Différentiation

Hugues Genvrin

30 janvier 2026

Newton (Tome III pages 98-99

2. EXAMPLE I. If the Relation of the flowing Quantities x and y be $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$; firſt diſpoſe the Terms according to x, and then according to y, and multiply them in the following manner.

Mult.	x^3	$-ax^2$	$+axy$	$-y^3$	$-y^3$	$+axy$	$\begin{matrix}-ax^2\\+x^3\end{matrix}$
by	$\frac{3\dot{x}}{x}$	$\frac{2\dot{x}}{x}$	$\frac{\dot{x}}{x}$	0	$\frac{3\dot{y}}{y}$	$\frac{\dot{y}}{y}$	0
makes	$3\dot{x}x^2$	$-2a\dot{x}x$	$+a\dot{x}y$	*	$-3\dot{y}y^2$	$+a\dot{y}x$	*

The Sum of the Products is $3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y - 3\dot{y}y^2 + a\dot{y}x = 0$, which Equation gives the Relation between the Fluxions $\dot{x}$ and $\dot{y}$.

« C'est dans *La méthode des fluxions et des suites infinies* parue à titre posthume en 1736, mais rédigé entre 1664 et 1671 que Newton publia ses travaux sur la dérivée ainsi que sur l'opération inverse : le calcul d'une primitive pour calculer les aires des courbes. »
« Newton introduisit pour la première fois les concepts de fluentes ainsi que de fluxions : « des quantités fluentes ou fluentes : x sont des quantités qui augmentent graduellement et indéfiniment[...] ». « les $\dot{x}$ sont les fluentes augmentées par le mouvement qui les produit et qui sont appelées fluxions. »

-La formalisation du calcul des dérivées qu'il nomme fluxions, les fonctions étant nommées des fluentes :

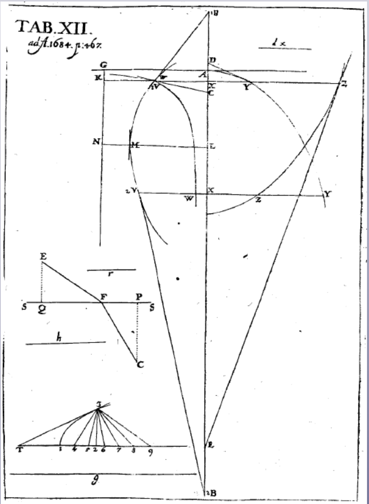
1. Somme : $(x \dot{+} y) = \dot{x} + \dot{y}$,
2. Produit : $(x \dot{\times} y) = \dot{x} \times y + x \times \dot{y}$,
3. Puissance : $(\dot{x^n}) = n \times (x^{n-1}) \times \dot{x}$,
4. Quotient : $\dot{\left(\frac{x}{y}\right)} = \frac{\dot{x} \times y - \dot{y} \times x}{y^2}$,
5. Composition : $(x \dot{\circ} y) = (\dot{x} \circ y) \times \dot{y}$.

Exemple : la composition.
$(x \dot{\circ} y) = \frac{x[y(t+dt)] - x[y(t)]}{dt} = \frac{x(y+dy) - x(y)}{dy} \times \frac{dy}{dt} = \dot{x} \circ y \times \dot{y}$.
On remarque que nous sommes placés dans l'hypothèse d'un temps et d'un espace absolus.

Leibniz (Tome III pages 98-99)

Nova methodus pro maximus et minimis, itemque tangentibus [...] publié en 1684 :

Leibniz communiqua les règles de son nouveau calcul. L'exemple qu'il prit fut géométrique, comme on pourra le voir sur la figure Leibniz en déduisit les propriétés de la tangente, des extremum, des points d'inflexion, de la convexité ainsi que la concavité d'une courbe.



Quelques utilisations des dérivées

1. La dérivée renseigne les extrema, la croissance du graphe fonctionnel, la pente de la tangente en un point.
2. La dérivée seconde permet d'étudier la courbure, les points d'inflexion et de rebroussement.
3. MacLaurin, Lagrange et Taylor développèrent le développement en série des fonctions.
4. Une longueur élémentaire $d\ell = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$.
5. Rayon de courbure en un point M : $R = \frac{1}{K} = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}$
6. Le calcul différentiel établit des équations en fonction des dérivées de différents ordres.
7. ...

ps : on remarquera que la dérivées permet une étude quantitative mais aussi qualitative d'un graphe fonctionnel par exemple.

la fonction $/y$

« Tangente en x' : l'équation de la tangente sera définie par la fonction $/_{x'}y(x)$ ou $/y(x)$ si l'abscisse de la tangente à la courbe est évidente, et prendra donc en x' la valeur $/y(x') = y(x')$ et en les autres abscisses la valeur $/y(x) \neq y(x)$ sauf car particulier. »

« Taux de croissance : On définira des notions de taux de croissance pour diverses fonctions, sachant qu'un taux de croissance sera défini sur un pas noté $dx \in \mathscr{R}$. On travaillera dans les cas où $dx \in \mathscr{R}_*^+$ qui pourra être infiniment petit. Le taux sera noté $\tau_{y,dx}(x) = \frac{y(x+dx)-y(x)}{y(x)}$. »

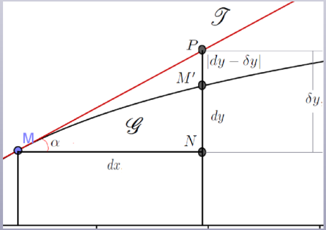
Taylor-Lagrange

$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-a)^n}{i!} + R_n(x)$
En appliquant la formule de Taylor en $a = 0$, on obtient la formule de MacLaurin. Cette formule permettant de calculer les développements limités :

1. $e^x = \sum_i \frac{x^i}{i!}$
2. $cos(x) = \sum_{i=0} (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!}$
3. $sh(x) = \sum_{i=1} \frac{x^{2i-1}}{(2i-1)!}$
4. ...

Synthèse de Piskounov (Tome III page 103)

Synthèse des approches qui permet de distinguer les méthodes.



Lorsque $dx \to 0$, on se retrouve dans le cas de la dérivée de Newton.
La différentielle $\Delta y = dy - \delta y$ entre x et $x + dx$ permet de voir l'approche de Leibnitz.
N'existerait-il pas une relation entre taux de croissance fonctionnel et taux de croissance différentiel, en remarquant que $\tan(\alpha) = \frac{NP}{MN} = \frac{\delta y}{dx} = \frac{/y(x+dx)-y(x)}{y(x)} \times \frac{y(x)}{dx}$.

Convexité

Un graphe fonctionnel $\mathscr{G}$ est dit convexe sur un intervalle I si $\forall M \in I$, en appellant $\mathscr{T}_M$ la tangente en M, tout point de $\mathscr{G}$ se situe en-dessous du point M' définit par sa projection perpendiculaire à l'axe $(x'Ox)$ sur sa tangente. Inversement elle sera dite concave, dans le cas particulier où $M = M'$ le graphe fonctionnel possédera un point singulier : d'inflexion si changement de convexité autour du point ou rebroussement si la convexité est de même nature.

Proposition

Si la courbe est convexe dans le demi-plan(S) ou concave dans (N) cela est équivalent à dire que $\tau_{/y} > \tau_y$.

Proposition

Si la courbe est concave dans le demi-plan(S) ou convexe dans (N) cela est équivalent à dire que $\tau_{/y} < \tau_y$.

En résumé (Tome III page 111)

On obtient des propriétés qualitatives en fonction des rapports des taux fonctionnels et différentiels et non pas en fonction de la dérivée seconde.

	Convexité	Concavité
N	$\tau_{/y,dx} < \tau_{y,dx}$	$\tau_{/y,dx} > \tau_{y,dx}$
S	$\tau_{/y,dx} > \tau_{y,dx}$	$\tau_{/y,dx} < \tau_{y,dx}$

Différentiation

Nouvelle approche

Définition

On appelle taux de croissance fonctionnel en x sur dx unités la valeur $\tau_{y,dx} = \frac{y(x+dx)-y(x)}{y(x)}$.

Définition

On appelle taux de croissance différentiel en x sur dx unités la valeur $\tau_{/y,dx} = \frac{/y(x+dx)-/y(x)}{/y(x)}$.

Proposition

La différentielle d'une fonction y en x est égal au produit de $y(x)$ par la différence des taux de croissance fonctionnel et différentiel sur l'accroissement dx.