

Principe de transfert entre infini potentiel et infini actuel

Pour la suite de l'axiomatique du grain

29 mai 2026

Avant-propos

Cette section formalise le pont entre $\tilde{\mathbb{R}}$ (infini actuel, où n_∞ et 2^{n_∞} existent comme éléments) et $\mathbb{R}$ (infini potentiel, restriction standard de $\tilde{\mathbb{R}}$). L'idée directrice : une certaine classe de propriétés se transfère *automatiquement* d'un cadre à l'autre.

Toutefois, cette transférabilité ne s'applique pas à toutes les formules. Les formules qui distinguent $\mathbb{R}$ de $\tilde{\mathbb{R}}$ (comme « x est fini », « x est infinitésimal ») ne se transfèrent pas et produisent des paradoxes apparents. La section identifie précisément la classe transférable et démontre le théorème principal pour cette classe.

1 Langage formel et formules

Définition 1 (Langage des corps ordonnés). *Le langage formel $\mathcal{L}$ comprend :*

- Des variables : $x, y, z, \dots$ représentant des éléments du corps étudié.
- Des constantes : $0, 1$, et toute constante fixée par le contexte (par exemple 2π).
- Des symboles de fonction : $+, -, \cdot, ^{-1}$.
- Des symboles de relation : $=, <, \leq$.
- Des connecteurs : $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$.
- Des quantificateurs : $\forall x, \exists x$, où x parcourt l'univers entier du corps considéré.

Définition 2 (Formule). *Une formule Fr est une expression syntaxiquement correcte construite à partir des éléments de $\mathcal{L}$, dont la valeur de vérité (VRAI ou FAUX) est déterminée par l'interprétation des symboles dans un corps donné.*

Définition 3 (Formule transférable). *Une formule Fr est dite transférable si elle est exprimable dans $\mathcal{L}$ sans constante ni prédicat qui distingue les éléments finis des éléments transfinis. Sont en particulier exclus :*

- Les prédicats « x est fini », « x est infinitésimal », « x est standard ».
- Les quantifications restreintes aux entiers finis.
- Les références explicites à n_∞ ou 2^{n_∞} comme constantes nommées.

Une formule transférable peut faire intervenir des constantes générales du corps, des fonctions polynomiales et rationnelles, et des quantifications portant sur l'univers entier.

Remarque 1. *La classe des formules transférables correspond aux formules du premier ordre dans le langage des corps ordonnés. C'est la classe pour laquelle un principe de transfert à la Łoś s'applique aux extensions non standard de $\mathbb{R}$.*

2 Interprétations duales

Définition 4 (Interprétation dans $\tilde{\mathbb{R}}$ et $\mathbb{R}$). Soit Fr une formule de $\mathcal{L}$.

- $Fr^{\tilde{\mathbb{R}}}$ désigne l'interprétation de Fr dans $\tilde{\mathbb{R}}$: les variables parcourent $\tilde{\mathbb{R}}$, les opérations sont celles de $\tilde{\mathbb{R}}$ (avec leur caractère éventuellement partiel), les quantificateurs portent sur $\tilde{\mathbb{R}}$ entier.
- $Fr^{\mathbb{R}}$ désigne l'interprétation de Fr dans $\mathbb{R}$: les variables parcourent $\mathbb{R}$, les opérations sont totales, les quantificateurs portent sur $\mathbb{R}$ entier.

Fr est vraie dans $\tilde{\mathbb{R}}$ (resp. $\mathbb{R}$) si $Fr^{\tilde{\mathbb{R}}} = \text{VRAI}$ (resp. $Fr^{\mathbb{R}} = \text{VRAI}$) pour toutes affectations des variables libres.

Remarque 2 (Partialité). Lorsque Fr contient une division et qu'on l'interprète dans $\tilde{\mathbb{R}}$, certaines évaluations peuvent être indéfinies. On convient que dans ce cas la formule est non évaluable (ni VRAI ni FAUX). Le théorème de transfert ci-dessous ne s'applique qu'aux formules dont toutes les évaluations sont définies dans les deux corps.

3 Théorème de transfert

Théorème 1 (Transfert). Soit Fr une formule transférable de $\mathcal{L}$ sans variable libre. Alors :

$$Fr^{\tilde{\mathbb{R}}} = \text{VRAI} \iff Fr^{\mathbb{R}} = \text{VRAI}.$$

Équivalamment, par contraposition :

$$Fr^{\tilde{\mathbb{R}}} = \text{FAUX} \iff Fr^{\mathbb{R}} = \text{FAUX}.$$

Démonstration. La preuve procède par induction sur la complexité syntaxique de Fr .

Cas de base : formule atomique. Une formule atomique transférable est de la forme $t_1 = t_2$, $t_1 < t_2$ ou $t_1 \leq t_2$, où t_1, t_2 sont des termes polynomiaux ou rationnels en les variables, avec coefficients dans les constantes admises (donc dans $\mathbb{R}$, puisque n_∞ et 2^{n_∞} sont exclus comme constantes).

Pour de telles formules, l'interprétation dans $\mathbb{R}$ et dans $\tilde{\mathbb{R}}$ coïncide sur les valuations dans $\mathbb{R}$ (stabilité de $\mathbb{R}$ par les opérations polynomiales et l'ordre, établie en Partie IV de l'axiomatique). Si la formule est universellement vraie dans $\tilde{\mathbb{R}}$, elle l'est en particulier sur les valeurs de $\mathbb{R}$. Réciproquement, si elle est vraie pour toutes valeurs dans $\mathbb{R}$, l'extension aux valeurs de $\tilde{\mathbb{R}}$ se fait par densité de $\mathbb{R}$ dans $\tilde{\mathbb{R}}$ et continuité des opérations polynomiales.

Étape inductive : connecteurs. Si $Fr = Fr_1 \wedge Fr_2$, alors $Fr^{\tilde{\mathbb{R}}} = Fr_1^{\tilde{\mathbb{R}}} \wedge Fr_2^{\tilde{\mathbb{R}}}$, et par hypothèse d'induction sur Fr_1 et Fr_2 , cela équivaut à $Fr_1^{\mathbb{R}} \wedge Fr_2^{\mathbb{R}} = Fr^{\mathbb{R}}$. Idem pour $\vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$.

Étape inductive : quantificateurs. Si $Fr = \forall x Fr_1(x)$:

($\Rightarrow$) Si $Fr^{\tilde{\mathbb{R}}} = \text{VRAI}$, alors $Fr_1(x)$ vraie pour tout $x \in \tilde{\mathbb{R}}$; en particulier pour tout $x \in \mathbb{R} \subset \tilde{\mathbb{R}}$, donc $Fr^{\mathbb{R}} = \text{VRAI}$.

($\Leftarrow$) Si $Fr^{\mathbb{R}} = \text{VRAI}$, alors $Fr_1(x)$ vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit $a \in \tilde{\mathbb{R}}$. Si $a \in \mathbb{R}$, $Fr_1(a)$ vraie directement. Si $a \in \tilde{\mathbb{R}} \setminus \mathbb{R}$, on utilise le fait que pour toute formule transférable Fr_1 , l'ensemble $\{x \in \tilde{\mathbb{R}} : Fr_1(x)\}$ est défini par une combinaison booléenne d'inégalités polynomiales. Cet ensemble est définissable au premier ordre, et sa caractérisation par $\mathbb{R}$ détermine entièrement sa structure dans $\tilde{\mathbb{R}}$ par densité de $\mathbb{R}$ et continuité polynomiale.

Pour $\exists x Fr_1(x)$, on procède par contraposition à partir de $\forall x \neg Fr_1(x)$.

Conclusion. L'équivalence se propage par induction structurelle à toute formule transférable sans variable libre. $\square$

Remarque 3 (Densité). La preuve repose sur le fait que $\mathbb{R}$ est dense dans $\tilde{\mathbb{R}}$ vis-à-vis des formules transférables. Une démonstration formelle nécessite la notion de partie standard : tout $a \in \tilde{\mathbb{R}}$ borné et non infinitésimal admet une unique partie standard $\text{st}(a) \in \mathbb{R}$ telle que $a - \text{st}(a)$ soit infinitésimal. Cette construction est analogue à celle des hyperréels.

4 Exemples et contre-exemples

4.1 Exemples : formules transférables

Exemple 1 (Commutativité de l'addition). $Fr := \forall x \forall y (x + y = y + x)$.

Formule transférable. Vraie dans $\widetilde{\mathbb{R}}$ (Partie III de l'axiomatique) et dans $\mathbb{R}$ (Partie IV). Le théorème 1 garantit qu'il suffit de la démontrer dans l'un des cadres.

Exemple 2 (Inégalité polynomiale). $Fr := \forall x (x \cdot x \geq 0)$.

Formule transférable. Vraie dans $\mathbb{R}$, donc vraie dans $\mathbb{R}$ par le théorème de transfert.

Exemple 3 (Existence d'une solution polynomiale). $Fr(a, b, c) := (a \neq 0 \wedge b \cdot b - 4 \cdot a \cdot c \geq 0) \rightarrow \exists x (a \cdot x \cdot x + b \cdot x + c = 0)$.

Transférable (l'existence d'une racine pour un trinôme à discriminant positif). Passe librement entre $\mathbb{R}$ et $\widetilde{\mathbb{R}}$.

4.2 Contre-exemples : formules non transférables

Contre-exemple 1 (Finitude). $Fr(x) := \ll x \text{ est fini} \gg$, formellement $\ll \exists n \in \mathbb{N} \text{ fini}, |x| < n \gg$.

Quantification restreinte aux entiers finis, donc non transférable.

— Dans $\mathbb{R}$: $Fr(x)$ vraie pour tout x .

— Dans $\widetilde{\mathbb{R}}$: $Fr(2^{n\infty}) = \text{FAUX}$.

Le transfert échoue.

Contre-exemple 2 (Propriété archimédienne). $Fr := \forall x (\exists n \in \mathbb{N} \text{ fini}, x < n)$.

Vraie dans $\mathbb{R}$, fausse dans $\widetilde{\mathbb{R}}$ (non archimédien : aucun entier fini ne majore $2^{n\infty}$).

Contre-exemple 3 (Non-existence d'infinitésimal). $Fr := \forall x (x > 0 \rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \text{ fini}, x > 1/n)$.

Vraie dans $\mathbb{R}$, fausse dans $\widetilde{\mathbb{R}}$: les infinitésimaux non nuls positifs sont plus petits que tout $1/n$ avec n fini.

Remarque 4 (Diagnostic général). *Les contre-exemples partagent une structure commune : une quantification explicite ou implicite sur les entiers finis apparaît dans la formule. C'est précisément ce que la définition 3 exclut. Une fois ces formules écartées, le théorème 1 s'applique sans paradoxe.*

5 Corollaires applicatifs

Corollaire 1 (Identités algébriques). *Toute identité polynomiale, ou tout énoncé universel à coefficients standards sur les corps ordonnés, vrai dans $\mathbb{R}$ est vrai dans $\widetilde{\mathbb{R}}$, et inversement. En particulier, identités remarquables, factorisations, et règles de calcul algébriques sont valides indifféremment dans les deux corps.*

Corollaire 2 (Compatibilité des solutions polynomiales). *Pour toute équation polynomiale $P(x_1, \dots, x_n) = 0$ ou inéquation $P(x_1, \dots, x_n) < 0$ à coefficients standards, l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ est l'extension naturelle de l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$: à infinitésimaux près, les solutions se correspondent.*

Corollaire 3 (Transfert des théorèmes algébriques). *Tout théorème énonçable comme une formule du premier ordre transférable, démontré dans $\mathbb{R}$, est automatiquement valable dans $\widetilde{\mathbb{R}}$ (et inversement). On peut donc importer librement les résultats classiques de l'algèbre des corps ordonnés.*

6 Application aux suites et limites

L'application qui motivait votre intuition initiale concerne le passage de propriétés vraies « le long d'une suite » à des propriétés vraies « à la limite ». Voici comment la formuler proprement, dans le cadre du théorème de transfert.

Définition 5 (Suite et limite). *Une suite classique dans $\mathbb{R}$ est une fonction $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \mapsto u_n$. Une suite étendue dans $\tilde{\mathbb{R}}$ est une fonction $u^* : \tilde{\mathbb{N}}_1 \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$.*

Une suite classique (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Proposition 1 (Caractérisation non standard de la limite). *Soit (u_n) une suite classique dans $\mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R}$, et (u_n^*) un prolongement à $\tilde{\mathbb{N}}_1$ (i.e. $u_n^* = u_n$ pour $n \in \mathbb{N}$). Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. (u_n) converge vers ℓ au sens classique.
2. $u_n^* - \ell$ est infinitésimal pour tout $n \in \tilde{\mathbb{N}}_1 \setminus \mathbb{N}$.

Démonstration. (1) $\Rightarrow$ (2) : Soit $\varepsilon > 0$ infinitésimal positif. Par hypothèse (1), pour tout $\varepsilon' > 0$ standard, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - \ell| < \varepsilon'$ pour tout $n \geq n_0$ standard. Pour $n \in \tilde{\mathbb{N}}_1 \setminus \mathbb{N}$, n est plus grand que tout entier standard, donc $|u_n^* - \ell| < \varepsilon'$ pour tout $\varepsilon' > 0$ standard, ce qui signifie $u_n^* - \ell$ infinitésimal.

(2) $\Rightarrow$ (1) : Par contraposition. Si (u_n) ne converge pas vers ℓ , il existe $\varepsilon_0 > 0$ standard et une sous-suite (u_{n_k}) telle que $|u_{n_k} - \ell| \geq \varepsilon_0$ pour tout k . On prolonge cette sous-suite à un indice transfini $n^* \in \tilde{\mathbb{N}}_1 \setminus \mathbb{N}$, et $|u_{n^*}^* - \ell| \geq \varepsilon_0$ n'est pas infinitésimal. Contradiction avec (2). $\square$

Corollaire 4 (Limite et propriétés transférables). *Soit (u_n) une suite classique convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$. Soit $Fr(x)$ une formule transférable à une variable libre. Si $Fr(u_n) = \text{VRAI}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et si Fr est continue en ℓ (au sens où l'ensemble $\{x : Fr(x)\}$ est fermé contenant les u_n), alors $Fr(\ell) = \text{VRAI}$.*

Démonstration. Par le théorème 1 appliqué à Fr : si $Fr(u_n) = \text{VRAI}$ pour tout $u_n \in \mathbb{R}$, alors pour tout prolongement u_n^* avec $u_n^* \in \tilde{\mathbb{R}}$, $Fr(u_n^*) = \text{VRAI}$. Par la proposition 1, $u_n^* \approx \ell$ pour $n \in \tilde{\mathbb{N}}_1 \setminus \mathbb{N}$ (infinitésimalement proche). Par continuité de Fr en ℓ (l'ensemble $\{x : Fr(x)\}$ étant fermé contenant u_n^* infinitésimalement proche de ℓ), on a $Fr(\ell) = \text{VRAI}$. $\square$

Remarque 5 (Distinction avec votre énoncé initial). *Votre intuition initiale — « si $Fr(u_n \rightarrow \ell) = \text{VRAI}$ alors $Fr(\ell) = \text{VRAI}$ » — correspond précisément au corollaire 4, à condition d'ajouter deux hypothèses manquantes : (i) Fr doit être transférable (exclure « être fini », « être infinitésimal », etc.), et (ii) Fr doit être continue en ℓ (sinon la limite peut ne pas hériter de la propriété, comme « être rationnel » qui n'est pas continue).*

7 Synthèse

- Le principe de transfert n'est valable que pour les formules du premier ordre dans le langage des corps ordonnés *sans référence à la finitude*.
- Quand il est valable, il fournit une équivalence parfaite entre les deux directions : vrai dans $\tilde{\mathbb{R}}$ équivaut à vrai dans $\mathbb{R}$. Les énoncés T1 et T2 de votre brouillon sont logiquement équivalents par contraposition et forment un seul théorème.
- L'application aux suites et limites se fait via la proposition 1 (caractérisation non standard) et le corollaire 4 (passage de propriétés transférables et continues à la limite). Ces résultats récupèrent l'intuition initiale dans un cadre rigoureux.
- Le pont entre $\mathbb{R}$ et $\tilde{\mathbb{R}}$ établi ici prépare l'analyse à venir : continuité, dérivation, intégration peuvent être abordées indifféremment dans l'un des deux corps, à condition de rester dans la classe transférable.

8 Points laissés ouverts

1. **Densité de $\mathbb{R}$ dans $\tilde{\mathbb{R}}$.** La preuve du théorème de transfert repose sur la densité ; une démonstration formelle de cette densité, via la construction de la partie standard, reste à rédiger en détail.
2. **Extension à d'autres structures.** Le théorème ne traite que des corps ordonnés. Une version pour les structures plus riches (anneaux topologiques, espaces métriques) demanderait à enrichir le langage $\mathcal{L}$.
3. **Comparaison avec les hyperréels et les surréels.** Le principe ici est analogue au principe de transfert de Łoś pour les hyperréels (Robinson) ; une comparaison formelle aiderait à situer $\tilde{\mathbb{R}}$ dans le paysage des extensions non archimédiennes.