

Du cercle complexe au plan complexe, et le grain nul

Cours en deux parties dans la théorie du grain

Hugues Genvrin

Septembre 2026

Présentation du cours

Deux questions, posées à partir du chapitre 13 de *Le grain* (exponentiation complexe) :

1. Comment passer du cercle complexe au plan complexe ?

- le cercle porte deux grilles emboîtées, fine et grossière ;
- comment les porter sur deux axes, et quel est alors le rôle de i ?

2. Le plan complexe est-il équivalent à un grain nul ?

- l'opérateur $\omega = 2^{n\infty}i$ replie un axe sur l'autre ;
- deux droites superposées de somme orientée nulle ;
- où se trouve vraiment le « grain nul » ?

Fil conducteur : ce qui est net au niveau des grains et ce qu'en garde la promotion.

Rappels et notations

I. Du cercle complexe au plan complexe

II. Plan complexe et grain nul

Synthèse

Rappels et notations

Ce que construit le chapitre 13

- L'élément i n'est pas adjoint algébriquement : il **émerge du quart de tour** du cercle C_1 (th. 60). Le demi-tour est l'involution $x \mapsto -x$ (prop. 71), et le quart de tour en est la racine carrée.
- L'exponentielle complexe stratale $\mathcal{E}(\theta) = e^{i\theta}$ (déf. 85) ; le plan complexe stratal $P_{\mathbb{C}} = \tilde{\mathbb{R}} \oplus i\tilde{\mathbb{R}}$ (déf. 86).
- Le théorème 61 associe :
 - l'axe réel à la strate fine $G_{-2n_{\infty}}$;
 - l'axe imaginaire à la strate grossière $G_{-n_{\infty}}$;
 - le cercle unité au quotient $G_{-n_{\infty}}/G_{-2n_{\infty}}$.

La difficulté

La démonstration obtient l'axe imaginaire par **rotation** de l'axe réel. Or une rotation **conserve la taille des grains** : elle ne peut pas, à elle seule, faire passer de la strate fine à la strate grossière.

Notations

Soit n_∞ un hyperentier illimité. On pose

$$a = 2^{n_\infty}, \quad J = \frac{1}{a} = 2^{-n_\infty}, \quad \delta_g = \frac{2\pi}{a} \text{ (pas grossier)}, \quad \delta_f = \frac{2\pi}{a^2} \text{ (pas fin)}.$$

- Les deux pas sont infinitésimaux, et $\delta_g = a \delta_f$: un grain grossier contient exactement a grains fins.
- $a/4 = 2^{n_\infty-2}$ est un hyperentier : le quart de tour $\pi/2 = (a/4) \delta_g = (a^2/4) \delta_f$ tombe sur des jonctions.
- Le cercle C_1 est normalisé à la circonférence 2π .
- La **promotion** est la partie standard **st** ; on écrit $u \approx v$ quand $u - v$ est infinitésimal.
- **Transfert** : un énoncé vrai pour tous les entiers reste vrai pour les hyperentiers.

I. Du cercle complexe au plan complexe

Le situs circulaire auto-similaire

Définition 1 (Situs circulaire)

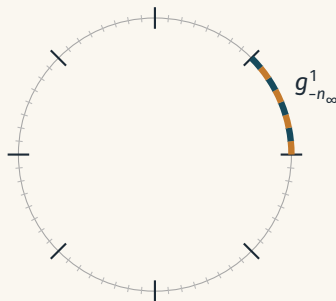
Arcs grossiers et arcs fins :

$$g_{-n_\infty}^{k'} : \theta \in [(k' - 1)\delta_g, k'\delta_g[, \quad 1 \leq k' \leq a;$$

$$g_{-2n_\infty}^k : \theta \in [(k - 1)\delta_f, k\delta_f[, \quad 1 \leq k \leq a^2.$$

Proposition 2 (Emboîtement)

Chaque arc grossier est la réunion de a arcs fins consécutifs.



dessin avec $a = 8$

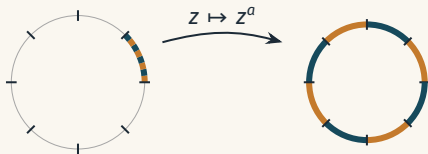
Le zoom est une puissance

Proposition 3 (Zoom)

Soit $P(z) = z^a$. Alors P envoie bijectivement :

- chaque arc fin sur un arc grossier ;
- chaque arc grossier sur le cercle entier.

Preuve. sur le cercle, P multiplie les angles par a ; un intervalle de longueur δ_f devient un intervalle de longueur δ_g , et un intervalle de longueur δ_g devient un intervalle de longueur $a\delta_g = 2\pi$.



Sur les angles, P est l'itérée n_∞ fois de l'application doublement de la théorie des coupures : le situs est la tour des positions, enroulée sur le cercle.

Le quart de tour sur le cercle

Proposition 4 (i est une isométrie des deux niveaux)

1. $1, i, -1, -i$ sont des jonctions des deux niveaux.
2. La multiplication par i envoie arc grossier sur arc grossier et arc fin sur arc fin : elle décale les indices de $a/4$ et de $a^2/4$.
3. $P(iz) = P(z)$: le quart de tour est invisible après le zoom.

Preuve. $\pi/2 = (a/4)\delta_g = (a^2/4)\delta_f$ avec $a/4$ hyperentier ; et $P(iz) = i^a z^a = (i^4)^{a/4} z^a = z^a$.

À retenir

Sur le cercle, i ne change pas de niveau. Le passage d'un niveau à l'autre est réalisé par le zoom $z \mapsto z^{2^{n_\infty}}$, et non par i .

Porter une grille du cercle sur un axe : projeter ou dérouler ?

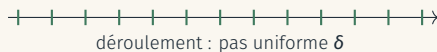
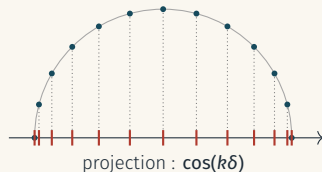
Proposition 5 (La projection stratifie)

La projection de la jonction $e^{ik\delta}$ est $x_k = \cos(k\delta)$, et

$$x_k - x_{k+1} = 2 \sin \frac{\delta}{2} \sin \frac{(2k+1)\delta}{2}.$$

- à un angle θ standard : facteur $\sqrt{1 - x^2}$;
- près de $x = 1$ (k limité) : écarts $(2k + 1)\delta^2/2$, la loi des **nombre impairs** de Galilée.

La projection est la stratification fonctionnelle de $f = \cos$. Il faut donc **dérouler** (rectifier) le cercle : le déroulement conserve les longueurs d'arc.



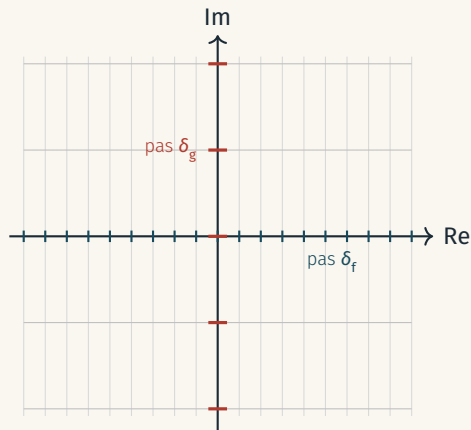
Le plan à deux résolutions

Définition 6 (Deux axes, deux résolutions)

On déroule la grille **fine** sur l'axe réel et la grille **grossière** sur l'axe imaginaire :

$$\Gamma_H = \delta_f \tilde{\mathbb{Z}}, \quad \Gamma_V = i \delta_g \tilde{\mathbb{Z}}, \quad \Gamma = \Gamma_H + \Gamma_V.$$

- Une seule métrique : les deux axes ont **la même unité**.
- Deux graduations : les grains du plan sont des rectangles $\delta_f \times \delta_g$, des « aiguilles » de rapport a .
- C'est la structure du théorème 61, obtenue par déroulement.



dessin avec $a = 4$

Le jacobien d'un axe vers l'autre

Proposition 7 (Deux lectures du rapport $J = \delta_f / \delta_g = 2^{-n_\infty}$)

1. **Lecture interne** : un grain de l'axe vertical a la longueur de $a = J^{-1}$ grains de l'axe horizontal.
 2. **Lecture externe** : l'homothétie $t \mapsto Jt$ envoie la graduation verticale sur la graduation horizontale, **grain sur grain** : $Jn\delta_g = n\delta_f$.
- Compter a grains fins dans un grain grossier, ou réduire un grain grossier en un grain fin : c'est le même rapport.
 - C'est la situation de l'étude de la **réflexivité** : une bijection grain à grain qui change l'épaisseur, et un comptage homogène qui révèle le rapport.

Le jacobien J **ne déforme pas le plan** : il relie deux graduations d'une même droite métrique.

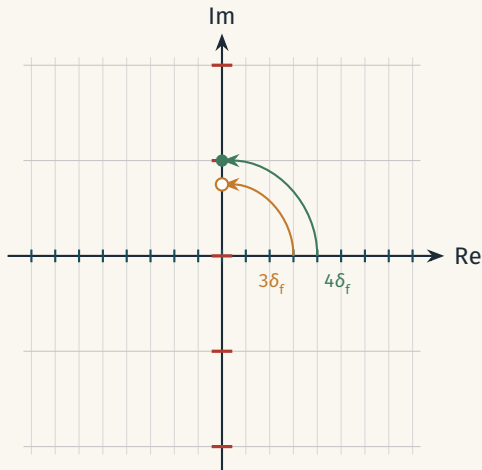
Le quart de tour, une isométrie qui change de grain

Théorème 8 (Le quart de tour entre les deux grilles)

1. Sur les **points**, i est une isométrie exacte et $i^2 = -1$.
2. **Vertical $\rightarrow$ horizontal : une inclusion.** $-i(i n \delta_g) = n \delta_g = (na) \delta_f \in \Gamma_H$.
3. **Horizontal $\rightarrow$ vertical : un sous-échantillonnage.** $i m \delta_f$ est une jonction verticale si et seulement si a divise m : on ne garde qu'une **jonction sur a** .
4. Sur les grains : i envoie a grains fins dans un même grain grossier.
5. Suivi grain par grain, $i \cdot i$ envoie chaque grain fin sur le grain grossier qui contient son image par -1 : l'aller-retour **efface la structure fine**.

Preuve. (3) $i m \delta_f = i(m/a) \delta_g$; (4) $[m \delta_f, (m+1) \delta_f[\subset [q \delta_g, (q+1) \delta_g[$ avec $q = \lfloor m/a \rfloor$.

Le quart de tour sur la grille : une image



- $i \cdot 4\delta_f = i\delta_g$: c'est une jonction grossière ($a = 4$ divisé 4).
- $i \cdot 3\delta_f$ n'est pas une jonction : il faut regrouper a grains fins pour obtenir un grain grossier.

« i exprime qu'on ne travaille pas dans le même grain »

Sur les points, i est une rotation exacte ; entre les grilles, il porte le changement de grain.

Remarque : le parallèle quantique

Le livre propose un parallèle avec la mesure (rem. 115) :

- l'expérience est préparée dans le grain **fin** (axe réel) ;
- la réalité est observée dans le grain **grossier** (axe imaginaire) ;
- le passage est **irréversible**.

Dans la construction à deux résolutions, cette irréversibilité a une forme précise : c'est le **sous-échantillonnage** que porte i de l'axe fin vers l'axe grossier.

Prudence

Cela reste un *parallèle*, et non une dérivation de la mesure quantique.

L'opérateur $\omega = 2^{n_\infty} i$

Définition 9

$\omega = a i = 2^{n_\infty} i \in \tilde{\mathbb{R}}[i]$. Son module est illimité : c'est un opérateur entre strates, et non un point du plan promu.

Proposition 10 (ω fait passer d'une graduation à l'autre)

1. $\omega \cdot (m \delta_f) = i m \delta_g$: graduation fine de l'axe réel $\rightarrow$ graduation grossière de l'axe imaginaire, indices conservés.
2. $\omega \cdot (i n \delta_g) = -2\pi n$: graduation grossière $\rightarrow$ pas 2π (niveau 0).
3. $\omega = a \cdot i$: version externe (similitude, indices conservés) de la version interne (i isométrie, indices divisés par a).

Chaque application de ω : monter d'un niveau et tourner d'un quart de tour.

Théorème 11

$$\omega^2 = -2^{2n_\infty}.$$

1. **Le module** : $(2^{n_\infty})^2 = 2^{2n_\infty}$, c'est-à-dire $(\#g_g)^2 = \#g_f$ en nombre de grains par tour.
2. **L'argument** : $\arg \omega^2 = 2 \arg \omega = \pi$, c'est-à-dire $i^2 = -1$.

Ce que le carré couple, et ce qu'il ne crée pas

- L'argument vient du **cercle** (quart de tour) ; le module vient des **niveaux** (nombre de grains).
- $i^2 = -1$ ne produit pas le facteur 2^{n_∞} ; la multiplication complexe assure leur **cohérence** : module 2^{n_∞} et argument $\pi/2$ donnent nécessairement module 2^{2n_∞} et argument π .

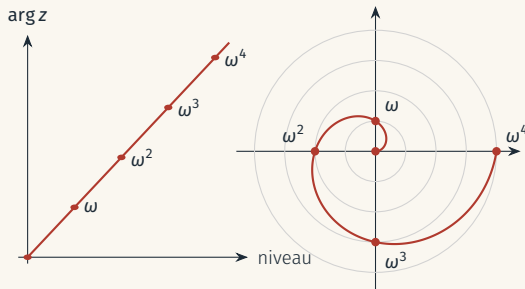
L'escalier en spirale

Dans le plan de l'argument
($\log_2 |z|$, $\arg z$) :

$$\omega^k \longleftrightarrow (k n_\infty, k \pi/2).$$

- $|\omega^k| = 2^{k n_\infty}$: le nombre de grains au niveau $-k n_\infty$;
- $\arg \omega^k = k$ quarts de tour ;
- $\omega^4 = 2^{4 n_\infty}$ revient sur l'axe réel positif, quatre niveaux plus loin.

Les puissances de ω codent la tour des résolutions.



à gauche : alignés dans le plan de l'argument ;
à droite : spirale dans le plan des valeurs (rayon gradué en niveaux)

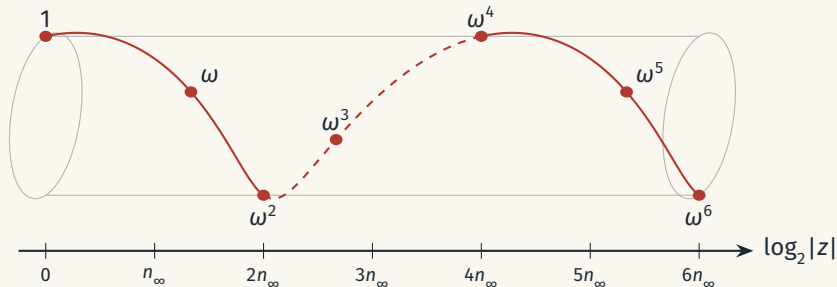
Similitude et vissage

Dans le plan des valeurs, ω est multiplicatif ; dans le plan de l'argument, il devient additif (dualité **ln / exp**, prop. 74 et rem. 114 du livre). L'argument étant cyclique, ce plan est un **cylindre**.

	Plan des valeurs	Cylindre de l'argument
ω agit comme	une similitude	un vissage
changement de résolution	homothétie $\times 2^{n_\infty}$	translation de n_∞ le long de l'axe
rotation ($i \mapsto -1$)	quart de tour	rotation de $\pi/2$ autour de l'axe
orbite de 1	spirale logarithmique	hélice
opération	multiplication	addition

- Les deux composantes commutent ; la rotation est d'ordre **4**, la translation d'ordre infini.
- ω envoie i sur -2^{n_∞} : la direction **-1**, un niveau plus loin.

L'hélice des résolutions



Chaque application de ω avance d'un niveau le long de l'axe et tourne d'un quart de tour autour. L'hélice fait un tour complet tous les quatre niveaux et ne revient **jamais** au même niveau. La spirale du plan des valeurs en est la projection.

La symétrie brisée et sa restauration

Proposition 12 (Symétries de la grille)

Γ est invariante par $z \mapsto -z$ et par la conjugaison $z \mapsto \bar{z}$, mais pas par $z \mapsto iz : i\Gamma$ contient $i\delta_f$, dont la partie imaginaire n'est pas un multiple de δ_g .

La grille a les symétries d'un rectangle, et non celles d'un carré.

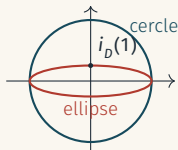
Théorème 13 (Restauration à la promotion)

1. Les jonctions limitées de Γ ont pour promotion $\mathbb{C}$ tout entier.
2. $\text{st}(iz) = i \text{ st}(z)$: sur $\mathbb{C}$, i est exactement le quart de tour, et le cercle unité est un cercle.

Même schéma que pour l'invariance de Lorentz dans l'étude du temps : une symétrie brisée au niveau des grains, restaurée par la promotion.

Deux lectures d'un jacobien entre les axes

	Lecture en résolution	Lecture métrique
ce qui change	la graduation (taille des grains)	l'unité de longueur
cercle unité	reste un cercle	ellipse de demi-axes 1 et J
quart de tour	isométrie, qui change de grain	i_D , qui n'est pas une isométrie
promotion	$\mathbb{C}$, avec i exact	le cercle s'écrase sur $[-1, 1]$
statut	superposition stratale (rem. 108)	anomalie cartésienne (chap. 14)



Lecture métrique : $D = \text{diag}(1, J)$ et $i_D = \begin{pmatrix} 0 & -1/J \\ J & 0 \end{pmatrix}$, avec

$$i_D^2 = -\text{Id} \text{ mais } |i_D(1)| = J.$$

La lecture **en résolution** est celle de la construction :
un seul support, deux structures.

Une variante isotrope : la grille log-polaire

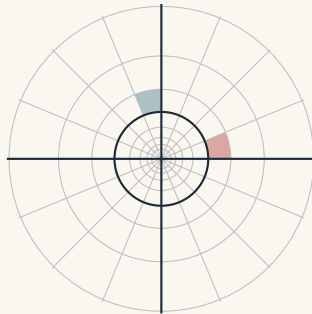
Si l'on exige au contraire que la grille soit invariante par i :

Théorème 14 (Grille log-polaire)

Sous une hypothèse d'isotropie, les rayons viennent du situs et les cercles concentriques ont pour rayons $e^{j\delta}$; les grains sont des carrés infinitésimaux ; les deux axes portent la même graduation logarithmique.

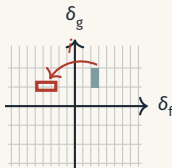
Même promotion, $\mathbb{C}$. Le cercle seul **ne tranche pas** :

- deux résolutions : lien niveaux / axes (th. 61) ;
- log-polaire : symétrie par i .



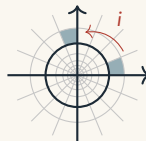
Deux choix de grille pour le même cercle

Deux résolutions



grain *rectangle* : son image par i n'est pas un grain

Log-polaire



grain *carré* : son image par i est un grain

	Deux résolutions	Log-polaire
axes	fin (δ_f) / grossier (δ_g)	même graduation $e^{j\delta}$
quart de tour i	est une isométrie qui change de grain	est une symétrie de la grille
changement de niveau	d'un axe à l'autre ($\#g_g^2 = \#g_f$)	$z \mapsto z^j$: homothétie $w \mapsto Jw$
ce qu'on garde	niveaux $\leftrightarrow$ axes (th. 61)	isotropie, grains carrés
ce qu'on perd	symétrie par i (rectangle)	lien niveaux / axes

Même promotion $\mathbb{C}$ (avec i exact) : le cercle **ne tranche pas**,
la lecture à deux résolutions est un **choix**.

Le théorème 61 reformulé

Théorème 15 (Correspondances stratales, lecture en résolution)

1. **Axe réel** : graduation fine $\delta_f \tilde{\mathbb{Z}} (G_{-2n_\infty})$, par déroulement de la grille fine du cercle.
2. **Axe imaginaire** : graduation grossière $i\delta_g \tilde{\mathbb{Z}} (G_{-n_\infty})$, par déroulement de la grille grossière.
3. **Cercle unité** : le situs à deux niveaux $(G_{-n_\infty} / G_{-2n_\infty})$.
4. **Quart de tour** : isométrie exacte qui relie les graduations en changeant de grain.

Promotion : le plan $\mathbb{C}$, sur lequel i est le quart de tour.

Ce qui change par rapport au livre

Seule la démonstration du point 2 : l'axe imaginaire reçoit la strate grossière **par déroulement**, et non par rotation. La rotation devient l'opération qui **relie** les deux strates.

Bilan de la partie I

1. Le cercle porte un **situs auto-similaire**, dont le zoom est la puissance $z \mapsto z^{2^{n_\infty}}$; i y est une isométrie des deux niveaux.
2. On **déroule** la grille fine sur l'axe réel et la grille grossière sur l'axe imaginaire : une métrique, deux résolutions, rapport $J = 2^{-n_\infty}$.
3. i est une isométrie **qui change de grain** : inclusion dans un sens, sous-échantillonnage dans l'autre.
4. L'opérateur $\omega = 2^{n_\infty} i$ en est la version externe ; $\omega^2 = -2^{2n_\infty}$ réunit $i^2 = -1$ et $(\#g_g)^2 = \#g_f$; ses puissances forment l'**hélice des résolutions**.
5. La symétrie par i , brisée au niveau des grains, est **restaurée** par la promotion.

II. Plan complexe et grain nul

Définition 16 (Lecture normée)

Chaque axe est gradué par son propre point de résolution, pris pour unité : δ_f sur Γ_H , δ_g sur Γ_V . Le point $m\delta_f + i n\delta_g$ a pour indices (m, n) , et le quart de tour normé est

$$\hat{i} : (m, n) \mapsto (-n, m).$$

Proposition 17

1. $\hat{i}$ envoie l'unité fine de Γ_H sur l'unité grossière de Γ_V : $\delta_f \mapsto i\delta_g$.
2. C'est une bijection de la grille : aucun arrondi.
3. $\hat{i}^2 = -\text{Id}$, $\hat{i}^4 = \text{Id}$; il conserve $m^2 + n^2$: le cercle unité normé reste un cercle.

En longueurs

$$\hat{i}(x, y) = (-y/a, a x) = K \cdot R(x, y), \quad R(x, y) = (-y, x), \quad K = \text{diag}(1/a, a) :$$

le quart de tour des longueurs R , suivi de la **dualité des points de résolution** K . C'est l'échange J_c du dédoublement ($c = a$).

- Seul, R envoie Γ_v grossier sur une sous-graduation de Γ_H (sans perte), mais Γ_H fin sur l'axe vertical au grain fin : le lire dans Γ_v demanderait d'**arrondir**. D'où la lecture normée comme lecture de base.
- $\omega = a i$: quart de tour et dilatation **uniforme**. Il envoie Γ_v fin sur $i\Gamma_v$ grossier, $\omega(i m \delta_f) = -m \delta_g$. Il fait **changer de strate** (hélice, projection h) mais n'est plus au centre de la construction.

La question

Question

Soit x sur l'axe réel et y sur l'axe imaginaire. Puisque le quart de tour $\hat{i}$ renvoie l'axe imaginaire sur l'axe réel, unité grossière sur unité fine, et que x et $\hat{i}y$ jouent des rôles opposés, peut-on en déduire que le plan complexe est **équivalent**, sans lui être égal, à un **grain nul** qui se promeut en zéro ?

En indices, $x + \hat{i}y = (m - n)\delta_f$: la superposition des deux axes. La variante par ω , $h(x + y) = x + \omega y$, change en outre de strate. **Plan de la réponse :**

1. la projection h et l'équivalence qu'elle définit ;
2. pourquoi une pseudo-métrique nulle ne dit rien ;
3. le grain nul au sens exact : la monade de 0 ;
4. le zéro par compensation ;
5. deux droites superposées, et la réciproque ;
6. le grain nul orienté et l'anti-Dirac, construit avec $\hat{i}$.

La projection h

Définition 18

Pour $z = x + it$: $\omega \cdot it = -a t$, donc

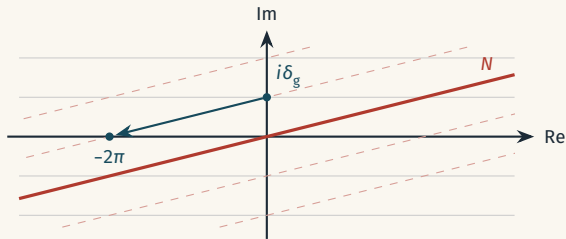
$$h(z) = x - a t = \operatorname{Re} z - 2^{n_\infty} \operatorname{Im} z.$$

Proposition 19

$h(m\delta_f + i n\delta_g) = m\delta_f - 2\pi n \in \Gamma_H$: h envoie toute la grille sur la graduation fine ; un pas grossier vertical devient un tour complet.

Théorème 20

h est la projection sur l'axe réel parallèlement au noyau $N = \tilde{\mathbb{R}}(a + i)$, droite de pente J .



dessin avec $a = 4$

L'équivalence définie par h

Proposition 21 (Le quotient est une droite)

$z \sim_h w \iff h(z) = h(w)$. Les classes sont les droites $c + N$; la classe de 0 est N . Le quotient de $d_h = |h(z) - h(w)|$ est la droite $\tilde{\mathbb{R}}$, et non un point.

Théorème 22 (Double lecture et promotion)

Pour $z = x + it$ limité :

1. lecture **grossière** : $\text{st}(J h(z)) = -\text{st}(\text{Im } z)$;
2. les classes limitées se promeuvent en **droites horizontales** ;
3. la classe nulle N se promeut en **l'axe réel tout entier**.

Preuve. $J h(z) = Jx - t$ et $Jx \approx 0$; un point $s(a + i)$ de N est limité si et seulement si sa l'est, et alors $\text{st} = \text{st}(sa)$, qui parcourt $\mathbb{R}$.

Par h , le plan est équivalent à une **droite**, pas à un grain nul.

Pourquoi une pseudo-métrique nulle ne dit rien

Proposition 23

1. La somme d'une mesure et de son opposée est la **mesure nulle**.
2. Une relation « $\mu(z) + (-\mu)(w') = 0$ » relie alors tous les couples.
3. Sur **n'importe quel ensemble**, la pseudo-métrique nulle a pour quotient de Kolmogorov un seul point.

Proposition 24 (Compatibilité avec la promotion)

Si $z \sim w \Rightarrow \text{st}(z) = \text{st}(w)$, alors $1 \neq 0$: aucune équivalence compatible avec la promotion ne réduit le plan à un grain nul.

Rappel du livre (déf. 88, rem. 121)

Un grain d'épaisseur infinitésimale **n'est pas un zéro** : « zéro épais » est un oxymore.

Le grain nul au sens exact : la monade de 0

Théorème 25 (Le quotient de Kolmogorov est $\mathbb{C}$)

Sur les points limités, $d_{st}(z, w) = st |z - w|$ est une pseudo-métrique ; son quotient est $\mathbb{C}$, l'application quotient est la **promotion**, et les classes sont les **monades**.

Définition 26 (Grain nul)

Le grain nul est la monade $\mathfrak{M}(0)$: les infinitésimaux de $\tilde{\mathbb{R}}[i]$.

- Chaque grain de Γ a un diamètre infinitésimal : il est dans une seule monade.
- Le grain nul contient une infinité illimitée de grains de Γ .

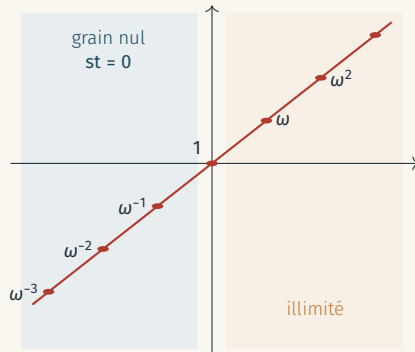
Le grain nul est **équivalent** à **0** au sens de d_{st} , sans lui être **égal**.

L'hélice descendante

Théorème 27

1. Pour $k \geq 1$, $\omega^{-k} = (-i)^k 2^{-kn_\infty} \in \mathfrak{M}(0)$: la hiérarchie des infinitésimaux stratifiés $2^{-n_\infty} > 2^{-2n_\infty} > \dots$ (th. 64).
2. $\omega^0 = 1$ est standard.
3. Pour $k \geq 1$, ω^k est illimité : pas de promotion.

La moitié descendante de l'hélice s'enfonce dans le grain nul.



Le zéro par compensation : le barycentre du situs

Proposition 28

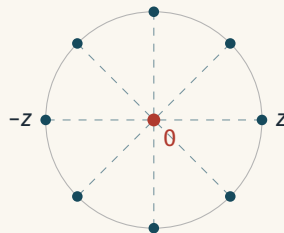
$$\sum_{k=0}^{a-1} e^{ik\delta_g} = 0, \quad \sum_{k=0}^{a^2-1} e^{ik\delta_f} = 0.$$

Le demi-tour associe chaque jonction z à $-z$: les contributions opposées se **compensent deux à deux**.

Le changement de niveau détruit la compensation

$1 + i + i^2 + i^3 = 0$, mais

$$1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 = (1 - a^2)(1 + ai) \neq 0.$$



Le cercle définit un **centre** par compensation ; il ne rend pas le plan nul.

Deux droites superposées : somme directe et superposition

Soit $L = \tilde{\mathbb{R}}$, $\sigma : x \mapsto -x$ le demi-tour, et $V = L \oplus L$.

- **Somme directe** : V , de dimension 2 ; c'est le plan, $P_{\mathbb{C}} = \tilde{\mathbb{R}} \oplus i\tilde{\mathbb{R}}$.
- **Superposition** : $s(x, y) = x - y$ dépose la première copie telle quelle et la seconde retournée.

Proposition 29

Avec l'unité fine virtuelle $y' = at$, on a $h(x + it) = s(x, y')$: h superpose l'axe réel et l'axe imaginaire, le second retourné par ω .

Proposition 30 (Somme orientée nulle, grain par grain)

Sur une fenêtre symétrique, les grains orientés $+g_m$ de la première copie et $-g_{-m-1}$ de la seconde s'annulent : $[L] + \sigma_*[L] = 0$.

Ce qui s'annule, ce sont les **orientations** ; le lieu de la compensation est la diagonale $x = y'$, c'est-à-dire le **noyau** N .

La réciproque : pourquoi il faut deux grains

Lemme 31 (Pas de racine carrée du demi-tour sur une seule droite)

Aucune application linéaire λ de L ne vérifie $\lambda^2 = \sigma : \lambda^2 \geq 0$. En particulier, **aucun changement de grain** n'a pour carré le demi-tour.

Il faut donc deux copies **distinctes**. Or deux copies de même grain, superposées, sont indiscernables.

L'idée

C'est le **changement de grain** qui distingue les deux copies : l'une fine, l'autre grossière, deux strates sur un même support (rem. 108).

La racine carrée du demi-tour comme aller-retour en résolution

Définition 32 (Dédoublement stratal)

Copie fine (grain δ_f), copie grossière (grain $c \delta_f$, par exemple $c = 2^{n_\infty}$), et deux identifications :

- **directe** (dédoublement) : $d_c(x) = c x$;
- **par la superposition** : $r_c(y) = \sigma(y/c) = -y/c$.

L'échange est $J(x, y) = (r_c(y), d_c(x)) = (-y/c, c x)$.

Proposition 33

1. $J^2 = -\text{Id}$: les changements de grain se compensent, le -1 vient du retournement, traversé **une seule fois**.
2. Traversé deux fois ou jamais : $E^2 = +\text{Id}$, une symétrie.
3. Compté en grains : $(m, n) \mapsto (-n, m)$, **le quart de tour des indices**.

Les ingrédients de i

Ingrédient	Ce qu'il apporte
le changement de grain (fin / grossier)	il distingue les deux copies ; il se compense dans J^2
le retournement de la superposition	le signe -1 : le demi-tour
l'échange (aller direct, retour par la superposition)	la racine carrée ; compté en grains, le quart de tour
le choix de la jambe retournée	l'orientation : i ou $-i$

La racine carrée du demi-tour **n'a pas à être postulée** : c'est la composition des deux identifications que fournissent le dédoublement et la superposition.

Version géométrique : deux précautions

L'aller-retour en résolution est un calcul de J^2 . On peut le lire **géométriquement**, en faisant agir J sur les deux droites elles-mêmes.

Deux précautions

1. Comme ensemble, une droite passant par 0 vérifie $-\Delta = \Delta$: on travaille avec des droites **orientées**.
2. Pour la longueur usuelle, J n'est une isométrie que si $c = \pm 1$: l'angle droit s'entend pour la métrique qui **compte en grains**.

Définition 34 (Droites orientées, métrique en grains)

- Δ^{--} : copie fine, Δ^- : copie grossière ($c = 2^{n_\infty}$), d'orientations $\varepsilon_1, \varepsilon_2 = \pm 1$; superposées en sens opposés si $\varepsilon_2 = -\varepsilon_1$.
- $\langle v, v' \rangle_g = mm' + nn'$ pour $v = (m\delta_f, n c\delta_f)$: chaque composante dans sa propre graduation.

Proposition 35 (Orthogonalité)

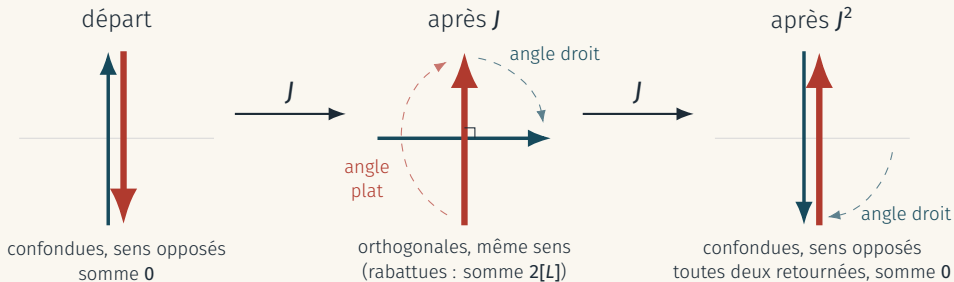
1. Pour $\langle \cdot, \cdot \rangle_g$, J est une isométrie ; dans la base des grains, sa matrice est $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$: la rotation d'un angle droit.
2. $J(\Delta^{--}) = \Delta^-$ en respectant l'orientation ; $J(\Delta^-) = \Delta^{--}$ en la renversant.
3. $\Delta^{--} \perp \Delta^-$: la droite grossière est l'image de la droite fine par un quart de tour.

Preuve.

- En indices, $J : (m, n) \mapsto (-n, m)$, qui conserve $m^2 + n^2$.
- $J(x, 0) = (0, cx)$; $J(0, y) = (-y/c, 0)$.
- $\langle (m\delta_f, 0), (0, n c\delta_f) \rangle_g = 0$. □

L'orthogonalité est exacte, mais **relative à la lecture en résolution** : pour la longueur usuelle, J étire un axe d'un facteur 2^{n_∞} et écrase l'autre.

Le passage par les deux droites orthogonales



trait fin : droite fine Δ^-

trait épais : droite grossière Δ^-

Premier pas : un **angle droit** pour la droite fine, un **angle plat** pour la droite grossière. Second pas : un second angle droit pour la droite fine. Chacune a tourné d'un angle plat : $J^2 = -Id$.

L'orbite des orientations

Après superposition, un quart de tour ne laisse qu'une **trace sur les orientations** :

$$J : (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \mapsto (-\varepsilon_2, \varepsilon_1), \quad J^2 : (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \mapsto (-\varepsilon_1, -\varepsilon_2).$$

Proposition 36 (La somme nulle voit les pas pairs de J)

Sur la graduation fine, la somme orientée des deux droites superposées est $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)[L]$:

$$(+, -) \xrightarrow{J} (+, +) \xrightarrow{J} (-, +) \xrightarrow{J} (-, -) \xrightarrow{J} (+, -), \quad \text{sommes } 0, 2[L], 0, -2[L], 0.$$

1. La configuration de somme nulle est invariante par J^2 , **pas par J** .
2. Les états de somme nulle sont exactement les **pas pairs**.
3. J^2 n'est pas l'identité sur les droites étiquetées : il n'est invisible que sur la somme orientée.

Ce que l'on peut conclure

Établi

- Les deux droites sont **orthogonales** pour la métrique en grains : l'une est l'image de l'autre par un quart de tour.
- La superposition à somme orientée nulle est invariante par J^2 et non par J .
- Le quart de tour est la **dynamique cachée** dont la superposition à somme nulle ne voit que les pas pairs.

Non établi

Une équivalence *au sens fort* entre la représentation orthogonale et la représentation superposée : J lui-même fait sortir de la somme nulle. L'équivalence vaut pour les **sommes orientées** et les **puissances paires** de J seulement.

Dans le plan V de la construction, les deux copies restent toujours orthogonales ; la figure les montre superposées aux pas pairs (somme nulle) et dépliées au pas impair.

Le plan complexe se déduit de la superposition

Théorème 37

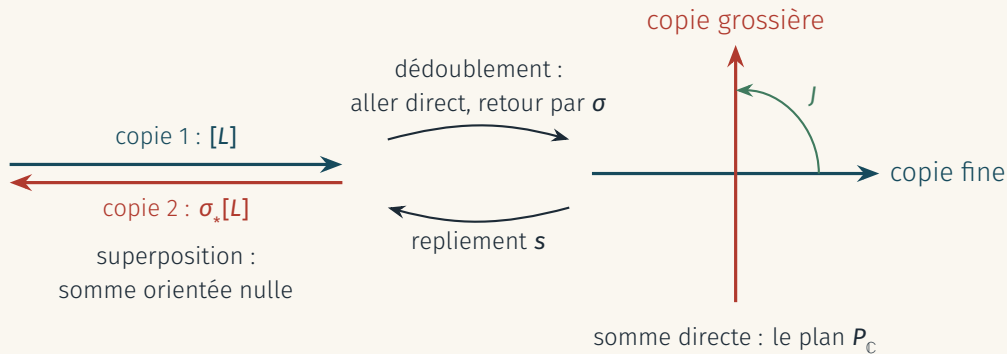
Soit $V = L \oplus L$ le dédoublement.

1. Les échanges J_* qui envoient la première copie sur la seconde et vérifient $J_*^2 = -\text{Id}$ sont exactement les $J_c(x, y) = (-y/c, c x)$.
2. Chacun fait de V le plan complexe $P_{\mathbb{C}}$, via $\Phi_c(x, y) = x + i y/c$.
3. J_c est une isométrie (même unité sur les deux copies) si et seulement si $c = \pm 1$; compté en grains, c'est le quart de tour exact pour tout c .

Preuve. $J_*(x, 0) = (0, cx)$ par linéarité, puis $J_*(0, cx) = J_*^2(x, 0) = (-x, 0)$.

Plus faible qu'un grain nul, mais exact : deux droites superposées de grains différents redonnent le plan complexe, sans postuler i .

Superposition et dédoublement



La superposition fournit le demi-tour ; le changement de grain distingue les copies ; l'échange, qui va par le dédoublement et revient par la superposition, fournit i . On ne postule pas i .

Définition 38 (Chaînes de grains)

Une **chaîne** est une somme hyperfinie $c = \sum_m \varepsilon_m g_m$ de grains orientés, avec $g + (-g) = 0$. Elle agit sur une fonction test standard f par

$$c(f) = \sum_m \varepsilon_m \int_{g_m} *f.$$

Définition 39 (Équivalence par la promotion)

$c \approx c' \iff \text{st } c(f) = \text{st } c'(f)$ pour toute fonction test standard f .

C'est la promotion appliquée aux **mesures orientées** (au sens des distributions de Schwartz), et non plus aux points. Les pseudo-métriques $d_f(c, c') = |\text{st}(c - c')(f)|$ **ne sont pas** identiquement nulles.

Théorème 40

1. Les deux droites superposées valent **exactement** la chaîne nulle : $c_{\text{sup}} = 0$.
2. Le grain nul orienté vérifie $g_0 \approx 0$: $|g_0(f)| \leq \delta_f \sup |f| \approx 0$.
3. Donc $c_{\text{sup}} \approx g_0$, et $c_{\text{sup}} \neq g_0$.
4. L'équivalence n'est pas triviale : une seule droite orientée n'est pas ≈ 0 .

Conclusion

Les deux droites superposées de somme orientée nulle sont **équivalentes** au grain nul **orienté**, sans lui être égales, comme mesures orientées.

L'anti-Dirac comme orbite de $\hat{I}$

Grains de la croix : $g_m^H = [m\delta_f, (m+1)\delta_f]$ sur Γ_H , $g_n^V = i[n\delta_g, (n+1)\delta_g]$ sur Γ_V . Par $\hat{I} : \hat{I}_* g_m^H = g_m^V$, $\hat{I}_* g_n^V = -g_{-n-1}^H$.

Théorème 41 (La croix orientée)

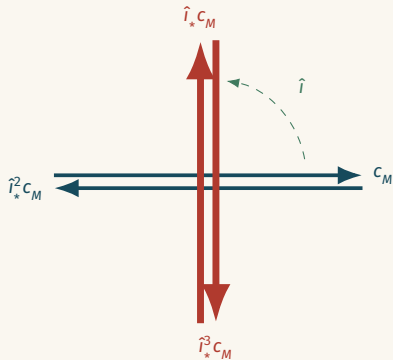
Pour un segment centré $c_M = \sum_{m=-M}^{M-1} g_m^H$, la croix $A_M = c_M + \hat{I}_* c_M + \hat{I}_*^2 c_M + \hat{I}_*^3 c_M$ vérifie :

1. $\hat{I}_*^2 c_M = -c_M$, et $A_M = 0$ exactement, axe par axe : branches horizontales sur la graduation fine, verticales sur la grossière, sans arrondi ;
2. $c_M + \hat{I}_*^2 c_M = c_{\text{sup}}$: les droites superposées sont la moitié horizontale de la croix ;
3. aucune branche seule n'est équivalente à 0 ;
4. avec ω , la compensation échoue : $\omega_*^2 c_M$ est dilaté d'un facteur a^2 .

Preuve. $\hat{I}_*^2 g_m^H = -g_{-m-1}^H$ et $m \mapsto -m-1$ est une bijection de la fenêtre centrée ; puis $\hat{I}_* c_M + \hat{I}_*^3 c_M = \hat{I}_* (c_M + \hat{I}_*^2 c_M) = 0$.



La croix orientée



- trait fin : graduation **fine** (Γ_H) ;
- trait épais : graduation **grossière** (Γ_V) ;
- sur chaque axe, le même segment centré parcouru en sens opposés.

La croix et le barycentre

Version « chaînes » de $1 + i + i^2 + i^3 = 0$; avec ω ,
 $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 \neq 0$: quatre strates différentes.

Le Dirac, le dipôle et l'anti-Dirac

Objet	Étendue, masse	Promotion	Lecture
masse 1 sur le grain nul (densité $1/\delta_f$)	étendue nulle, masse 1	δ_0	le Dirac
bord du grain nul divisé par δ_f	deux masses opposées	$-\delta'_0$	le dipôle
grain nul orienté (densité 1)	étendue et masse infinitésimales	0	le grain nul
deux droites superposées (± 1)	étendue illimitée, somme nulle	0	moitié de l'anti-Dirac
croix orientée (orbite de $\hat{r}$)	deux axes, somme nulle	0	l'anti-Dirac

- Le Dirac concentre une masse 1 dans un grain d'étendue nulle.
- L'anti-Dirac (la croix orientée) étale une densité de somme nulle sur les deux axes.
- Le grain nul orienté est à la frontière des deux : il se promeut, comme l'anti-Dirac, en 0.

La chaîne complète, et ses limites

$$\underbrace{g_0}_{\text{grain nul orienté}} \approx 0 = \underbrace{A_M}_{\text{croix orientée}} \supset \underbrace{C_{\text{sup}}}_{\text{droites superposées}} \longrightarrow \underbrace{P_{\mathbb{C}}}_{\text{plan complexe}}$$

- $\approx$: équivalence par la promotion des mesures orientées ;
- $=$: égalité dans le groupe des chaînes (la croix est nulle) ; $\supset$: les droites superposées en sont la moitié horizontale ;
- $\longrightarrow$: dédoublement stratal, où i est un aller-retour en résolution.

Limites

1. L'équivalence porte sur des **mesures orientées**, pas sur des points : le plan est relié au grain nul par le repliement de ses axes, il ne lui est pas identifié.
2. La classe de **0** est **grande** : « avoir une action promue nulle ».
3. Le grain nul n'est pas nul par nature, mais par la **densité** qu'on lui fait porter.

Synthèse

Quatre équivalences

Pseudo-métrique	Quotient	Classe de 0	Promotion
nulle	un point, pour tout ensemble	tout l'ensemble	incompatible
$d_h = h(z) - h(w) $	la droite $\tilde{\mathbb{R}}$	N , pente J	droites horizontales ; $N \rightarrow \mathbb{R}$
$d_{st} = st z - w $	$\mathbb{C}$	la monade $\mathfrak{M}(0)$	la promotion elle-même
d_f sur les chaînes	mesures signées sur $\mathbb{R}$	grain nul orienté, droites superposées	promotion des mesures

Le plan n'est pas équivalent à un grain nul ; mais le grain nul existe au sens exact, et les deux droites superposées lui sont équivalentes comme mesures orientées.

Ce qu'il faut retenir

1. **Deux axes, deux résolutions** : on déroule les deux grilles du cercle ; le théorème 61 tient, démontré par déroulement.
2. **i change de grain** : isométrie sur les points, inclusion ou sous-échantillonnage entre les grilles.
3. **$\omega = 2^{n_\infty} i$: $\omega^2 = -2^{2n_\infty}$** ; similitude dans le plan des valeurs, vissage sur le cylindre de l'argument ; l'hélice des résolutions.
4. **La promotion** restaure la symétrie par i et ne garde que l'argument de ω .
5. **Le grain nul** est la monade de 0 ; la moitié descendante de l'hélice s'y enfonce.
6. **Deux droites superposées** de grains différents redonnent le plan, avec i comme aller-retour en résolution ; comme mesures orientées, elles sont équivalentes au grain nul orienté.
7. **Lecture normée** : $\hat{i}$ envoie l'unité fine sur l'unité grossière sans arrondi ; l'**anti-Dirac** est la croix orientée, orbite de $\hat{i}$, exactement nulle.

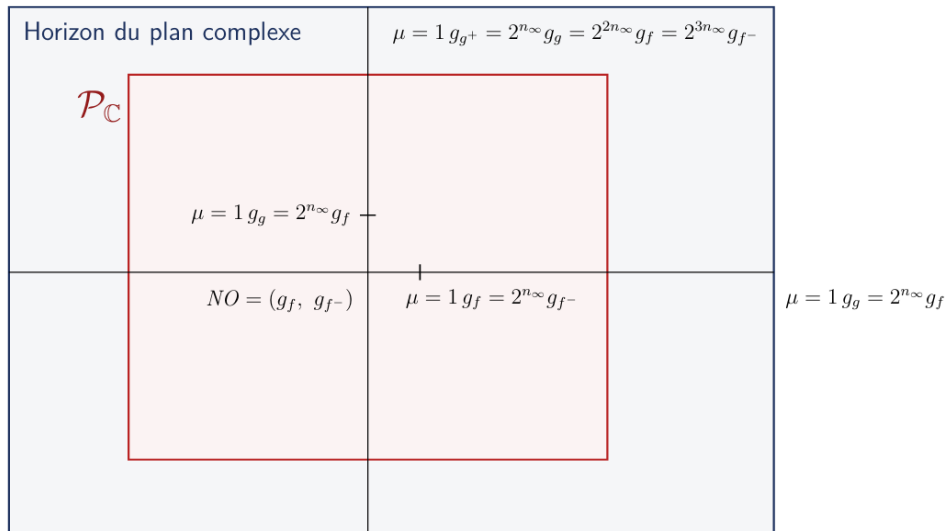
$\tilde{\mathcal{P}}_{\mathbb{C}}$ 

Figure 1: Le plan complexe.

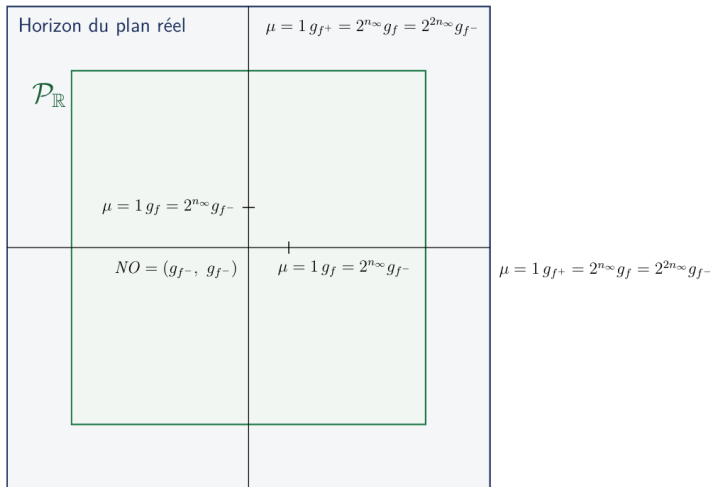
$\tilde{\mathcal{P}}_{\mathbb{R}}$


Figure 2: Le plan réel.

1. **Dimension 2.** Étendre l'équivalence $\approx$ aux mesures orientées du plan (surfaces orientées) : que devient le grain nul orienté bidimensionnel ?
2. **Grille log-polaire.** Refaire la partie II dans la variante isotrope, où i est une symétrie de la grille.
3. **Hélice et phase.** Relier l'hélice des résolutions au parallèle quantique, en restant au niveau d'un parallèle : la phase est la direction imaginaire du plan de l'argument.
4. **Dipôle.** Explorer la lecture du dipôle $-\delta'_0$ comme bord du grain nul, en lien avec la dérivée stratale.

Références

-  H. Genvrin, *Théorie du grain*, manuscrit, 2026 ; chap. 13 (Exponentiation), 14 (Anomalie cartésienne), 15 (Cardinal et promotion algébrique).
-  H. Genvrin, *Du cercle complexe au plan complexe : deux axes, deux résolutions*, 2026.
-  H. Genvrin, *Plan complexe et grain nul*, 2026.
-  H. Genvrin, *Le paradoxe de la réflexivité dans la théorie du grain*, 2026.
-  H. Genvrin, *Théorie des coupures et théorie du grain*, 2026.
-  H. Genvrin, *Instants et moments : le temps dans la théorie du grain*, 2026.
-  L. Schwartz, *Théorie des distributions*, Hermann, 1950–1951.
-  A. Robinson, *Non-standard Analysis*, North-Holland, 1966.