

Différentiation et Intégration

Hugues Genvrin

Novembre 2024

Plan

1 Différentiation

2 Intégration

Deux sujets

Initialement distincts puis liés

Le **calcul intégral** trouve son origine dans des problèmes géométriques :

- 1 Calcul d'aires de figures planes, de surfaces.
- 2 Calcul de longueurs de lignes courbes.
- 3 Calcul de volumes.

Deux courants se présentent : la méthode d'exhaustion (Eudoxe, Archimède) et le calcul des primitives initié par les mécaniciens (Galilée, Torricelli) puis formalisé par Newton.

Le **calcul différentiel**, des fluxions ou dérivées, remonte à Newton et Leibniz : il est largement postérieur à l'intégration par exhaustion, mais précède immédiatement le calcul des primitives dans l'œuvre de Newton, où il s'inscrit dans une approche analytique. Le calcul des dérivées de Newton sera repris par Maclaurin pour le développement des fonctions en séries.

Newton (Tome III, pages 98-99)

2. EXAMPLE I. If the Relation of the flowing Quantities x and y be $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$; first dispose the Terms according to x , and then according to y , and multiply them in the following manner.

$$\begin{array}{r|l} \text{Mult. } x^3 & -ax^2 & +axy & -y^3 \\ \text{by } \frac{3x}{x} & \cdot \frac{2x}{x} & \cdot \frac{x}{x} & \cdot 0 \\ \hline \text{makes } 3x\dot{x}^2 & -2ax\dot{x} & +a\dot{x}y & * \\ & & -3y^2\dot{y} & +a\dot{y}x & * \end{array}$$

The Sum of the Products is $3x\dot{x}^2 - 2ax\dot{x} + a\dot{x}y - 3y^2\dot{y} + a\dot{y}x = 0$, which Equation gives the Relation between the Fluxions \dot{x} and \dot{y} .

« C'est dans *La méthode des fluxions et des suites infinies*, parue à titre posthume en 1736 mais rédigée entre 1664 et 1671, que Newton publia ses travaux sur la dérivée ainsi que sur l'opération inverse : le calcul d'une primitive pour évaluer les aires sous les courbes. »

Newton introduisit les concepts de *fluentes* et de *fluxions* : les fluentes (x) sont des quantités qui augmentent graduellement et indéfiniment ; les fluxions (\dot{x}) sont les vitesses du mouvement qui les produit.

Newton (Tome III, pages 98-99)

Cadre ontologique : un espace et un temps absolus.

Formalisation du calcul des dérivées (fluxions), les fonctions étant les fluentes :

- 1 Somme : $\overline{\dot{(x + y)}} = \dot{x} + \dot{y}$;
- 2 Produit : $\overline{\dot{(xy)}} = \dot{x}y + x\dot{y}$;
- 3 Puissance : $\overline{\dot{(x^n)}} = nx^{n-1}\dot{x}$;
- 4 Quotient : $\overline{\dot{\left(\frac{x}{y}\right)}} = \frac{\dot{x}y - \dot{y}x}{y^2}$;
- 5 Composition : $\overline{\dot{(x \circ y)}} = (\dot{x} \circ y) \times \dot{y}$.

Exemple (composition) :

$$\overline{\dot{(x \circ y)}} = \frac{x[y(t + dt)] - x[y(t)]}{dt} = \frac{x(y + dy) - x(y)}{dy} \times \frac{dy}{dt} = (\dot{x} \circ y) \times \dot{y}.$$

On est placé dans l'hypothèse d'un temps et d'un espace absolus.

Quelques utilisations des dérivées

- 1 La dérivée renseigne sur les extrema, la croissance du graphe, la pente de la tangente en un point.
- 2 La dérivée seconde renseigne sur la courbure, les points d'inflexion et de rebroussement.
- 3 Maclaurin, Lagrange et Taylor établissent le développement en série des fonctions.

4 Longueur élémentaire : $dl = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$.

5 Rayon de courbure en M : $R = \frac{1}{K} = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}$.

- 6 Le calcul différentiel établit des équations liant les dérivées de différents ordres.
- 7 ...

N.B. : la dérivée permet une étude à la fois quantitative et qualitative d'un graphe fonctionnel.

« **Tangente en x'** : l'équation de la tangente est donnée par la fonction $y'(x)$, notée $y'(x)$ lorsque l'abscisse du point de contact est évidente. Elle prend en x' la valeur $y'(x') = y'(x')$ et, aux autres abscisses, la valeur $y'(x) \neq y'(x)$ sauf cas particulier. »

« **Taux de croissance** : on définira des taux de croissance pour diverses fonctions, sur un pas noté $dx \in \mathbb{R}$. On travaillera dans les cas où $dx \in \mathbb{R}_*^+$, éventuellement infiniment petit. Le taux est noté

$$\tau_{y,dx}(x) = \frac{y(x+dx) - y(x)}{dx}.$$

Formule de Taylor avec reste de Lagrange :

$$f(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i + R_n(x), \quad R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)], \quad \theta \in]0; 1$$

En $a = 0$, on obtient la formule de Maclaurin, qui fournit les développements limités :

1 $e^x = \sum_{i \geq 0} \frac{x^i}{i!};$

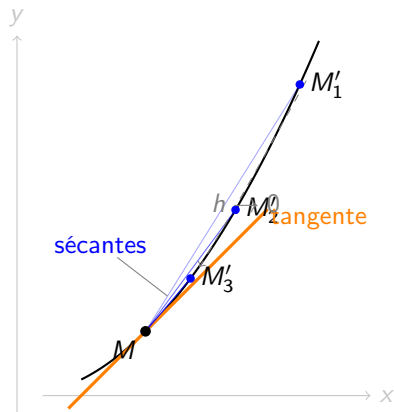
2 $\cos(x) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!};$

3 $\operatorname{sh}(x) = \sum_{i \geq 1} \frac{x^{2i-1}}{(2i-1)!};$

4 ...

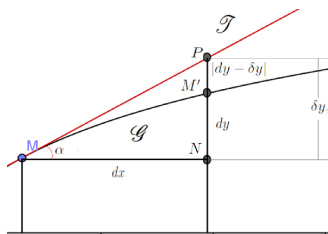
De la sécante à la tangente

La dérivée est la limite de la pente de la corde



La sécante (MM') pivote autour de M ; sa pente $\frac{y(x+h) - y(x)}{h}$ tend vers $y'(x)$, pente de la tangente.

Synthèse des approches permettant de distinguer les méthodes.



Lorsque $dx \rightarrow 0$, on retrouve la dérivée de Newton. La différentielle $\Delta y = dy - \delta y$ entre x et $x + dx$ illustre l'approche de Leibniz.

N'existerait-il pas une relation entre taux de croissance fonctionnel et taux différentiel ? On remarque que

$$\tan(\alpha) = \frac{NP}{MN} = \frac{\delta y}{dx} = \frac{y(x + dx) - y(x)}{y(x)} \times \frac{y(x)}{dx}.$$

Différentiation

Nouvelle approche

Définition (taux de croissance fonctionnel)

Le taux de croissance fonctionnel en x sur dx unités est $\tau_{y,dx} = \frac{y(x+dx) - y(x)}{y(x)}$.

Définition (taux de croissance différentiel)

Le taux de croissance différentiel en x sur dx unités est

$$\tau_{/y,dx} = \frac{/y(x+dx) - /y(x)}{/y(x)}.$$

Proposition

La différentielle d'une fonction y en x est égale au produit de $y(x)$ par la différence des taux de croissance fonctionnel et différentiel sur l'accroissement dx .

Ces taux ne sont pas définis en $y(x) = 0$.

Intérêt majeur (Tome III, page 111)

Propriété qualitative du graphe fonctionnel

Convexité

Soit $M \in I$ et \mathcal{T}_M la tangente à \mathcal{G} en M . Pour une abscisse x , on note $M' = (x, /y(x))$ le point de \mathcal{T}_M de même abscisse, où $/y$ est la fonction tangente. La position relative de \mathcal{G} et de sa tangente se lit sur le signe de $y(x) - /y(x)$. Au point particulier où $M = M'$, le graphe présente un point singulier : *d'inflexion* si la convexité change de nature autour du point, de *rebroussement* si elle reste de même nature.

Proposition

Courbe convexe dans le demi-plan (S) ou concave dans (N) $\iff \tau_{/y} > \tau_y$.

Proposition

Courbe concave dans le demi-plan (S) ou convexe dans (N) $\iff \tau_{/y} < \tau_y$.

Les propriétés qualitatives s'obtiennent en comparant les taux fonctionnel et différentiel, et non via la dérivée seconde.

	Convexité	Concavité
N (<i>croissante</i>)	$\tau_{/y,dx} < \tau_{y,dx}$	$\tau_{/y,dx} > \tau_{y,dx}$
S (<i>décroissante</i>)	$\tau_{/y,dx} > \tau_{y,dx}$	$\tau_{/y,dx} < \tau_{y,dx}$

Chronologie des différents apports

Auteur	Désignation	Période
Eudoxe	méthode d'exhaustion	IV ^e s. av. J.-C.
Archimède	méthode d'exhaustion améliorée	III ^e s. av. J.-C.
Newton	Primitives	1660/1665
Leibniz	Calcul différentiel	1684
Cauchy	Intégrale de Cauchy	1823
Riemann	Intégrale de Riemann	1854
Darboux	Intégrale de Darboux	1875
Stieltjes	Intégrale de densité	1894
Lebesgue	Intégrale de Lebesgue	1902/1904
Denjoy-Perron	Intégrale de Denjoy	1912-1914
Kurzweil-Henstock	Intégrale de jauge	1957/1961

On part de subdivisions élémentaires. Pour $\mathcal{D} = (x_0, \dots, x_n)$ de $[a; b]$:

$$S_{\mathcal{D}}^+ = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \sup_{[x_i; x_{i+1}]} y, \quad S_{\mathcal{D}}^- = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \inf_{[x_i; x_{i+1}]} y.$$

Sur un pas où y est monotone, sup et inf sont atteints aux bornes.

y est intégrable lorsque $\inf_{\mathcal{D}} S_{\mathcal{D}}^+ = \sup_{\mathcal{D}} S_{\mathcal{D}}^- = A$; quand le pas tend vers 0, $S_{\mathcal{D}}^+$ et $S_{\mathcal{D}}^-$ tendent vers A , valeur commune de l'intégrale de Riemann.

Intégrale de Riemann pointée

y est intégrable, d'intégrale A , si :

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, toute subdivision de pas $< \delta$ pointée par $h_i \in]x_i; x_{i+1}[$ vérifie

$$|S_{\mathcal{D}}(h_i) - A| = \left| \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) y(h_i) - A \right| < \epsilon.$$

Quand le pas tend vers 0, $S_{\mathcal{D}}(h_i) \rightarrow A$, valeur de l'intégrale de Riemann.

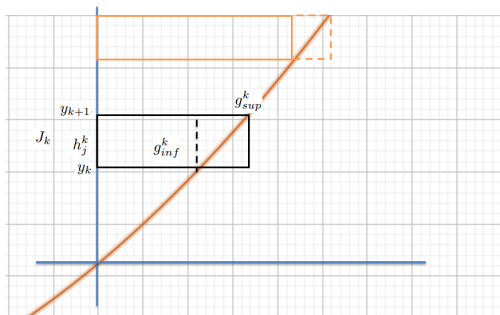
Intégrale de jauge ou de Kurzweil-Henstock

On part de subdivisions pointées. Une *jauge* est une fonction $\delta : I \rightarrow \mathbb{R}_+^*$. Une subdivision pointée $((x_i), (h_i))$ avec $h_i \in [x_i; x_{i+1}]$ est dite δ -fine si

$$[x_i; x_{i+1}] \subset]h_i - \delta(h_i); h_i + \delta(h_i)[\quad \text{pour tout } i.$$

On pose $S_{\mathcal{D}} = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) y(h_i)$.

y est intégrable au sens de Kurzweil-Henstock, d'intégrale A , si pour tout $\epsilon > 0$ il existe une jauge δ telle que toute subdivision δ -fine vérifie $|S_{\mathcal{D}} - A| < \epsilon$.



« Soit J une subdivision de $I = [t_0; t_n]$ pointée par (h_i) , formant une partition de I . Soit α croissante sur $[t_0; t_n]$; on pose $\Delta(\alpha_i) = \alpha(t_{i+1}) - \alpha(t_i)$ pour $0 \leq i < n$, et $\max [\Delta(\alpha_i); J]$ est le *pas* de la subdivision. On note : »

$$\mathcal{D} = \{[\alpha(t_i); \alpha(t_{i+1})], h_i \in [t_i; t_{i+1}]\}.$$

Comme $h_i \in [t_i; t_{i+1}] \Leftrightarrow \alpha(h_i) \in [\alpha(t_i); \alpha(t_{i+1})]$, pour une fonction y définie entre les bornes on construit la somme de Riemann-Stieltjes :

$$S_{\mathcal{D}}(y) = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta(\alpha_i) y(h_i).$$

L'intégrale de Stieltjes

y est intégrable au sens de Stieltjes s'il existe un réel A tel que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que toute subdivision de pas $< \delta$ vérifie $|S_{\mathcal{D}}(y) - A| \leq \epsilon$. On note alors

$$A = \int y d\alpha = \int y(x) d(\alpha(x)).$$

L'intégrale de Lebesgue (1)

Fonctions mesurables

Tribu

Une *tribu* sur E est une famille \mathcal{E} de parties de E telle que :

- 1 $\emptyset \in \mathcal{E}$;
- 2 $A \in \mathcal{E} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{E}$;
- 3 $(A_i)_{i \geq 1}$ suite d'éléments de $\mathcal{E} \Rightarrow \bigcup_i A_i \in \mathcal{E}$.

(La tribu *borélienne* est celle engendrée par les ouverts.) Le couple (E, \mathcal{E}) est un espace mesurable.

Fonction mesurable

$f : (E, \mathcal{E}) \rightarrow (F, \mathcal{F})$ est mesurable si $\forall F' \in \mathcal{F}, f^{-1}(F') \in \mathcal{E}$.

L'intégrale de Lebesgue (2)

Construction de l'intégrale

On se donne une *mesure* μ sur (E, \mathcal{E}) (positive, $\mu(\emptyset) = 0$, σ -additive).

Fonctions étagées

Pour $s = \sum_{k=1}^m c_k 1_{A_k}$ ($c_k \geq 0$, $A_k \in \mathcal{E}$) :
$$\int_E s \, d\mu = \sum_{k=1}^m c_k \mu(A_k).$$

Cas général

Pour f mesurable positive :
$$\int_E f \, d\mu = \sup \left\{ \int_E s \, d\mu : 0 \leq s \leq f, s \text{ étagée} \right\}.$$

Une fonction quelconque est intégrable si $\int_E |f| \, d\mu < +\infty$, et

$$\int_E f \, d\mu = \int_E f^+ \, d\mu - \int_E f^- \, d\mu.$$

Intégrale de Riemann et pas infinitésimal (1/3)

Pour f continue sur $[a; b]$, subdivision de pas $\Delta x = x_i - x_{i-1}$, $x_0 = a$, $x_n = b$. On pose $\text{Sup} = \sup f$ et $\text{Inf} = \inf f$ sur $[x_{i-1}; x_i]$; alors

$$I_n^+ = \sum_{i=1}^n \text{Sup} \Delta x, \quad I_n^- = \sum_{i=1}^n \text{Inf} \Delta x.$$

f est Riemann-intégrable si $\lim I_n^+ = \lim I_n^-$, et l'on pose $I = \int_a^b f(x) dx$.

Cas particulier : $x_{i+1} = \frac{b-a}{n} + x_i$, $x_0 = a$. Pour f strictement décroissante et $b - a = 1$, $x_i = \frac{i}{n} + a$.

Intégrale de Riemann et pas infinitésimal (2/3)

$$I_n^+ = \sum_{k=na}^{n(a+1)-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right), \quad I_n^- = \sum_{k=na+1}^{n(a+1)} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Ainsi $I_n^+ - I_n^- = \frac{1}{n}(f(a) - f(a+1)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc $\lim I_n^+ = \lim I_n^-$ et

$$\int_a^{a+1} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=na}^{n(a+1)} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Intégrale de Riemann et pas infinitésimal (3/3)

Lecture « granulaire » (analyse non standard)

L'intuition de Zénon — l'aire comme *somme* de tranches infinitésimales plutôt que comme *limite* — se formalise dans les hyperréels de Robinson. Il existe des entiers hyperréels *infinis* N , pour lesquels $1/N$ est un infinitésimal bien défini.

Pour f continue sur $[a; a + 1]$, la somme hyperfinie de pas $1/N$ diffère de l'intégrale d'un infinitésimal ; en prenant la *partie standard* $\text{st}(\cdot)$:

$$\int_a^{a+1} f(x) dx = \text{st} \left(\sum_{k=Na}^{N(a+1)} \frac{1}{N} f\left(\frac{k}{N}\right) \right), \quad N \text{ hyperentier infini.}$$

Remarque : N est un hyperentier, **pas** le cardinal \aleph_0 de \mathbb{N} , dans lequel on ne peut ni substituer ni former $1/\aleph_0$.

Intégrale impropre (1/2)

Soit

$$\begin{aligned} f &: E \rightarrow F \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned} \quad (E, F \subset \mathbb{R}).$$

Si f est bijective, sa réciproque f^{-1} vérifie $f^{-1} \circ f = \text{id}$:

$$\begin{aligned} f^{-1} &: F \rightarrow E \\ y &\mapsto f^{-1}(y). \end{aligned}$$

Subdivisions élémentaires : $E = \bigcup_k [x_{\text{inf}}^k; x_{\text{sup}}^k[$ et $F = \bigcup_k [y_{\text{inf}}^k; y_{\text{sup}}^k[$.

Intégrale impropre (2/2)

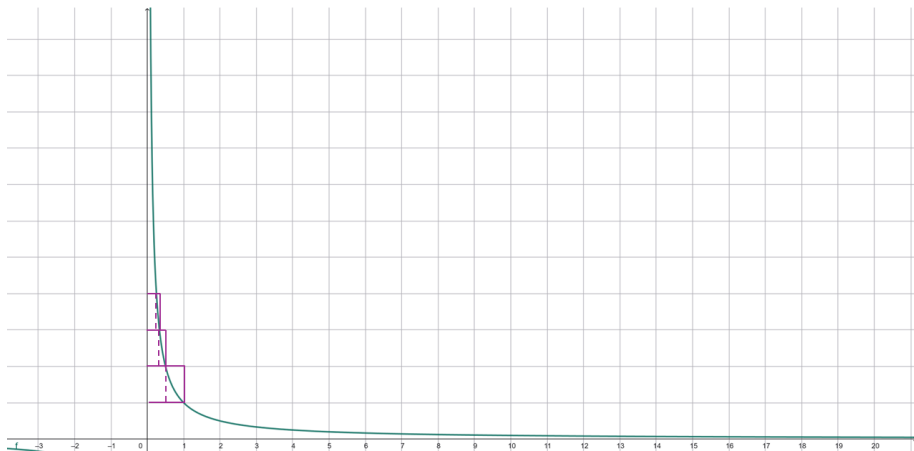


Figure – Intégration de Riemann sur l'axe $(y'Oy)$.

Un exemple d'intégrale impropre (1/2)

Soit $I = \int_k^{k+1} \frac{dx}{x}$ avec $k \geq 1$. Alors

$$I = [\ln x]_k^{k+1} = \ln(k+1) - \ln(k) = \ln\left(\frac{1}{k}\right) - \ln\left(\frac{1}{k+1}\right) = [\ln x]_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}}.$$

Par le changement de variable $u = 1/x$, $I = \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{x}$.

Theorem

Pour $k \geq 1$,
$$\int_k^{k+1} \frac{dx}{x} = \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{x}.$$

Un exemple d'intégrale impropre (2/2)

Lecture heuristique — à manier avec prudence

En analyse classique, $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ **diverge** : $\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = -\ln \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} +\infty$.

Interprétation (non standard)

Pour N hyperentier infini, la somme hyperfinie associée est un hyperréel *infini*, formellement de l'ordre de $\ln N$: sa partie standard n'est pas finie. On peut *noter* cette quantité $\ln(N)$, mais ce n'est pas un réel, et l'intégrale ne converge pas pour autant.

Exploration de la « granularité » transfinie, non un résultat d'analyse classique.

Calcul de l'intégrale par les tangentes

Soit J une subdivision infinitésimale de $I = [x_0; x_n]$ pointée par (h_i) et (h'_i) , formant une partition de I . Le point M parcourt le graphe \mathcal{G} entre $M_0(x_0; y(x_0))$ et $M_n(x_n; y(x_n))$. On réutilise les taux de croissance définis plus haut.

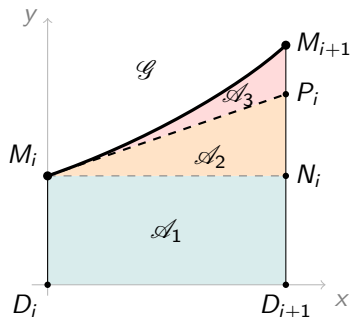
Hypothèses

- 1 le graphe est de convexité homogène (sans point d'inflexion);
- 2 y est monotone;
- 3 y admet une tangente en x_i (dérivabilité en x_i).

L'aire \mathcal{A} définie par $\mathcal{G} \cap \mathcal{S}(D_i; D_{i+1})$

Sur un pas, on décompose l'aire en trois sous-aires :

- 1 \mathcal{A}_1 : rectangle (M_i, N_i, D_{i+1}, D_i) ;
- 2 \mathcal{A}_2 : triangle rectangle (M_i, N_i, P_i) , d'hypoténuse la tangente en M_i ;
- 3 \mathcal{A}_3 : résidu (M_i, P_i, M_{i+1}) , entre la tangente et la courbe \mathcal{G} .



La somme $\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3$ recouvre tout le domaine $D_i D_{i+1} M_{i+1} \cap M_i$ sans recouvrement : c'est exactement le développement de Taylor à l'ordre 1 plus reste,

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} y \, dx \approx y(x_i) \Delta x + \frac{1}{2} y'(x_i) \Delta x^2 + (\text{résidu } \mathcal{A}_3),$$

avec $\Delta x = x_{i+1} - x_i$.

Exemple

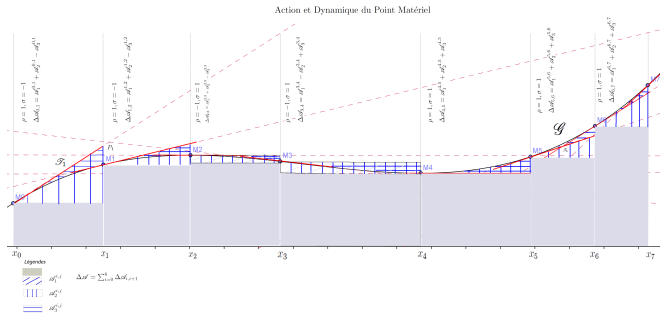


Figure – Division en pas de convexité homogène, puis subdivision en pas infinitésimaux pour intégrer.

Quatre cas de calcul des aires par décomposition en surfaces élémentaires $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$.