimal et  $b \in \tilde{\mathbb{R}}_\ell$ ,  $ab$  infinitésimal (idem).  $\square$

**Corollaire 1** (Décomposition canonique). Tout  $a \in \tilde{\mathbb{R}}_\ell$  s'écrit de manière unique

$$a = \text{st}(a) + \varepsilon$$

avec  $\text{st}(a) \in \mathbb{R}$  et  $\varepsilon$  infinitésimal. La partie  $\text{st}(a)$  est la valeur classique, et  $\varepsilon$  la fluctuation non standard.

## 5 Application aux limites de suites

**Théorème 3** (Critère non standard de convergence). Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite classique dans  $\mathbb{R}$  et  $\ell \in \mathbb{R}$ . Soit  $(u_n^*)_{n \in \tilde{\mathbb{N}}_1}$  un prolongement à  $\tilde{\mathbb{N}}_1$  (avec  $u_n^* = u_n$  pour  $n \in \mathbb{N}$ , et pour  $n$  transfini,  $u_n^*$  est l'évaluation naturelle de la formule définissant  $u_n$ ). Les conditions suivantes sont équivalentes :

1.  $u_n \rightarrow \ell$  au sens classique.
2. Pour tout  $n \in \tilde{\mathbb{N}}_1 \setminus \mathbb{N}$ ,  $u_n^*$  est limité et  $\text{st}(u_n^*) = \ell$ .

*Démonstration.* (1)  $\Rightarrow$  (2) : Si  $u_n \rightarrow \ell$ , alors pour tout  $\varepsilon > 0$  standard,  $|u_n - \ell| < \varepsilon$  à partir d'un rang  $n_0$  standard. Pour  $n \in \tilde{\mathbb{N}}_1 \setminus \mathbb{N}$ ,  $n > n_0$ , donc  $|u_n^* - \ell| < \varepsilon$  pour tout  $\varepsilon > 0$  standard. Cela signifie  $u_n^* \approx \ell$ , c'est-à-dire  $u_n^*$  limité (puisque proche de  $\ell \in \mathbb{R}$ ) et  $\text{st}(u_n^*) = \ell$ .

(2)  $\Rightarrow$  (1) : Contraposition. Si  $u_n \not\rightarrow \ell$ , il existe  $\varepsilon_0 > 0$  standard et une sous-suite  $(u_{n_k})$  avec  $|u_{n_k} - \ell| \geq \varepsilon_0$  pour tout  $k$ . Pour un indice transfini  $n^*$ , on a  $|u_{n^*}^* - \ell| \geq \varepsilon_0$ , donc  $u_{n^*}^* - \ell$  n'est pas infinitésimal, et  $\text{st}(u_{n^*}^*) \neq \ell$ .  $\square$

**Exemple 1** (Suite géométrique).  $u_n = 1/2^n$ ,  $\ell = 0$ . Pour  $n$  transfini,  $u_n^* = 1/2^n$  est infinitésimal non nul, donc limité avec  $\text{st}(1/2^n) = 0 = \ell$ . Le critère est vérifié, on retrouve  $u_n \rightarrow 0$ .

**Exemple 2** (Suite divergente vers  $+\infty$ ).  $u_n = n$ . Pour  $n = n_\infty$ ,  $u_n^* = n_\infty$  illimité.  $\text{st}$  non défini : la suite ne converge pas dans  $\mathbb{R}$ . On retrouve la divergence vers  $+\infty$ .

**Exemple 3** (Forme indéterminée résolue).  $u_n = n + 1/n$ ,  $v_n = n$ . Classiquement  $u_n - v_n \rightarrow 0$  (forme  $\infty - \infty$  résolue par calcul). En non standard, pour  $n = n_\infty$  :

$$u_{n_\infty}^* - v_{n_\infty}^* = (n_\infty + 1/n_\infty) - n_\infty = 1/n_\infty,$$

infinitésimal explicite.  $\text{st}(1/n_\infty) = 0$ . La forme indéterminée est résolue par calcul direct, sans recours à un théorème de formes indéterminées.

## 6 Application à la dérivée

**Définition 5** (Dérivée non standard). Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction classique, prolongée naturellement à  $\tilde{\mathbb{R}}$  par les mêmes formules (si  $f$  est polynomiale, rationnelle, ou définie par une formule transférable). Soit  $x_0 \in \mathbb{R}$ . La dérivée non standard de  $f$  en  $x_0$  est

$$f'(x_0) := \text{st} \left( \frac{f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)}{\varepsilon} \right)$$

pour tout infinitésimal non nul  $\varepsilon$ , à condition que cette partie standard existe et soit indépendante du choix de  $\varepsilon$ .

**Exemple 4** (Dérivée de  $x^2$ ).  $f(x) = x^2$ . Soit  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon$  infinitésimal non nul.

$$\frac{(x_0 + \varepsilon)^2 - x_0^2}{\varepsilon} = \frac{2x_0\varepsilon + \varepsilon^2}{\varepsilon} = 2x_0 + \varepsilon.$$

$\text{st}(2x_0 + \varepsilon) = 2x_0$  (proposition 2). Donc  $f'(x_0) = 2x_0$  pour tout  $x_0$ .

**Exemple 5** (Dérivée d'une fonction rationnelle).  $f(x) = 1/x$  pour  $x \neq 0$ . Soit  $x_0 \neq 0$  standard,  $\varepsilon$  infinitésimal non nul.

$$\frac{1/(x_0 + \varepsilon) - 1/x_0}{\varepsilon} = \frac{x_0 - (x_0 + \varepsilon)}{\varepsilon \cdot x_0 \cdot (x_0 + \varepsilon)} = \frac{-1}{x_0(x_0 + \varepsilon)}.$$

$\text{st} \left( \frac{-1}{x_0(x_0 + \varepsilon)} \right) = \frac{-1}{x_0 \cdot x_0} = -1/x_0^2$  (par proposition 2, le quotient est limité car  $x_0 \neq 0$ ). Donc  $f'(x_0) = -1/x_0^2$ .

**Théorème 4** (Équivalence avec la dérivée classique). Soit  $f$  une fonction définie par une formule transférable au voisinage de  $x_0 \in \mathbb{R}$ .  $f$  est dérivable en  $x_0$  au sens classique avec dérivée  $f'(x_0) = L$  si et seulement si pour tout infinitésimal non nul  $\varepsilon$ ,

$$\frac{f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)}{\varepsilon} \approx L.$$

*Démonstration.*  $f$  dérivable au sens classique signifie  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = L$ . En appliquant le théorème 3 à la fonction  $h \mapsto \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$  avec  $h \rightarrow 0$  (en prenant  $h$  infinitésimal non nul), on obtient l'équivalence.  $\square$

## 7 Application à l'intégrale

**Définition 6** (Intégrale non standard). Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue,  $a, b \in \mathbb{R}$  standards,  $a < b$ . Soit  $N \in \tilde{\mathbb{N}}_1 \setminus \mathbb{N}$  (entier transfini) et  $h := (b - a)/N$  (infinitésimal positif). On définit la somme de Riemann non standard :

$$S_N := \sum_{k=1}^N f(a + kh) \cdot h.$$

L'intégrale non standard de  $f$  sur  $[a, b]$  est :

$$\int_a^b f := \text{st}(S_N),$$

pourvu que cette partie standard existe et soit indépendante du choix de  $N$ .

**Remarque 5** (Somme transfinie). La somme  $\sum_{k=1}^N$  avec  $N$  transfini est bien définie : c'est une juxtaposition de  $N$  termes, chaque terme étant un élément de  $\tilde{\mathbb{R}}$ . Le résultat est dans  $\tilde{\mathbb{R}}$  par clôture additive (à condition de rester dans la borne  $2\pi \cdot 2^{n_\infty}$ , ce qui est assuré ici car  $S_N \approx \int_a^b f$  est limité dès que  $f$  est bornée).

**Exemple 6** (Intégrale de  $x$  sur  $[0, 1]$ ).  $f(x) = x$ ,  $[a, b] = [0, 1]$ ,  $N$  transfini,  $h = 1/N$ .

$$S_N = \sum_{k=1}^N (kh) \cdot h = h^2 \sum_{k=1}^N k = h^2 \cdot \frac{N(N+1)}{2} = \frac{N+1}{2N} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2N}.$$

$\text{st}(1/2 + 1/(2N)) = 1/2$  (puisque  $1/(2N)$  est infinitésimal). Donc  $\int_0^1 x dx = 1/2$ , comme prévu.

**Exemple 7** (Intégrale de  $x^2$  sur  $[0, 1]$ ).  $f(x) = x^2$ ,  $h = 1/N$ .

$$S_N = \sum_{k=1}^N (kh)^2 \cdot h = h^3 \sum_{k=1}^N k^2 = h^3 \cdot \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}.$$

Avec  $h = 1/N$ ,  $h^3 \cdot N(N+1)(2N+1)/6 = \frac{(N+1)(2N+1)}{6N^2}$ .

$$= \frac{2N^2 + 3N + 1}{6N^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2N} + \frac{1}{6N^2}.$$

st de cette expression =  $1/3$ . Donc  $\int_0^1 x^2 dx = 1/3$ .

**Théorème 5** (Équivalence avec l'intégrale de Riemann). Si  $f$  est Riemann-intégrable sur  $[a, b]$ , l'intégrale non standard de 6 coïncide avec l'intégrale de Riemann classique.

*Démonstration.* Pour  $f$  Riemann-intégrable, les sommes de Riemann à pas standard convergent vers l'intégrale classique. Par le théorème 3, les sommes à pas infinitésimal  $h = (b-a)/N$  vérifient  $S_N \approx \int_a^b f$  au sens classique. Donc  $\text{st}(S_N) = \int_a^b f$ .  $\square$

## 8 Application aux séries numériques

**Définition 7** (Série non standard). Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite classique dans  $\mathbb{R}$ . La somme partielle non standard d'ordre  $N \in \tilde{\mathbb{N}}_1$  est

$$S_N := \sum_{n=1}^N a_n.$$

La série  $\sum a_n$  est dite convergente de somme  $S \in \mathbb{R}$  si pour tout  $N \in \tilde{\mathbb{N}}_1 \setminus \mathbb{N}$ ,  $S_N$  est limité et  $\text{st}(S_N) = S$ .

**Théorème 6** (Équivalence avec la convergence classique). Cette définition coïncide avec la convergence classique des séries.

*Démonstration.* Application directe du théorème 3 à la suite des sommes partielles.  $\square$

**Exemple 8** (Série géométrique). Soit  $|r| < 1$  standard.  $\sum_{n=0}^N r^n = \frac{1-r^{N+1}}{1-r}$ . Pour  $N$  transfini et  $|r| < 1$ ,  $r^{N+1}$  est infinitésimal (puisque  $|r|^{N+1} \rightarrow 0$  classiquement, ce qui se traduit par  $r^{N+1} \approx 0$  pour  $N$  transfini par le critère). Donc  $S_N \approx \frac{1-0}{1-r} = \frac{1}{1-r}$ . La somme est  $\frac{1}{1-r}$ .

**Exemple 9** (Série harmonique).  $a_n = 1/n$ ,  $S_N = \sum_{n=1}^N 1/n$ . Pour  $N$  transfini,  $S_N \approx \ln(N) + \gamma$  (où  $\gamma$  est la constante d'Euler-Mascheroni), qui est illimité car  $\ln(N)$  illimité. Donc  $\text{st}(S_N)$  non défini : la série diverge.

## 9 Continuité non standard

**Définition 8** (Continuité non standard). Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par une formule transférable.  $f$  est dite continue en  $x_0 \in \mathbb{R}$  si pour tout  $x \in \mathbb{R}$  avec  $x \approx x_0$ , on a  $f(x) \approx f(x_0)$ .

**Théorème 7** (Équivalence avec la continuité classique). Cette définition coïncide avec la continuité classique  $\varepsilon$ - $\delta$ .

*Démonstration.* ( $\Leftarrow$ , classique vers non standard). Soit  $f$  continue en  $x_0$  au sens classique et  $x \approx x_0$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$  standard, il existe  $\delta > 0$  standard tel que  $|y - x_0| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x_0)| < \varepsilon$ . En particulier pour  $y = x$  (avec  $|x - x_0|$  infinitésimal donc  $< \delta$ ),  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ . Comme cela vaut pour tout  $\varepsilon > 0$  standard,  $f(x) \approx f(x_0)$ .

( $\Rightarrow$ , non standard vers classique). Par contraposition. Si  $f$  non continue au sens classique, il existe  $\varepsilon_0 > 0$  standard tel que pour tout  $\delta > 0$  standard, il existe  $y_\delta$  avec  $|y_\delta - x_0| < \delta$  mais  $|f(y_\delta) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$ . On choisit  $\delta = 1/n$  pour chaque  $n$ , on prolonge à  $n$  transfini :  $y_n$  vérifie  $|y_n - x_0| < 1/n$  infinitésimal donc  $y_n \approx x_0$ , mais  $|f(y_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$  non infinitésimal donc  $f(y_n) \not\approx f(x_0)$ .  $\square$

**Remarque 6** (Simplicité du formalisme). La définition non standard de la continuité est plus simple que la formulation  $\varepsilon$ - $\delta$  : un seul niveau de quantification (« pour tout  $x \approx x_0$  »), au lieu de trois imbriqués (« pour tout  $\varepsilon$ , il existe  $\delta$ , pour tout  $x$  »). Cette simplicité s'étend à la dérivée, à l'intégrale, et aux théorèmes fondamentaux.

## 10 Synthèse et vue d'ensemble

### Ce qui est établi

1. La relation  $\approx$  d'infinitésimale proximité et la structure de halo sur  $\widetilde{\mathbb{R}}$ .
2. Le théorème de la partie standard : tout limité a une unique partie standard dans  $\mathbb{R}$ .
3.  $\text{st} : \widetilde{\mathbb{R}}_\ell \rightarrow \mathbb{R}$  est un morphisme d'anneaux surjectif, de noyau l'idéal des infinitésimaux.
4. Décomposition canonique : tout limité  $a = \text{st}(a) + \varepsilon$  avec  $\varepsilon$  infinitésimal.
5. Critère non standard de convergence de suites.
6. Définitions non standard de la dérivée, de l'intégrale, des séries, de la continuité — toutes équivalentes aux définitions classiques.

### Pont entre les deux mondes

Le schéma général du calcul non standard se résume ainsi :

#### Programme de calcul.

1. Formuler le problème dans  $\mathbb{R}$  (limite, dérivée, intégrale).
2. Le traduire dans  $\widetilde{\mathbb{R}}$  en remplaçant les “ $\rightarrow \infty$ ” par des évaluations en  $n_\infty$ , les “ $h \rightarrow 0$ ” par des infinitésimaux concrets  $\varepsilon$ , etc.
3. Effectuer les calculs algébriques dans  $\widetilde{\mathbb{R}}$  (opérations totales tant qu'on reste dans le corps partiel).
4. Appliquer  $\text{st}$  au résultat pour récupérer la valeur dans  $\mathbb{R}$ .

## Avantages

- **Simplicité du formalisme.** Les définitions non standard (continuité, dérivée, intégrale) ne contiennent qu'un niveau de quantification, là où les versions  $\varepsilon$ - $\delta$  en contiennent deux ou trois.
- **Calculs explicites.** Les formes indéterminées classiques ( $\infty - \infty$ ,  $0 \cdot \infty$ ,  $0/0$ ) deviennent des calculs algébriques sur des infinitésimaux et illimités concrets.
- **Fondement géométrique.** Là où l'analyse non standard de Robinson repose sur les ultrafiltres (objet non constructif),  $\widetilde{\mathbb{R}}$  est construit géométriquement par le procédé du grain.

## Limites du cadre actuel

- Le corps  $\widetilde{\mathbb{R}}$  étant *partiel*, certains calculs sortent du cadre (produits dépassant  $2\pi \cdot 2^{n_\infty}$ , inverses d'infinitésimaux trop petits). L'extension  $\widetilde{\widetilde{\mathbb{R}}}$  par déploiement à  $-3n_\infty$  traitera ce cas.
- Les fonctions doivent être définies par des formules transférables pour que leur prolongement à  $\widetilde{\mathbb{R}}$  soit canonique. Les fonctions définies abstraitement (sans formule) nécessitent un cadre supplémentaire (extension par continuité, définition par valeurs sur  $\mathbb{Q}$ ).

## Pistes pour la suite

1. **Théorème fondamental du calcul intégral.** Démontrer dans le cadre non standard que  $\frac{d}{dx} \int_a^x f = f$  et que les primitives s'obtiennent par intégration de Riemann non standard.
2. **Convergence uniforme.** Caractériser la convergence uniforme des suites de fonctions par une condition non standard du type " $f_n(x) \approx f(x)$  pour tous  $n$  transfini et  $x$  standard".
3. **Compacité.** Reformuler la compacité (et les théorèmes associés : Bolzano-Weierstrass, valeurs intermédiaires, théorème de Heine) en termes de halos et de parties standards.
4. **Construction de la partie standard pour des structures plus riches.** Anneaux topologiques, espaces métriques, espaces de Banach, en utilisant la stratification de  $\widetilde{\mathbb{N}}$  pour graduer les ordres d'infinitésimalité.