

Conjugué de la privation (lecture relationnelle)

Hugues Genvrin

Cadre. On garde l'opérateur $\overline{}$ défini comme le **converse** d'une relation, $\overline{R} = R^\smile$, c'est-à-dire la dualité d'ordre. Sur les connecteurs, il coïncide avec la négation des deux arguments $\overline{S}(A, B) = S(\overline{A}, \overline{B})$. On note $A \setminus B := A \wedge \overline{B}$ la privation.

1 La privation, c'est l'ordre strict

Une simple table identifie $\setminus$ parmi les seize connecteurs :

(A, B)	00	01	10	11
$A \Rightarrow B$	1	1	0	1
$A \setminus B = A \wedge \overline{B}$	0	0	1	0

On lit immédiatement

$$A \setminus B = \overline{A \Rightarrow B}. \quad (1)$$

Côté relations sur $\mathbb{B}$, avec $a \leq b \iff (a \Rightarrow b) = 1$, la table $(0, 0, 1, 0)$ est celle de l'**ordre strict** :

$$R_{\setminus} = > = \geq \setminus = .$$

Autrement dit, là où $\Rightarrow$ est l'ordre large $\leq$, la privation $\setminus$ en est la version stricte.

2 La différence originale est vide

Le calcul de départ portait sur $(A \Leftrightarrow B) \setminus (A \Rightarrow B)$. Comme relations, $R_{\Leftrightarrow} =$ (la diagonale) et $R_{\Rightarrow} = \leq$, et la diagonale est *incluse* dans l'ordre :

$$= \subseteq \leq \implies R_{\Leftrightarrow} \setminus R_{\Rightarrow} = = \setminus \leq = \emptyset.$$

On le revérifie ligne à ligne : $\Leftrightarrow = (1, 0, 0, 1)$ et $\Rightarrow = (0, 0, 1, 0)$, dont la conjonction est $(0, 0, 0, 0) = \perp$.

Remarque 1 (l'erreur évitée) La version antérieure concluait $(A \Leftrightarrow B) \setminus (A \Rightarrow B) = A \Leftarrow B$, en traitant $\setminus$ comme une division qui « simplifierait » $\Leftrightarrow = \Leftarrow \wedge \Rightarrow$ en $\Leftarrow$. Mais la différence ensembliste ne se simplifie pas : $(\Leftarrow \cap \Rightarrow) \setminus \Rightarrow$ est toujours vide. Ce qui n'est pas vide, c'est la différence prise dans l'autre sens,

$$(A \Leftarrow B) \setminus (A \Rightarrow B) = \geq \setminus \leq = > = A \setminus B,$$

de table $(0, 0, 1, 0)$: on retombe sur l'ordre strict.

3 Le conjugué de la privation

On calcule $\overline{\setminus}$ par la définition (négation des deux arguments) :

$$\overline{\setminus}(A, B) = \setminus(\overline{A}, \overline{B}) = \overline{A} \wedge \overline{\overline{B}} = \overline{A} \wedge B = B \setminus A.$$

(A, B)	00	01	10	11
$A \setminus B$	0	0	1	0
$\overline{\setminus} = \overline{A} \wedge B$	0	1	0	0

Les deux lignes diffèrent : $\bar{\setminus} \neq \setminus$. Le conjugué est la **différence renversée** $B \setminus A$, c'est-à-dire l'ordre strict opposé $< = >$.

$$\bar{\setminus} : A \setminus B \mapsto B \setminus A$$

soit $\overline{(>)} = (<)$

Remarque 2 (pourquoi l'ancien encadré $\bar{\setminus} = \setminus$ est faux) *Il provenait de la chaîne précédente, elle-même bâtie sur la différence vide et sur la loi de De Morgan $\bar{\wedge} = \vee$, étrangère au converse. La duale-De Morgan de $\setminus$ (négation de la sortie) est d'ailleurs encore autre chose : c'est $\Leftarrow$, de table $(1, 0, 1, 1)$. Trois opérations, trois résultats :*

$$\underbrace{\bar{\setminus} = B \setminus A}_{\text{converse } (<)} \neq \underbrace{\setminus}_{\text{l'original } (>)} \neq \underbrace{\Leftarrow}_{\text{dual de De Morgan}}.$$

Le parallèle qui unifie

La privation se range exactement à côté de l'implication, un cran plus strict :

	ordre large	ordre strict
connecteur	$\Rightarrow (\leq)$	$\setminus (>)$
son conjugué $\bar{}$	$\Leftarrow (\geq)$	$B \setminus A (<)$

Le converse renverse l'ordre dans les deux colonnes : $\bar{\leq} = \geq$ donne $\Leftarrow = \Leftarrow$ (le résultat du §2), et $\bar{>} = <$ donne $\bar{\setminus} = B \setminus A$. C'est la même loi — le renversement d'ordre — appliquée à la version large et à la version stricte. Aucun XOR, aucune union, aucune différence vide.